

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Būvniecības fakultāte

Ģeomātikas katedra

Jānis Bikše

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Mācību līdzeklis

**RTU Izdevniecība
Rīga, 2007.g.**

Satura rādītājs

1. Zemes elipsoīda ģeometriskie parametri.....	7
2. Zemes elipsoīda meridiāna parametriskie vienādojumi	12
3. Ģeogrāfiskais, reducētais un ģeocentriskais platums.....	18
4. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un galvenie liekumi.	23
5. Zemes elipsoīda parametriskie vienādojumi.....	32
6. Zemes elipsoīda saplakuma trijstūris	38.
7. Zemes elipsoīda normāle.....	42
8. Zemes elipsoīda meridiāna loka garums.	45
9. Zemes elipsoīda paralēles loka garums.....	52
10. Zemes elipsoīda trapeces laukums	57.
11. Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi.....	65.
12. Augstuma ietekme uz ģeodēzisko azimutu starpību	74.
13. Zemes elipsoīda normālšķēlumu duālisms.....	77.
14. Zemes elipsoīda ģeodēziskās līnijas.....	81.
15. Zemes elipsoīda trijstūri	86.
16. Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda	92.
17. Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda.....	103.
18. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē	113
19. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē. Tiešais uzdevums pēc Gausa – Krīgera	117.
20. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē. Pretējais uzdevums pēc Gausa – Krīgera	122.
21. Zemes elipsoīda konformā attēlošana plaknē. Meridiānu tuvināšanās, mēroga koeficients un izlieces redukcija pēc Gausa-Krīgera.	128
22. Koordinātu plaknes Latvijā (1921.- 1945.g.).....	132
23. Koordinātu plaknes Latvijā (1945.- 1993.g.).....	138
24. Topogrāfisko karšu 1958.gada sistēma (TKS-58).....	142

26. Koordinātu pārveidošana [kvazi] ģeocentriskā telpā ($ce_1 \rightarrow cr_1$).....	146
27. Koordinātu pārveidošana [kvazi] ģeocentriskā telpā ($cr_1 \rightarrow ce_1$).....	149
28. Koordinātu pārveidošana	153

IEVADS

Augstākā ģeodēzija ir ģeodēziskās zinātnes svarīga apakšnozare. Tās galvenais uzdevums ir noteikt Zemes veidu, ārējo gravitācijas lauku, kā arī ģeodēziskā tīkla atbalstpunktu koordinātas. Augstākās ģeodēzijas zināšanas dod iespējas efektīgāk risināt gan zinātniskas, gan lietišķas problēmas ne tikai ģeodēzijā un mērniecībā, bet arī kartogrāfijā. Speciālistam kartogrāfam jāsaprot valsts ģeodēziskā tīkla veidošanas principi, kas īpaši nepieciešams sagatavojot topogrāfiskās kartes. Kartogrāfisko projekciju izvēlē jābūt izpratnei par Zemes formu un tās matemātisko modeli.

RTU GODA DARBINIEKS, DOCENTS JĀNIS BIKŠE DAUDZUS GADUS LASOT AUGSTĀKĀS ĢEODĒZIJAS PRIEKŠMETU, TO IZSTRĀDĀJIS LĪDZ PILNĪBAI. ŠIS MĀCĪBU LĪDZEKLIS IR PIRMAIS LATVIEŠU VALODĀ PĒC 2.PASAULES KARA. JĀNORĀDA, KA ARĪ CITĀS VALSTĪS IR MAZ ŠĀDU IZDEVUMU.

J.BIKŠES DARBS VEIDOTS LOĢISKĀ SECĪBĀ AR PLAŠU MATEMĀTISKO PAMATOJUMU, PIEMĒRIEM UN DAUDZIEM RŪPĪGI IZVĒLĒTIEM ATTĒLIEM.

NEŠAUBOS, KA ŠO DARBU IZMANTOS NE TIKAI NĀKAMIE ĢEODĒZISTI SĒŽOT STUDENTA SOLĀ, BET DAUDZI PRAKTIĶI UN ARĪ TIE, KURI ĢEODĒZIJU APGŪST MŪSU AUGSTSKOLAS NEPILNA LAIKA STUDIJĀS.

J.BIKŠES DARBS IR PIRMAIS MĀCĪBU LĪDZEKLIS ĢEOMĀTIKAS KATEDRĀ, KURA IZDOŠANAS FINANSĒŠANĀ PIEDALĀS PRIVĀTUZŅĒMĒJI. TĀ IR LIELISKA PRAKSE, KAS CERAMS TURPINĀSIES.

J.ŠTRAUHMĀNIS
ĢEOMĀTIKAS KATEDRAS VADĪTĀJS

Zemes elipsoīda ģeometriskie parametri

Ikviens cilvēks dzīvo Zemes ģeogrāfiskā apvalkā. Mēs staigājam pa Zemes fizisko virsmu. Zem mūsu kājām vidēji 6371 km dziļumā ir Zemes centrs. Zeme ir cilvēces mājvieta. Zemi pēta daudzas zinātņu nozares. Tās var pazīt pēc kopīgā prefiksa “ģeo”, piemēram, ģeodēzija, ģeometrija, ģeogrāfija, ģeoloģija, ģeomorfoloģija, ģeofizika, ģeodinamika, ģeotehnika, u.c.

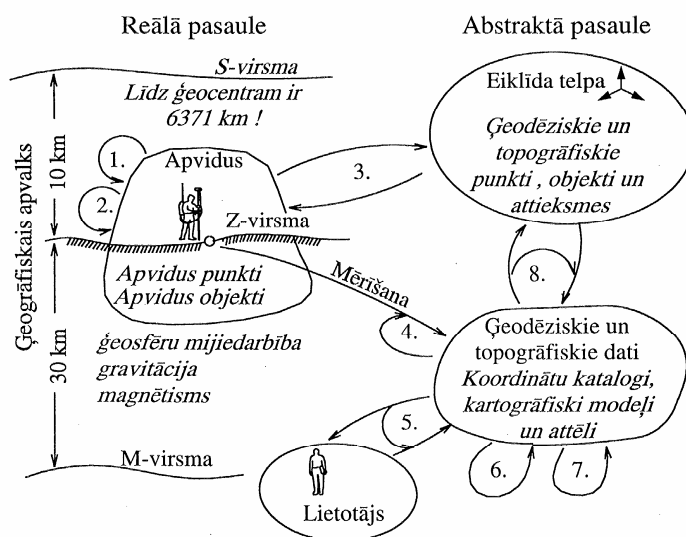
Savas apkārtnes (s.a. apvidus) izzināšana vienmēr ir nodarbinājusi cilvēces gaišākos prātus.

Ģeodēzija ir mācība par mērīšanu apvidū, tās rezultātu iegūšanu, pārsūtīšanu, pārveidošanu un lietošanu Zemes kā planētas pētīšanai, tautsaimniecības uzdevumu risināšanai un valsts aizsardzības nodrošināšanai.

Ģeodēzijā un arī zinātņu nozarēs, ko tā apkalpo, plaši lieto modelēšanu.

Modelēšana ir objektu-oriģinālu netiešās izzināšanas metode, pētot objektu-aizvietotāju [Frolova 99,9]. Ģeodēzijā objekts-oriģināls ir Zeme kopumā vai arī tikai tās apvalks (s.a. ģeogrāfiskais apvalks), kurā notiek intensīva cilvēku darbība. Savkārt objekts-aizvietotājs ir ģeometriskais modelis, kuru centrālais jēdziens ir Eiklīda trīsdimensiju telpa ar tajā definētu attāluma noteikšanu pēc Pitagora teorēmas.

Tādējādi ģeodēziskās darbības notiek uz reālās un abstraktās pasaules robežas.



1.zīm. Objekti un darbības ģeodēzijā

Objekti: ģeogrāfiskais apvidus, apvidus punkti, apvidus objekti, Eiklīda telpa, ģeodēziskie un topogrāfiskie punkti, ģeodēziskās un topogrāfiskās attieksmes, topogrāfiskie objekti, ģeodēziskie un topogrāfiskie dati, koordinātu katalogi, kartogrāfiskie modeļi un attēli;

Darbības: 1.Iepazīties, klasificēt; 2. Iezīmēt, nostiprināt; 3. Idealizēt, noteikt stāvokli; 4. Mērīt, iegūt, ciparot; 5. Pieprasīt, pasūtīt, izsniegt; 6. Pārveidot, aprēķināt, attēlot; 7. Glabāt, pavairot; 8. Interpretēt, nospraust.

Zemes kā planētas izzināšanai un dzīvei tās ģeogrāfiskā apvalkā par katru no neskaitāmiem tā objektiem (s.a. apvidus objektiem) bieži jājauc

- kādas ir objekta ģeodēziskās īpašības?
- kādas ir objekta ģeogrāfiskās īpašības?
- kādas ir objekta saimnieciskās īpašības?

Pilnīgākas atbildes uz šiem jautājumiem sniedz

- ģeodēzija;
- kartogrāfija;
- zemes pārvaldība.

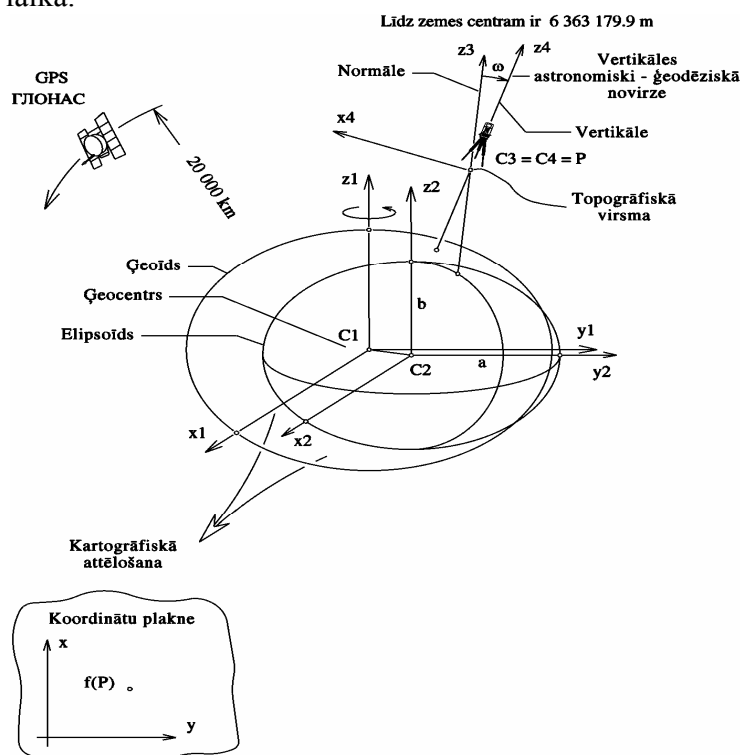
Saprotams, ka ģeogrāfiskās un saimnieciskās īpašības ir pakārtotas ģeodēziskām īpašībām. Nav jēga interesēties par apvidus objektu, ja nav zināma tā atrašanās vieta. Tādējādi apvidus objekta ģeodēziskās īpašības ir primāras, bet ģeogrāfiskās un saimnieciskās - sekundāras.

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Atbildi uz pirmo jautājumu ierobežotā apvidū (līdz 1 km) apvidū var atrast, lietojot elementārās (s.a. zemākās ģeodēzijas) metodes. Šādā situācijā apvidu kā objektu - oriģinālu aizstāj ar objektu aizvietotāju (s.a. modeli) – Eiklīda plakni. Jāuzsver, ka veicot arī elementārās ģeodēziskās darbības intensīvi jālieto Zemes smaguma spēka lauks, t.i. jēdzieni “horizontāls” un “vertikāls”.

Augstākā ģeodēzijā kā objektu-oriģinālu aplūko Zemi kopumā un jau daudzus gadsimtus aizstāj to ar objektu-aizstājēju – Zemes ģeodēzisko modeli.

Zemes ģeodēziskais modelis ir matemātiski -fizikāls objekts un to apraksta ar Zemes ģeometriskiem un fizikāliem lielumiem, kuru vērtības (s.a. parametrus) laika gaitā iegūst un precizē. Ģeodinamisko pētījumu vajadzībām kontrolē arī Zemes ģeodēziskā modeļa parametru (īsāk: Zemes parametru) izmaiņas laikā.



2. zīm. Zemes ģeodēziskais modelis

Formalizējot teikto, ievēdīsim attēlojumu

$$\mathbf{gds} = \mathbf{ref}(\mathbf{Zeme}), \quad (1.1.)$$

kur

gds - geodetic system – ģeodēziskā sistēma kā objekts - aizstājējs
(sakārtoti dati par Zemes modeli);

ref - Zemes ģeodēziskā modelēšana (ref[erence] - savstarpējā attiecība);

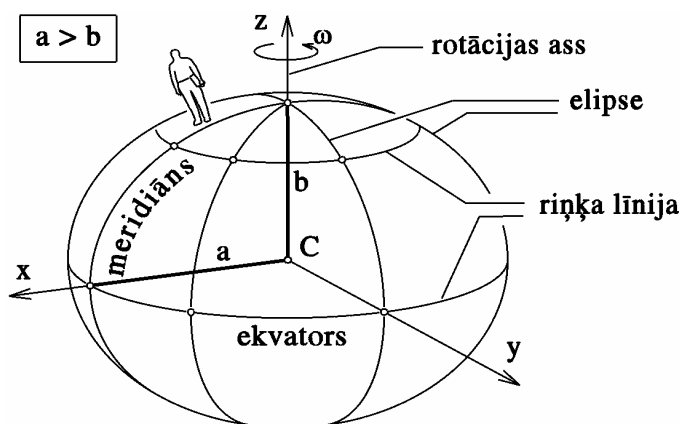
Zeme - Zeme kā objekts - oriģināls;

Parasti ģeodēzisko sistēmu izveido un tehniski, kā arī juridiski nostiprina atsevišķa valsts vai valstu grupa.

Tradicionāli ārzemju literatūrā **gds** sauc arī par ģeodēzisko sākumu vai ģeodēziskiem sākumdatiem (angl. Geodetic Datum).

Ģeodēziskā sistēma garantē vienotas koordinātu telpas izveidi Zemei kopumā kā arī atsevišķā valstī vai valstu grupā. Tādēļ **gds** parasti valstī izsludina ar likumu vai arī ar augstākā līmeņa noteikumiem.

Zemes ģeodēziskā modeļa galvenais ģeometriskais objekts ir divasu (s.a. rotācijas) elipsoīds (s.a. Zemes elipsoīds vai arī referencilipsoīds).



3. zīm. Zemes elipsoīds

Galvenie elipsoīda šķēlumi ir meridiāns un paralēle; Zemes meridiāns ir elipse, bet Zemes paralēle - riņķa līnija; Bieži ar meridiānu saprot tikai puselipsi no elipsoīda ziemeļpola līdz dienvidpolam; Meridiānu uzdod tā elipsoidālais garums λ no intervāla $[0^\circ; 360^\circ]$.

Sākuma meridiānu $\lambda = 0^\circ$ noteic starptautiska vienošanās un tā sasaisti ar Zemi pārvalda starptautiskas iestādes.

Paralēli uzdod elipsoidālais platumu φ no intervāla $[-90^\circ; +90^\circ]$. Pieņemts, ka Zemes ziemeļu puslodē $\varphi > 0$. Paralēles Zemes elipsoīda ziemeļpolā un dienvidpolā nav definētas. Garāko paralēli $\varphi = 0^\circ$ sauc par Zemes elipsoīda ekvatoru.

Zemes elipsoīda ģeometriskos parametrus iedala divās klasēs:

- dotie parametri (seko no **gds**);
- aprēķinātie parametri.

Zemes elipsoīda dotie ģeometriskie parametri:

a - elipsoīda lielās pusass garums (s.a. elipsoīda ekvatoriālais rādiuss); (1.2.)

f - elipsoīda polārais saplakums, (no angļu vārda "flattening"). (1.3.)

Dotie ģeometriskie parametri ir nepieciešami un arī pietiekami lai uzrakstītu Zemes elipsoīda vienādojumu un tādējādi definētu to matemātiski.

Piezīme. Elipsoīds ir rotācijas virsma. Nelietot frāzi "elipsoīda virsma"!

Zemes elipsoīda aprēķinātie ģeometriskie parametri:

$b = a \cdot (1 - f)$ -elipsoīda mazās pusass garums; (1.4.)

$c = a^2 / b$ -elipsoīda polārais liekuma rādiuss; (1.5.)

$ep = \sqrt{a^2 - b^2}$ -elipsoīda lineārā ekscentritāte; (1.6.)

$e = ep / a$ -elipsoīda 1.ekscentritāte (s.a. primārā ekscentritāte); (1.7.)

$e' = ep / b$ -elipsoīda 2.ekscentritāte (s.a. sekundārā ekscentritāte); (1.8.)

Piezīmes:

- $\sqrt{x}$ -kvadrātsakne no x;
- $\sqrt{x}$ -x kvadrātā (t.i. $x \cdot x$);
- (sk. datorvalodas Object Pascal sintaksi)

Sakarības starp Zemes elipsoīda ģeometriskiem parametriem.

1.Lielās pusass garums

$$a = c \cdot \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.9.)$$

$$a = c / \sqrt{1 + \sqrt{e'}}; \quad (1.10.)$$

2. Polārais saplakums

$$f = (a - b) / a; \quad (1.11.)$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.12.)$$

$$f = 1 - 1 / \sqrt{1 + \sqrt{e'}}; \quad (1.13.)$$

3. Mazās pusass garums

$$b = a \cdot (1 - f); \quad (1.14.)$$

$$b = a^2 / c; \quad (1.15.)$$

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.16.)$$

$$b = c \cdot (1 - e^2); \quad (1.17.)$$

$$b = c / (1 + \sqrt{e'}); \quad (1.18.)$$

4. Polārais liekuma rādiuss

$$c = a^2 / b; \quad (1.19.)$$

$$c = a / (1 - f); \quad (1.20.)$$

$$c = a / \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.21.)$$

$$c = b / (1 - e^2); \quad (1.22.)$$

$$c = a \cdot \sqrt{1 + \sqrt{e'}}; \quad (1.23.)$$

$$c = b \cdot (1 + \sqrt{e'}); \quad (1.24.)$$

$$\text{sk. arī } N = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}, \text{ ja } \varphi_2 = 90^\circ, \quad (1.25.)$$

kur

$$\varphi_2 - \text{punkta elipsoidālais platums no } \underline{ce_2} = (\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2}, \underline{h_2})^T \text{ [Lk02]}$$

5. Lineārā ekscentritāte

$$\underline{ep} = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (1.26.)$$

6. Primārās ekscentritātes kvadrāts

$$e^2 = \sqrt{\underline{ep} / a}; \quad (1.27.)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2; \quad (1.28.)$$

$$e^2 = 2 \cdot f - f^2; \quad (1.29.)$$

$$e^2 = \sqrt{e'} / (1 + \sqrt{e'}); \quad (1.30.)$$

7. Sekundārās ekscentritātes kvadrāts

$$\sqrt{e'} = \sqrt{\underline{ep} / b}; \quad (1.31.)$$

$$\sqrt{e'} = (a^2 - b^2) / b^2; \quad (1.32.)$$

$$\sqrt{e'} = (2 \cdot f - f^2) / (1 - f)^2; \quad (1.33.)$$

$$\sqrt{e'} = (2 - f) \cdot / (1 - f)^2 \text{ [Borre 90,30]} \quad (1.34.)$$

$$\sqrt{e'} = e^2 / (1 - e^2); \quad (1.35.)$$

Piezīme: [Borre 90] lieto tikai $\sqrt{e'}$

8. Pusasu garumu attiecība

$$b / a = 1 - f; \quad (1.36.)$$

$$b / a = \sqrt{1 - e^2}; \quad (1.37.)$$

$$b / a = e / e'; \quad (1.38.)$$

$$b / a = 1 / \sqrt{1 + \sqrt{e'}}; \quad (1.39.)$$

9. Citas sakarības

$$a^2 / b = c \text{ (sk.4.lekc.(?))} \quad ($$

1.40.)

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Vēlams iegaumēt sekojošas tuvinas parametru vērtības un sakarības:

$$a \approx 6400 \text{ km} \quad (1.41.)$$

$$f \approx 1 / 300 \text{ vai arī } f \approx 0.003 \quad (1.42.)$$

$$(a - b) \approx 21 \text{ km} \quad (1.43.)$$

$$e^2 \approx 1 / 150 \quad (1.44.)$$

$$e^2 \approx \sqrt{e'} \approx 2 \cdot f; \quad (1.45.)$$

Literatūra: [Heck 95,3.1], [Torge 75,62], [HdV,Bd.4,§5], [Зданович 70,45,izvedumi!],
[Frolova 99,9].

2.Zemes elipsoīda meridiāna parametriskie vienādojumi

Rotācijas elipsoīda vienādojums

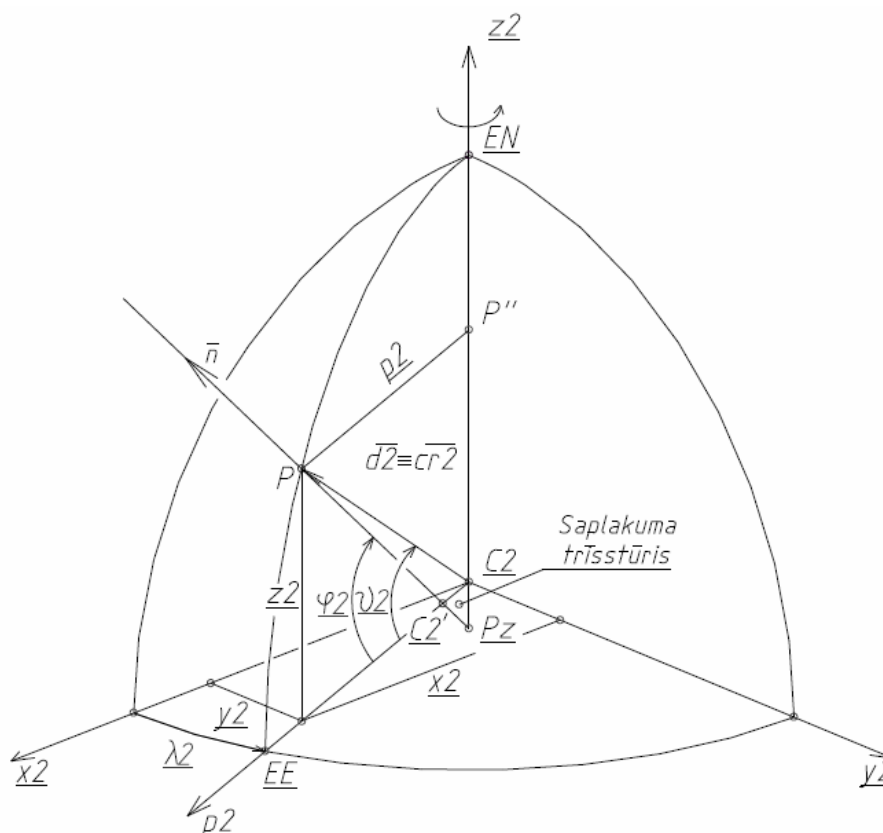
$$(\underline{x}^2/a)^2 + (\underline{y}^2/a)^2 + (\underline{z}^2/b)^2 = 1, \quad (2.1)$$

kur

a,b - Zemes elipsoīda pusasu garumi no **gds** ; [1.lekcija]

$$\mathbf{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$$
 - punkta kvaziġeocentriskās taisnleņķa koordinātas;

(.)^T - matricas - rindas transponēšanas zīme; transponēta matrica –rinda ir jāuztver kā matrica – kolonna.



4.zīm. Rotācijas elipsoīda astotā daļa (oktants)

Taisnleņķa koordinātas paralēles plaknē

$$\underline{x}_2 = \underline{p}_2 \cdot \cos \lambda_2 ; \quad (2.2)$$

$$\underline{y_2} = \underline{p_2} \cdot \sin \lambda_2, \quad (2.3)$$

kur

p2 - paralēles rādiuss;

λ_2 – meridiāna elipsoidālais garums no intervāla $[0^\circ; 360^\circ]$;

$$\mathbf{ce2} = (\lambda 2, \varphi 2, h 2)^T$$
 - punkta kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$$\mathbf{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$$
 - punkta kvaziġeocentriskās taisnlenķa koordinātas.

Liekot x_2 un y_2 no (2.2) un (2.3) elipsoīda vienādojumā (2.1), seko

$$((\underline{p}_2^2 \cdot \cos^2 \underline{\lambda}_2 + \underline{p}_2^2 \cdot \sin^2 \underline{\lambda}_2) / a^2) + (\underline{z}_2 / b)^2 = 1 \quad (2.4)$$

$$\text{vai} \quad b^2 \cdot \underline{p}_2^2 + a^2 \cdot \underline{z}_2^2 = a^2 \cdot b^2; \quad (2.5)$$

[Heck 95, 3.9.], [HdV IV, 40]

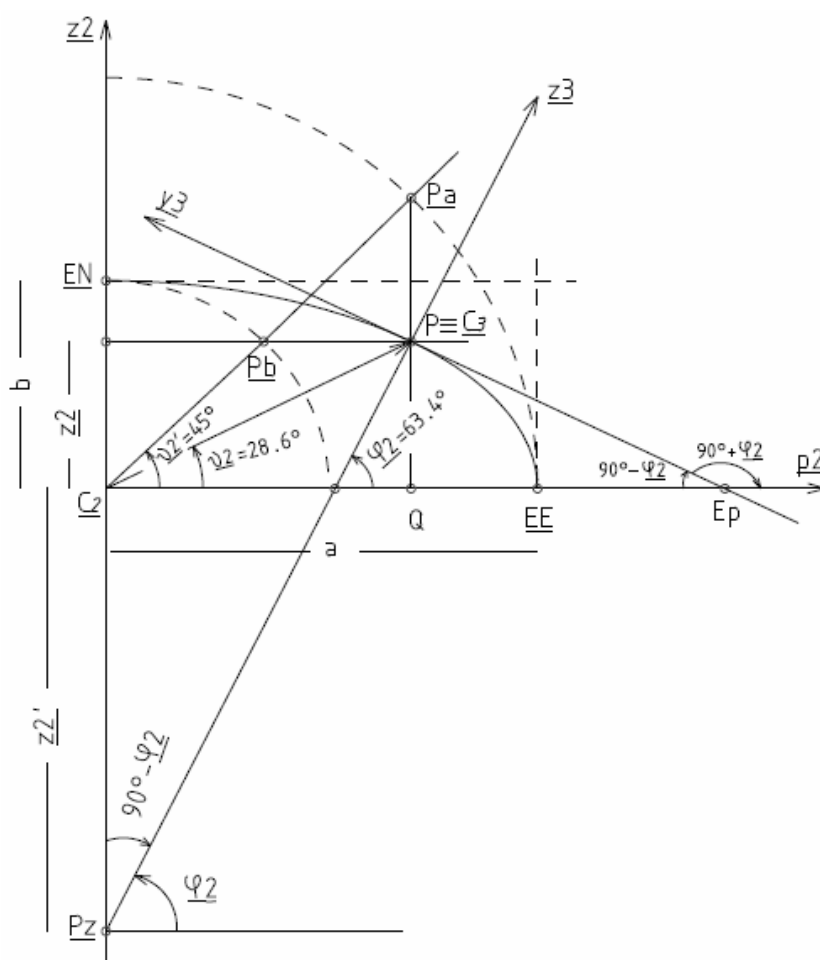
Izteiksmes (2.5) kreiso un labo pusi dalot ar $(a^2 \cdot b^2)$, iegūst meridiāna kanonisko vienādojumu

$$(\underline{p}_2 / a)^2 + (\underline{z}_2 / b)^2 = 1, \quad (2.6)$$

kur

$\underline{p}_2, \underline{z}_2$ – meridiāna punkta koordinātas plaknes taisnleņķa koordinātu sistēmā $\underline{z}_2 \text{ } \underline{C}_2 \text{ } \underline{p}_2$.

Literatūra: [Kronbergs 1,79] [Heck 95, 3.9.], [HdV 58, IV, 40].



5. zīm. Zemes elipsoīda meridiāna parametriskie vienādojumi

Šeit:

$\underline{z}_2 \text{ } \underline{C}_2 \text{ } \underline{p}_2$ – Zemes elipsoīda meridiāna plaknes taisnleņķa koordinātu sistēma;

$\underline{C}_2$ – elipsoīda centrs (.s.a. kvaziģeocentrs);

$\underline{C}_2 \text{ } \underline{EE}$ – meridiāna plaknes un ekvatora šķēlums;

$\underline{EN}$ – elipsoīda ziemeļpols;

P – ģeodēziskā punkta attēls uz elipsoīda;

$\underline{EN} \text{ } P \text{ } \underline{EE}$ – punkta P meridiāna loks;

- $\underline{p2}, \underline{z2}$ – punkta P taisnleņķa koordinātas meridiāna plaknē;
 $\underline{p2}$ – elipsoīda punkta P attālums līdz rotācijas asij $\underline{C2} \underline{z2}$;
 $\underline{z2}$ – elipsoīda punkta P attālums līdz ekvatora plaknei $\underline{x2} \underline{C2} \underline{y2}$;
 $\underline{x2}, \underline{y2}$ – punkta P kvaziģeocentriskā abscisa un ordināta no $\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$
 $\underline{cr2}$ – punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
 $\underline{C2P}$ – punkta P rādiusvektors;
 $\underline{d2}$ – punkta P rādiusvektora $\underline{C2P}$ garums no $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$
 (s.a. kvaziģeocentriskā vektora garums);
 $\underline{cs2}$ – punkta P kvaziģeocentriskās sfēriskās koordinātas;
 $\underline{EN} \underline{Pb}$ – ap centru $\underline{C2}$ vilktas riņķa līnijas loks ar rādiusu b;
 $\underline{Pa} \underline{EE}$ – ap centru $\underline{C2}$ vilktas riņķa līnijas loks ar rādiusu a;
 $\underline{v2}'$ – punkta P reducētais (s.a. pievestais) platums;
 $\underline{v2}$ – punkta P [kvazi] ģeocentriskais platums no $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$;
 $\underline{\phi2}$ – punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) platums no $\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\phi2}, \underline{h2})^T$
 $\underline{ce2}$ – punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
 $\underline{P} \underline{Ep}$ – elipsoīda pieskare punktā P;
 $\underline{P} \underline{Pz}$ – elipsoīda normāle punktā P;

2.2. zīmējuma konstruēšanas kārtība:

- iezīmē attēla kreisā pusē pret vidu koordinātu sākuma punktu, kas ņemts elipsoīda ģeometriskā centrā $\underline{C2}$;
- uzzīmē taisnleņķa koordinātu sistēmas $\underline{z2} \underline{C2} \underline{p2}$ asis:
 - abscisu asi $\underline{C2} \underline{z2}$ no attēla $\underline{DR}$ stūra uz augšu;
 - ordinātu pusasi $\underline{C2} \underline{p2}$ pa labi no koordinātu sākuma punkta $\underline{C2}$;
- ap $\underline{C2}$ kā centru velk divas koncentriskas riņķa līnijas ar rādiusiem $r = a$ un $r = b$, kur $a > b$;
- uzskatāmības dēļ rādiusu starpību izvēlas pietiekami lielu, piemēram, $a \approx 2 \cdot b$;
- iezīmē mazās riņķa līnijas un abscisu pusass $\underline{C2} \underline{z2}$ krustpunktu $\underline{EN}$ (Ellipsoid Nord);
- iezīmē lielās riņķa līnijas un ordinātu pusass $\underline{C2} \underline{p2}$ krustpunktu $\underline{EE}$ (Ellipsoid Equator);
- no punkta $\underline{C2}$ zem apmēram 45° leņķa velk staru un iezīmē tā krustpunktus $\underline{Pa}$ un $\underline{Pb}$ ar riņķa līnijām $r = a$ un $r = b$;
- iezīmē leņķi $\underline{v2}' \approx 45^\circ$ no ordinātu pusass $\underline{C2} \underline{p2}$ līdz staram $\underline{C2} \underline{Pa}$;
- caur punktu $\underline{Pa}$ velk abscisu pusasij $\underline{C2} \underline{z2}$ paralēlu līniju un iezīmē tās krustpunktu Q ar ordinātu asi $\underline{C2} \underline{p2}$;
- caur punktu $\underline{Pb}$ velk ordinātu pusasij $\underline{C2} \underline{p2}$ paralēlu līniju un iezīmē tās krustpunktu P ar nogriezni $\underline{Pa} \underline{Q}$;
- var pierādīt, ka punkts P pieder meridiāna elipsei (2.6.) [Mat.tehn.79];
- iezīmē staru $\underline{C2} \underline{P}$;
- iezīmē leņķi $\underline{v2}$ no ordinātu pusass $\underline{C2} \underline{p2}$ līdz staram $\underline{C2} \underline{P}$;
- aprēķina punkta P abscisu $\underline{z2} = b \cdot \sin \underline{v2}'$ taisnleņķa koordinātu sistēmā $\underline{z2} \underline{C2} \underline{p2}$;
- aprēķina punkta P ordinātu $\underline{p2} = a \cdot \cos \underline{v2}'$ taisnleņķa koordinātu sistēmā $\underline{z2} \underline{C2} \underline{p2}$;
- aprēķina punkta P elipsoidālo platumu $\underline{\phi2} = \tan^{-1} ((a/b) \cdot \tan \underline{v2}')$;
- aprēķina palīgpunkta $\underline{Pz}$ abscisu $\underline{z2}' = \underline{z2} - (\underline{p2} / \tan (90^\circ - \underline{\phi2}))$;
- iezīmē palīgpunktu $\underline{Pz}$ pēc tā negatīvās abscisas $\underline{z2}'$;
- iezīmē staru $\underline{Pz} \underline{P}$;
- stars $\underline{Pz} \underline{P}$ ir meridiāna elipses normāle punktā P;
- iezīmē leņķi $\underline{\phi2}$ no ordinātu pusass $\underline{C2} \underline{p2}$ līdz normālei $\underline{Pz} \underline{P}$;
- izvēlas punktu P kā vietējās ģeodēziskās koordinātu telpas $\underline{x3} \underline{C3} \underline{y3}, \underline{x3} \underline{C3} \underline{z3}$ sākuma punktu;
- iezīmē taisni $((P \equiv \underline{C3}) \underline{x3})$ perpendikulāri normālei $\underline{Pz} \underline{P}$;
- stars $\underline{C3} \underline{x3}$ virzienā uz $\underline{EN}$ ir vietējās ģeodēziskās koordinātu telpas abscisu pusass;
- taisne $\underline{C3} \underline{x3}$ ir meridiāna elipses pieskare punktā $P \equiv \underline{C3}$;
- iezīmē pieskares $\underline{C3} \underline{x3}$ un ordinātu pusass $\underline{C2} \underline{p2}$ krustpunktu $\underline{Ep}$;

- izvelk meridiāna elipses loku EN P EE.

Abscisas z2' aprēķina piemērs:

$$a = 80;$$

$$b = 40;$$

$$v2' = 45^\circ;$$

$$z2 = b \cdot \sin v2' = 40 \cdot \sin 45^\circ = 40 \cdot \sqrt{2} / 2 = 28;$$

$$p2 = a \cdot \cos v2' = 80 \cdot \cos 45^\circ = 80 \cdot \sqrt{2} / 2 = 56;$$

$$\varphi2 = \tan^{-1} ((a / b) \cdot \tan v2') = \tan^{-1} ((80 / 40) \cdot \tan 45^\circ) = \tan^{-1} (2) = 63.4^\circ;$$

$$z2' = z2 - (p2 / \tan (90^\circ - \varphi2)) = 28 - (56 / \tan (90^\circ - 63.4^\circ)) = 28 - (56 / 0.5) = -84;$$

Meridiāna parametriskie vienādojumi

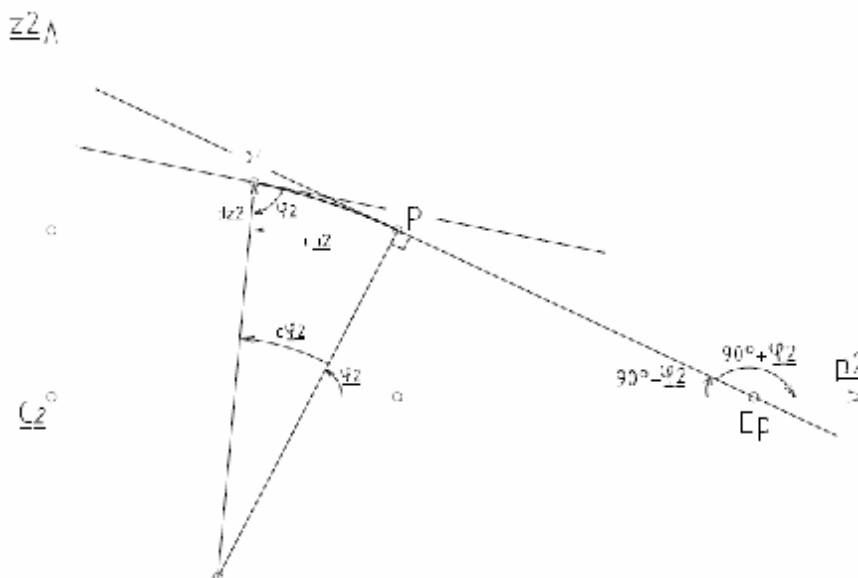
$$p2 = p2(t); \quad (2.7)$$

$$z2 = z2(t); \quad (2.8)$$

Šeit t ir parametrs (s.a. laiks) [Cīrulis 90,28], [Kronbergs 1,336]

Meridiāna pieskarei punktā P virziena koeficients ir

$$(dz2 / dp2) = \tan (\pi / 2 + \varphi2) = -\cot \varphi2 \quad [HdV IV, 39] \quad (2.9)$$



6. zīm. Zemes elipsoīda meridiāna loka pieaugums

Meridiāna punkta P elipsoidālam platumam $\varphi2$ dod bezgalīgi mazu pieaugumu $d\varphi2$ un iegūst meridiāna punktu P'.

Leņķis punktā P' ir $\varphi2$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām (sk. 2.2.zīm.).

$$\text{Seko } (dz2 / dp2) = -\cot \varphi2;$$

[Mikhail 95,1925], [Гельмерт 62,33], [Balodis Kart.,15], [HdV IV, 40]

Meridiāna kanoniskais vienādojums (2.5)

$$F(p2, z2) = b^2 \cdot p2^2 + a^2 \cdot z2^2 - a^2 \cdot b^2 = 0 \quad (2.10)$$

ir apslēpta funkcija no $p2, z2$. [Kronbergs 1, 184,264].

Tās atvasinājums

$$(dz2 / dp2) = -(\partial F / \partial p2) / (\partial F / \partial z2) =$$

$$\begin{aligned} & - (b^2 \cdot 2 \cdot p_2) / (a^2 \cdot 2 \cdot z_2) = \\ & - (b^2 / a^2) \cdot (p_2 / z_2). \text{ [Buiķis 97,112], [Бермант 66,401]} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Piezīme. Šī kārtība ir derīga tikai viena mainīgā apslēptai funkcijai.

Pielīdzinot izteiksmju (2.9) un (2.11) labās puses, iegūst vienādojumu

$$(\cos \varphi_2 / \sin \varphi_2) = - (b^2 / a^2) \cdot (p_2 / z_2)$$

vai

$$b^2 \cdot p_2 \cdot \sin \varphi_2 = a^2 \cdot z_2 \cdot \cos \varphi_2; \quad (2.12)$$

Seko vienādojums

$$b^2 \cdot p_2 \cdot \sin \varphi_2 - a^2 \cdot z_2 \cdot \cos \varphi_2 = 0; \quad (2.13)$$

Izteiksmes (2.12) abas puses ceļ kvadrātā un apvieno sistēmā ar vienādojumu (2.5):

$$\begin{aligned} b^4 \cdot p_2^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 - a^4 \cdot z_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 &= 0; \\ b^2 \cdot p_2^2 + a^2 \cdot z_2^2 &= a^2 \cdot b^2; \end{aligned}$$

Sistēmas risinājums:

1. No sistēmas otrā vienādojuma atrod, ka

$$z_2^2 = b^2 - p_2^2 / (a^2 / b^2); \quad (2.14)$$

$$p_2^2 = a^2 - z_2^2 \cdot (a^2 / b^2); \quad (2.15)$$

Piezīme. No (1.39) seko, ka elipsoīda pusasu attiecība $a / b = \sqrt{1 + \sqrt{e'}}$.

Tādēļ $(a^2 / b^2) = 1 + \sqrt{e'}$, kur e' –elipsoīda sekundārā ekscentritāte.

2. Ievieto z_2^2 un p_2^2 izteiksmes (2.14) un (2.15) sistēmas pirmā vienādojumā. Iegūst, ka attālums līdz elipsoīda rotācijas asij ir

$$p_2 = a^2 \cdot \cos \varphi_2 / \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + b^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} \quad (2.16)$$

un attālums līdz elipsoīda ekvatora plaknei ir

$$\begin{aligned} z_2 &= b^2 \cdot \sin \varphi_2 / \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + b^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} \\ &[\text{HdV IV 58,40}]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. No (1.16.) izteiksmes $b = a \cdot \sqrt{1 - e^2}$ seko $b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2)$. (2.18)

Liekot (2.18) izteiksmē

$$\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + b^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}, \text{ iegūst}$$

$$\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + b^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} = a \cdot W(\varphi_2), \quad (2.19)$$

kur

$$W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} \quad (2.20)$$

sauc par elipsoidālā platuma **1.sferoidisko funkciju**.

4. Ar (2.20) izteiksmes (2.16) un (2.17) saīsinās līdz

$$p_2 = a \cdot \cos \varphi_2 / W(\varphi_2) \quad (2.21)$$

$$z_2 = b \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \varphi_2 / W(\varphi_2) \quad (2.22)$$

[HdV IV 58,40].

Izteiksmi (2.22) var uzrakstīt arī kā

$$z_2 = a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi_2 / W(\varphi_2) \quad (2.22)$$

[HdV IV 58,40]

5. Iespējams arī (2.16) un (2.17) izteikt kā

$$\underline{p2} = c \cdot \underline{\cos \varphi2} / V(\varphi2) \quad (2.23)$$

$$\underline{z2} = c \cdot \underline{\sin \varphi2} / ((1 + \underline{\text{sqr}}(e')) \cdot V(\varphi2)) \quad (2.24)$$

kur

c – elipsoīda polārais liekuma rādiuss (1.19) – (1.24)

un

$$V(\varphi2) = \text{sqr} (1 + \underline{\text{sqr}}(e') \cdot \underline{\cos^2 \varphi2}) \quad (2.25)$$

sauc par elipsoidālā platuma **2.sferoidisko funkciju**.

[Heck 95,67], [HdV IV 58,41]

6. Ievedot ar elipsoīda sekundāro ekscentritāti (1.31) – (1.35) saistītu elipsoidālā platuma funkciju (s.a. **eta funkciju**)

$$\underline{\text{eta } \varphi2} = e' \cdot \underline{\cos \varphi2}, \quad (2.26)$$

elipsoidālā platuma 2.sferoidisko funkciju raksta arī šādi

$$V(\varphi2) = \text{sqr} (1 + \underline{\text{eta}^2 \varphi2}) \quad (2.27)$$

7. Sferoidisko funkciju attiecība seko no izteiksmēm (2.21), (2.22), (2.23), (2.24)

$$\begin{aligned} V(\varphi2) / W(\varphi2) &= \\ &= c / a \end{aligned} \quad (2.28)$$

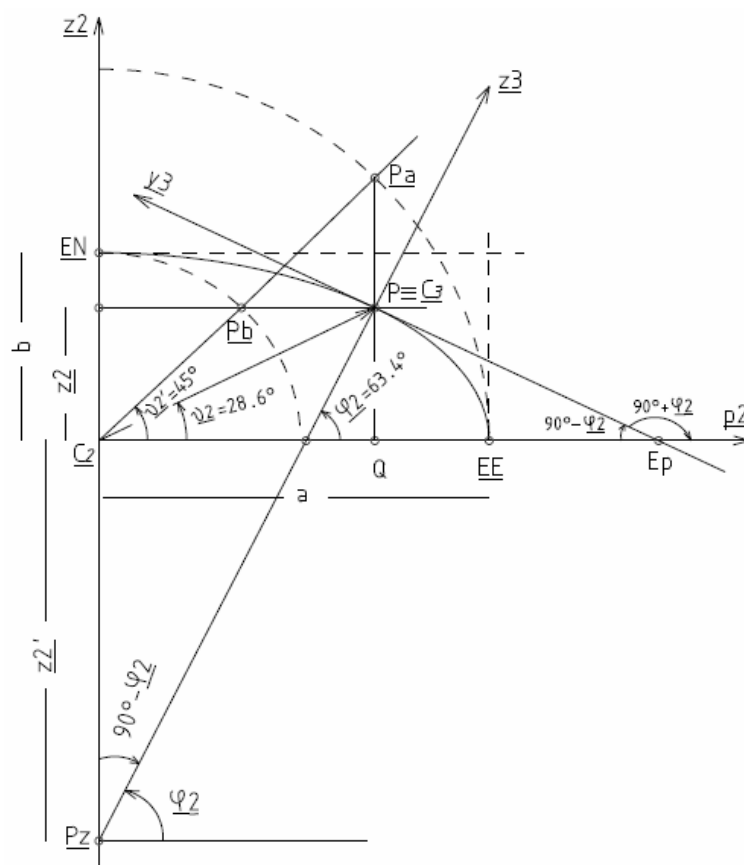
$$= a / b \quad (2.29)$$

$$= \text{sqr} (1 + \underline{\text{sqr}}(e')) \quad (2.30)$$

$$= 1 / \text{sqr} (1 - e^2) \quad (2.31)$$

3. Ģeogrāfiskais, reducētais un ģeocentriskais platums

Vēlreiz aplūkosim Zemes elipsoīda meridiāna parametriskos vienādojumus [Lk 02]. Redzams, ka ģeodēzisko uzdevumu risināšanai uz Zemes elipsoīda jālieto vairāki platumi. Ērtības dēļ 2.2. zīm. [Lk02] pārnesīsim šeit kā 3.1.zīm. un pievērsīsimies platumu savstarpējām sakarībām.



7. zīm. Zemes elipsoīda punkta platumi
(lai parādītu platumu starpības pieņemts, ka $a / b = 2$)

Zīmējuma konstruēšanas kārtība un tā elementu skaidrojumi nemainās [Lk02]. Šeit sniegsim sekojošas platumu definīcijas:

φ_2 – punkta P **elipsoidālais** (s.a. ģeodēziskais, ģeogrāfiskais) **platums** ir leņķis starp elipsoidāla normāli $P \underline{Pz}$ punktā P un elipsoīda ekvatora plakni $\underline{x2} \underline{C2} \underline{y2}$;
 φ_2 ir no intervāla $]-\pi / 2; +\pi / 2[$ vai $]-90^\circ; +90^\circ[$;
 φ_2 ir punkta P kvaziģeocentrisko elipsoidālo koordinātu $\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2})^T$ otrais elements [Heck 95,42].

φ_2' - punkta P **reducētais** (s.a. pievestais) **platums** ir leņķis, ko veido stars $\underline{C2} \underline{Pa}$ ar elipsoīda ekvatora plakni $\underline{x2} \underline{C2} \underline{y2}$; stars $\underline{C2} \underline{Pa}$ ir vilkts no elipsoīda centra $\underline{C2}$ caur palīgpunktu $\underline{Pa}$; palīgpunkts ir riņķa līnijas, kas vilkta ap centru $\underline{C2}$ ar rādiusu a, un taisnes, kas vilkta caur punktu P paralēli aplikātu asij $\underline{C2} \underline{z2}$, krustpunkts. Šeit a ir elipsoīda lielās pusass garums.

φ_2 - punkta P [kvazi] **ģeocentriskais platums** ir leņķis, ko veido stars $\underline{C2} P$ ar elipsoīda ekvatora plakni $\underline{x2} \underline{C2} \underline{y2}$; stars $\underline{C2} P$ ir vilkts no elipsoīda centra $\underline{C2}$ caur elipsoīda punktu P;
 φ_2 ir punkta P kvaziģeocentrisko sfērisko koordinātu $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{\varphi2}, \underline{d2})^T$ otrais elements.

Sakarības starp aplūkotajiem platumiem iegūst no sekojošiem elipsoīda meridiāna parametriskajiem vienādojumiem :

$$\underline{p2} = a \cdot \cos \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2}) \quad (3.1)$$

$$\underline{z2} = b \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2}) \quad (3.2)$$

[sk. arī (2.21) un (2.22)]

$$\underline{p2} = a \cdot \cos \underline{v2}' \quad (3.3)$$

$$\underline{z2} = b \cdot \sin \underline{v2}' \quad (3.4)$$

$$\underline{p2} = \underline{d2} \cdot \cos \underline{v2} \quad (3.5)$$

$$\underline{z2} = \underline{d2} \cdot \sin \underline{v2} \quad (3.6)$$

Šeit:

a, b – elipsoīda pusasu garumi [Lk01];

e, e' – elipsoīda 1. un 2.ekscentricitāte [Lk01] ;

W($\underline{\varphi2}$) - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija
[sk. arī (2.20)]

$\underline{d2}$ – attālums no punkta P līdz elipsoīda centram; $\underline{d2}$ ir nogriežņa $\underline{C2}$ P garums; $\underline{d2}$ ir punkta P kvaziģeocentrisko sfērisko koordinātu $\underline{cs2} = (\underline{\varphi2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$ trešais elements.

Ievērojot, ka elipsoīda pusasu garumu attiecība ir

$$(b / a) = \sqrt{1 - e^2} \quad (3.8)$$

[sk. arī 2.37] ,

izteiksmes (3.1) un (3.2) raksta arī šādi

$$\underline{p2} = a \cdot \cos \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2}) \quad (3.9)$$

$$\underline{z2} = (b^2 / a) \cdot \sin \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2}) \quad (3.10)$$

[sk. arī 2.21 un 2.22]

Dala meridiāna $\underline{\lambda2}$ aplikātas $\underline{z2}$ izteiksmes kreiso un labo pusi ar ordinātas $\underline{z2}$ izteiksmes kreiso un labo pusi. Rezultāts ir sekojošas koordinātu attiecības

$$(3.10) \text{ “/” } (3.9) \rightarrow \underline{z2} / \underline{p2} = ((b^2 / a) \cdot \sin \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2})) / (a \cdot \cos \underline{\varphi2} / W(\underline{\varphi2})) = (b / a)^2 \cdot \tan \underline{\varphi2} \quad (3.11)$$

$$(3.4) \text{ “/” } (3.3) \rightarrow \underline{z2} / \underline{p2} = (b \cdot \sin \underline{v2}') / (a \cdot \cos \underline{v2}') = (b / a) \cdot \tan \underline{v2}' \quad (3.12)$$

$$(3.5) \text{ “/” } (3.6) \rightarrow \underline{z2} / \underline{p2} = (\underline{d2} \cdot \cos \underline{v2}) / (\underline{d2} \cdot \sin \underline{v2}) = \tan \underline{v2} \quad (3.13)$$

Secīgi pielīdzina izteiksmju (3.11), (3.12) un (3.13) labās puses. Tādējādi iegūst elipsoīda punkta P aplūkoto platumu tangensa funkciju savstarpējās tiešās sakarības:

$$(3.12) \text{ un } (3.11) \rightarrow \tan \underline{v2}' = (b / a) \cdot \tan \underline{\varphi2} \quad (3.14)$$

$$(3.13) \text{ un } (3.11) \rightarrow \tan \varphi_2 = (b/a)^2 \cdot \tan \varphi_2' \quad (3.15)$$

$$(3.13) \text{ un } (3.12) \rightarrow \tan \varphi_2 = (b/a) \cdot \tan \varphi_2' \quad (3.16)$$

[Torge 75, 65], [Heck 95,70]

Elipsoīda punkta P platumu tangensa funkciju tiešām sakarībām (3.14), (3.15) un (3.16) atbilst **pretējās** (s.a.inversās) sakarības:

$$(3.14) \rightarrow \tan \varphi_2 = (a/b) \cdot \tan \varphi_2' \quad (3.17)$$

$$(3.15) \rightarrow \tan \varphi_2 = (a/b)^2 \cdot \tan \varphi_2' \quad (3.18)$$

$$(3.16) \rightarrow \tan \varphi_2' = (a/b) \cdot \tan \varphi_2 \quad (3.19)$$

Izteiksmes (3.14), ..., (3.19) ir uzrakstītas kā sakarības starp platumu tangensu funkcijām.

Saprotams, ka platumu aprēķināšanai jālieto arktangensa funkcija, piemēram, no izteiksmes (3.14) iegūst, ka

$$\varphi_2' = \tan^{-1}((b/a) \cdot \tan \varphi_2) \quad (3.20)$$

Piezīmes.

- Funkciju " $\tan^{-1}()$ " raksta arī kā " $\arctg()$ " vai " $\arctan()$ ".
- No elipsoīda 1.ekcentritātes pamatzteiksmes $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ [sk. arī (1.28)] iegūst sekojošu pārveidojumu

$$\begin{aligned} \rightarrow e^2 \cdot a^2 &= a^2 - b^2 \\ \rightarrow b^2 &= a^2 - e^2 \cdot a^2 \\ \rightarrow b^2 &= a^2 \cdot (1 - e^2) \\ \rightarrow b &= a \cdot \sqrt{1 - e^2} \end{aligned}$$
 un elipsoīda pusasu attiecības kā 1.ekcentritātes funkcijas

$$(b/a) = \sqrt{1 - e^2} \quad (3.21)$$
 un

$$(a/b) = 1 / \sqrt{1 - e^2} \quad (3.22)$$
- No elipsoīda 2.ekcentritātes pamatzteiksmes $\sqrt{e'} = (a^2 - b^2) / b^2$ [sk. arī (1.32)] iegūst sekojošu pārveidojumu

$$\begin{aligned} \rightarrow \sqrt{e'} \cdot b^2 &= a^2 - b^2 \\ \rightarrow a^2 &= b^2 + \sqrt{e'} \cdot b^2 \\ \rightarrow a^2 &= b^2 \cdot (1 + \sqrt{e'}) \\ \rightarrow a &= b \cdot \sqrt{1 + \sqrt{e'}} \end{aligned}$$

un elipsoīda pusasu attiecības kā 2.ekcentritātes funkcijas

$$(a/b) = \sqrt{1 + \sqrt{e'}} \quad (3.23)$$

un

$$(b/a) = 1 / \sqrt{1 + \sqrt{e'}} \quad (3.24)$$

Punkta P **elipsoidālā un reducētā platuma starpības** tangensa funkciju iegūst kā pārveidojumu [Выгодский 54,353], [Heck 95,71]

$$\begin{aligned} \tan(\varphi_2 - \varphi_2') &= (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_2') / (1 + \tan \varphi_2 \cdot \tan \varphi_2') = \leftarrow [\text{sk. (3.14)}] \\ &= (\tan \varphi_2 - (b/a) \cdot \tan \varphi_2) / (1 + \tan \varphi_2 \cdot (b/a) \cdot \tan \varphi_2) = \\ &= (\tan \varphi_2 \cdot (1 - (b/a)) / (1 + (b/a) \cdot \tan^2 \varphi_2) = \end{aligned}$$

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

$$\begin{aligned}
 &= (\tan \varphi_2 \cdot ((a-b)/a)) / (1 + (b/a) \cdot \tan^2 \varphi_2) = \\
 &= (\tan \varphi_2 \cdot f) / (1 + (b/a) \cdot \tan^2 \varphi_2), \quad (3.25) \\
 \text{kur } f &= (a-b)/a - \text{elipsoīda polārais saplakums [sk. (1.11)]} \\
 (b/a) &= \sqrt{1 - e^2} \text{ [sk. (3.21)]}
 \end{aligned}$$

Punkta P **elipsoidālā un kvaziģeocentriskā platuma starpības** tangensa funkciju iegūst kā pārveidojumu

$$\begin{aligned}
 \tan (\varphi_2 - \varphi_2') &= (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_2') / (1 + \tan \varphi_2 \cdot \tan \varphi_2') = \leftarrow [\text{sk. (3.15) }] \\
 &= (\tan \varphi_2 - (b/a)^2 \cdot \tan \varphi_2) / (1 + \tan \varphi_2 \cdot (b/a)^2 \cdot \tan \varphi_2) = \\
 &= (\tan \varphi_2 \cdot (1 - (b/a)^2)) / (1 + (b/a)^2 \cdot \tan^2 \varphi_2) = \\
 &= (\tan \varphi_2 \cdot ((a^2 - b^2) / a^2)) / (1 + (b/a)^2 \cdot \tan^2 \varphi_2) = \\
 &= (\tan \varphi_2 \cdot e^2) / (1 + (b/a)^2 \cdot \tan^2 \varphi_2), \quad (3.26) \\
 \text{kur } e^2 &= (a^2 - b^2) / a^2 - \text{elipsoīda 1.ekscentritātes kvadrāts [sk. (1.28.)]} \\
 (b/a)^2 &= 1 - e^2 \text{ [sk. (3.21)]}
 \end{aligned}$$

Tātad elipsoidālā, reducētā un kvaziģeocentriskā platumu starpības ir sekojošas Zemes elipsoīda parametru a, b, f, e funkcijas

$$\varphi_2 - \varphi_2' = \tan^{-1} ((\tan \varphi_2 \cdot f) / (1 + (b/a) \cdot \tan^2 \varphi_2)) \quad (3.27)$$

$$\varphi_2 - \varphi_2 = \tan^{-1} ((\tan \varphi_2 \cdot e^2) / (1 + (b/a)^2 \cdot \tan^2 \varphi_2)) \quad (3.28)$$

Punktā P ar elipsoidālo platumu $\varphi_2 = 45^\circ$ izteiksmes (3.27) un (3.28) vienkāršojas līdz

$$\varphi_2 - \varphi_2' = \tan^{-1} (f / (1 + (b/a))) \quad (3.29)$$

$$\varphi_2 - \varphi_2 = \tan^{-1} (e^2 / (1 + (b/a)^2)) \quad (3.30)$$

Latvijas 1992.gada ģeodēziskās sistēmas (LGS-92) elipsoīdam GRS-80:

- lielās pusass garums $a = 6378137.000 \text{ m};$
 - polārais saplakums $f = 1/298.2572221010;$
 - 1.ekscentritātes kvadrāts $e^2 = 0.006694380022912.$
- [sk. Ld 01].

Bez tam

$$(b/a) = 1 - f; \text{ [sk. (1.36)]}$$

un

$$e^2 = 2 \cdot f - f^2; \text{ [sk. (1.29)].}$$

Līdz ar to elipsoīda GRS-80 punktam ar platumu $\varphi_2 = 45^\circ$ pēc (3.29) un (3.30) iegūst, ka

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 - \varphi_2' &= \tan^{-1} (f / (1 + (1 - f))) = \\
 &= \tan^{-1} (f / (2 - f)) = 346.3637'' = 0^\circ 05' 46.3637'' \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 - \varphi_2 &= \tan^{-1} ((2 \cdot f - f^2) / (1 + (1 - f)^2)) = \\
 &= \tan^{-1} ((2 \cdot f - f^2) / (2 - 2 \cdot f + f^2)) = 692.7263'' = 0^\circ 11' 32.7236'' \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

No izteiksmēm (3.31) un (3.32) atrod, ka norādītos apstākļos ir spēkā sakarība

$$(\varphi_2 - \varphi_2) = 1.999989 \cdot (\varphi_2 - \varphi_2') \quad (3.33)$$

Aplūkoto platumu starpību novērtējumam lieto arī vienkāršotas sakarības

$$(\varphi_2 - \varphi_2') \approx f \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \quad (3.34)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_2) \approx 2 \cdot f \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \quad (3.35)$$

[Heck 95,71]

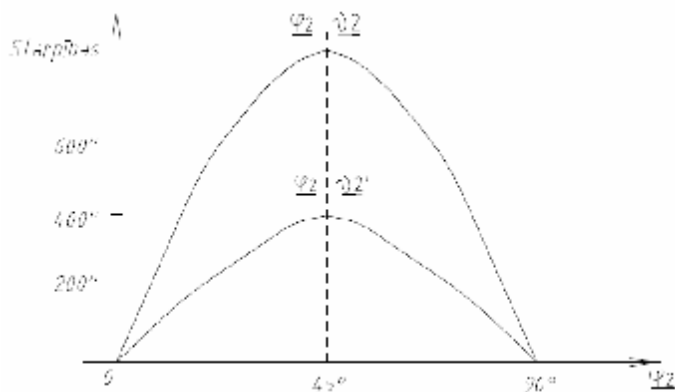
Tās rāda, ka punktiem ar platumiem φ_2 no $[0^\circ ; +90^\circ [$ t.i. uz ziemeļiem no ekvatora ir

$$\varphi_2 > \varphi_2' > \varphi_2 \quad (3.36)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_2) \approx 2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_2') \quad (3.37)$$

$$\max (\varphi_2 - \varphi_2'), \text{ ja } \varphi_2 \approx 45^\circ \quad (3.38)$$

$$\max (\varphi_2 - \varphi_2), \text{ ja } \varphi_2 \approx 45^\circ \quad (3.39)$$



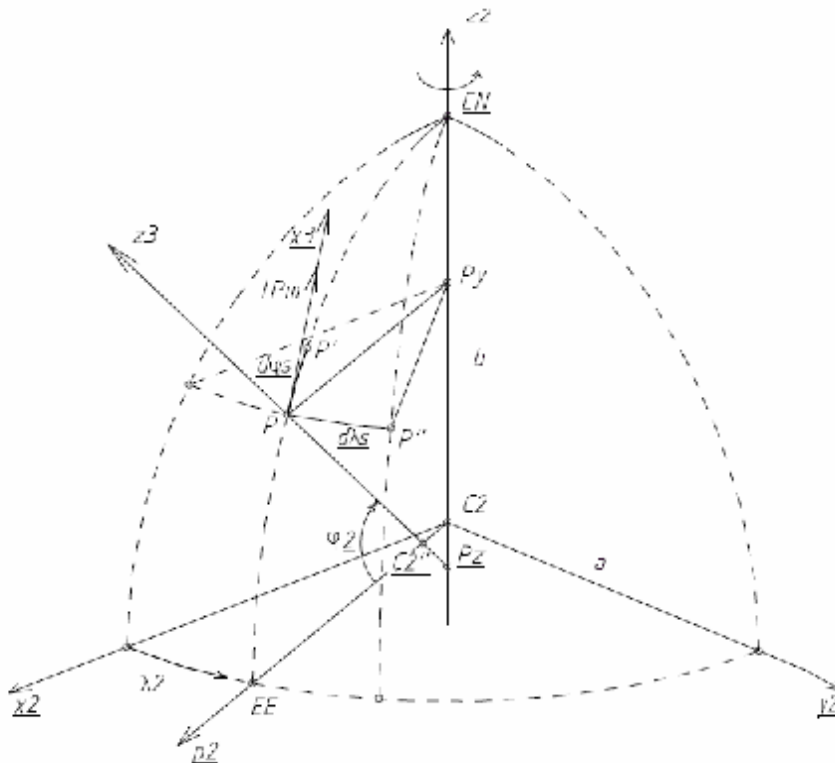
8. zīm. Zemes elipsoīda punktu platumu starpību grafika vispārīgais veids
(φ_2 ir no intervāla $[0^\circ ; +90^\circ [$)

Sfērai aplūkotās izteiksmēs jāliek $a = r$, $b = r$, $f = 0$ un $e = 0$, kur r ir elipsoīdam piekārtotas sfēras rādiuss (parasti 6370 km).

Piezīme. Elipsoīda vienkāršošana līdz sfērai palīdz kontrolēt un izprast sferoidiskās ģeodēzijas pamatsakarības.

4. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un galvenie liekumi.

Zemes elipsoīda normālšķēlumi un galvenie liekumi labi raksturo tā diferenciālģeometriskās īpašības [Cīrulis 90, 114], [Heck 95,167], [Морозов 79, 24]. Šo jēdzienu izpratne un lietošana paver iespēju sekmīgi risināt ģeodēziskos uzdevumus plašos ģeogrāfiskā apvalka apgabalos.



9. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un galvenie liekumi

Šeit:

a,b

C2 EN

$$\overline{C_2} \quad \overline{x_2} \quad \overline{y_2}$$

$\overline{P}$

C2 x2 y2 z2

$$\underline{\mathbf{cr2}} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$$
$$\underline{x_2}, \underline{y_2}, \underline{z_2}$$
$$\underline{\mathbf{ce2}} = (\underline{\lambda2}, \underline{\phi2}, \underline{h2})^T$$
$$\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2}, \underline{h_2}$$
P P_Z

C2

C2'

—
EN

EE

EG

EN C2 P

- Zemes elipsoīda pusasu garumi no ģeodēziskās sistēmas **gds** ;
 - elipsoīda rotācijas ass;
 - elipsoīda ekvatora plakne;
 - elipsoīda punkts ziemeļu puslodē;
 - elipsoīda [kvaziģeocentriskā] taisnleņķa koordinātu sistēma;
 - punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas.
 - punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no **cr2**;
 - punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
 - punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no **ce2** (punktam P elipsoidālais augstums $\underline{h_2} = 0$);
 - elipsoīda normāle punktā P;
 - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
 - normāles P **Pz** un ekvatora plaknes šķēlums;
 - elipsoīda ziemeļpols;
-
- elipsoīda ekvatora punkts;
 - elipsoīda sākuma (Greenwich) meridiāna punkts;
 - punkta P meridiāna plakne;

$\underline{EG} \ P \ \underline{Py}$	- punkta P paralēles plakne;
$\underline{EN} \ P \ \underline{EE}$	- punkta P meridiāna loks;
$\underline{EG} \ P$	- punkta P paralēles loks;
$\underline{d\lambda_s}$	- punkta P paralēles loka elements;
$\underline{d\varphi_s}$	- punkta P meridiāna loka elements;
$\underline{tP}$	- elipsoīda līnijas pieskares vienības vektors punktā P;
$\underline{tPm}$	- elipsoīda meridiāna pieskares vienības vektors punktā P;
$\underline{d\lambda_s} \ \underline{Py}$	- punkta P paralēles plakne (plaknes $\underline{d\lambda_s} \ \underline{Py}$ un $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2}$ ir paralēlas);
$\underline{d\varphi_s} \ \underline{Pz}$	- punkta P meridiāna plakne ($\underline{EE} \ P \ \underline{EN}$ vai $\underline{EN} \ \underline{C2} \ P$);
$\underline{cs3} = (\underline{\alpha3}, \underline{v3}, \underline{d3})^T$	- punkta P_2 sfēriskās koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā;
P_2	- no punkta $P_1 = P$ atšķirīgs elipsoīda punkts ($\underline{not} \ (\underline{cr2}_2 = \underline{cr2}_1)$);

Šeit un turpmāk, noklusējot stāvpunktu (s.a. topocentru) P_1 , ir pieņemts, ka punkta P_2 sfēriskās koordinātas $\underline{cs3}$ ir jālasa kā

$$\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T, \text{ kur}$$

$\underline{\alpha3}_{12}$ - ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{v3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{d3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Ģeodēziskais (s.a. elipsoidālais) **azimuts** $\underline{\alpha3} = \underline{\alpha3}_{12}$ no punkta $P = P_1$ uz punktu P_2 ir divplakņu kakta leņķis [Mat.teh.3, 79,201] punktā P_1 , kura šķautne ir elipsoīda normāle $P \ \underline{Pz}$, kreisā skaldne - punkta P meridiāna pusplakne $P \ \underline{Pz} \ \underline{EN}$, bet labā –pusplakne $P \ \underline{Pz} \ P_2$

Zemes elipsoīds ir rotācijas virsma [sk.(2.1)].

$$(\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2) / a^2 + \underline{z2}^2 / b^2 - 1 = 0, \quad (4.1)$$

kur

a,b - Zemes elipsoīda pusasu garumi no **gds** [sk. 1.lek.];

$$\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T - \text{punkta kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas.}$$

Papildināsim aplūkotos Zemes elipsoīda jēdzienus un dosim to skaidrojumus.

Elipsoīda līnija – trīsdimensiju telpas $\underline{sR}^3$ līnija, kuras katrs punkts atrodas uz elipsoīda [Cīrulis 83, 68].

Elipsoīda pieskarplakne tā punktā P - plakne $\underline{sR}^2$, kurā atrodas visu caur punktu P vilkto elipsoīda līniju pieskares [Cīrulis 83, 68]. Pareizi izvēlēta ģeodēziskā sistēmā **gds** [sk. 1.lek.] ir panākts, ka ar elipsoīda pieskarplakni apmēram sakrīt caur punktu P vilkta horizontāla plakne.

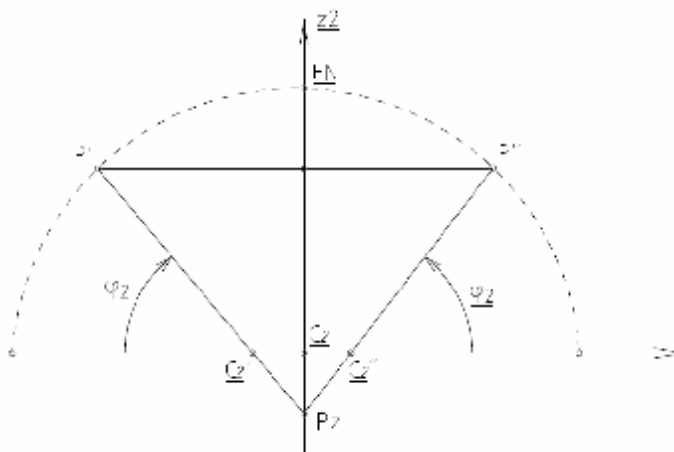
Elipsoīda normāle tā punktā P - taisne $P \ \underline{Pz}$, kas vilkta caur punktu P perpendikulāri elipsoīda pieskarplaknei [Cīrulis 83, 68]. Pareizi izvēlēta ģeodēziskā sistēmā **gds** [sk. 1.lek.] ir panākts, ka elipsoīda normāle punktā P apmēram sakrīt ar punkta P vertikāli (s.a. svērteņa līniju).

Vispār divu dažādu elipsoīda punktu, piemēram P_1 un P_2 , normāles ir šķērsas t.i. nav paralēlas un nekrustojas [REM, 418], [Heck 95, 167] (vāc. “sind windschief ”). Atzīmēsim, ka $\underline{sR}^3$ telpā divas nesakrītošas taisnes var būt krustiskas, paralēlas un šķērsas. Divas nesakrītošas taisnes sauc par šķērsām, ja tās nav paralēlas un nekrustojas. Caur šķērsām taisnēm nevar novilkt plakni.

Meridiāna visu punktu ($\underline{\lambda2} = \text{const}$, $\underline{\varphi2}$ ir no $\underline{sR}$ intervāla] – $\pi / 2$; + $\pi / 2$ [) normāles pieder tā plaknei $\underline{EN} \ \underline{C2} \ P$ un krustojas dažādos tās punktos.

Paralēles visu punktu ($\underline{\lambda2}$ ir no [0; 2 · π [, $\underline{\varphi2} = \text{const}$) normāles nepieder tā plaknei $\underline{EG} \ P \ \underline{Py}$, bet visas krustojas elipsoīda rotācijas ass $\underline{C2} \ \underline{EN}$ punktā $\underline{Pz}$. Ja $\underline{\varphi2}$ ir no $\underline{sR}$ intervāla [0, + $\pi / 2$ [(ziemeļu puselipsoīds), tad krustpunkts $\underline{Pz}$ ir uz dienvidiem no elipsoīda centra $\underline{C2}$.

Vienīgi garākās paralēles – ekvatora punktu (λ_2 ir no sR intervāla $[0; 2 \cdot \pi[$, $\varphi_2 = 0$) normāles krustojas elipsoīda centrā C_2 [Heck 95, 167].



10. zīm. Zemes elipsoīda paralēles punktu normāles

Šeit:

C_2 EN

- elipsoīda rotācijas ass;

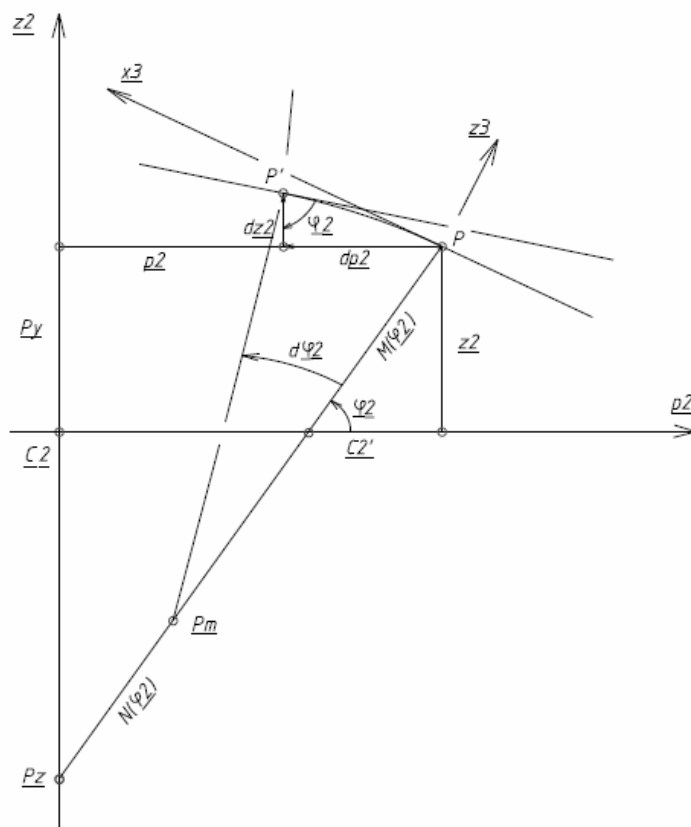
P_2

- elipsoīda paralēles P_1 P_2 punktu normāļu krustpunkts;

Caur elipsoīda punkta P normāli P P_2 vilkta plakne, piemēram, P P_2 EN , šķēļ elipsoīdu pa tā virsmas līniju. To sauc arī par **elipsoīda normālšķēlumu** punktā P tā pieskarplaknes vienības vektora $\underline{tP} = \underline{tPm}$ virzienā. Parasti punktā P normālšķēlumu uzdod ar ģeodēzisko azimutu no punkta $P = P_1$ uz norādītu elipsoīda punktu P_2 Ģeodēzisko azimutu α_{312} , kas ir $\underline{cs}_{312}$ elements, ņem no sR intervāla $[0; 2 \cdot \pi[$.

Divi normālšķēlumi, kurus uzdod ģeodēziskie azimuti $\alpha_{312} = 0$ vai π un $\alpha_{312} = +\pi/2$ vai $-\pi/2$, ir ar ekstremāliem liekumiem. Tos sauc par **galveniem normālšķēlumiem**.

Pirmais galvenais normālšķēlums ir meridiāns ($\lambda_2 = \text{const}$, $\alpha_{312} = 0$). Noteiksim tā liekuma rādītāju.



11. zīm. Zemes elipsoīda liekuma rādiusi.

Šeit:

P	- ģeodēziskā punkta attēls uz elipsoīda;
<u>C2</u> <u>p2</u> <u>z2</u>	- meridiāna plaknes taisnleņķa koordinātu sistēma;
<u>C2</u>	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
P <u>Pz</u>	- elipsoīda normāle punktā P;
<u>C2'</u>	- normāles P <u>Pz</u> un ekvatora plaknes šķēlums;
<u>Pz</u>	- normāles P <u>Pz</u> un elipsoīda rotācijas ass krustpunkts;
<u>dφ2</u>	- elipsoidālā platuma pieaugums;
<u>dφs</u>	- meridiāna loka pieaugums;
<u>dz2</u>	- punkta P aplikātas pieaugums;
<u>dp2</u>	- punkta P paralēles rādiusa negatīvs pieaugums;
P'	- meridiāna loka <u>dφs</u> galapunkts;
P''	- punkta P' projekcija uz punkta P paralēles plaknes P <u>Py</u> ;
<u>Pm</u>	- meridiāna punktu P un P' normāļu krustpunkts;
M	- meridiāna liekuma rādiuss (nogriežņa P <u>Pm</u> garums)
N	- meridiāna šķērsliekuma rādiuss (nogriežņa P <u>Pz</u> garums)

Pieņemsim, ka meridiāna ļoti tuvu punktu P un P' normāles krustojas meridiāna plaknes punktā Pm. Nogriežņa P Pm garumu apzīmēsim ar M un sauksim par **meridiāna** [garen] **liekuma rādiusu** punktā P.

Atcerēsimies ģeodēzijā bieži lietojamo sakarību “(loks / leņķis) = (rādiuss / ρ)”, no kuras seko, ka “rādiuss = (loks · ρ) / leņķis”. Ja leņķis ir izteikts radiānos, tad pārejas reizinātājs $\rho = 180^\circ / \pi$ ir lieks. Meridiāna liekuma mainīgais rādiuss ir elipsoidālā platuma φ_2 , kas ņemts no **ce2**, funkcija. Tā noteikšanai elipsoidālo platumu φ_2 palielināsim par $d\varphi_2$. Līdz ar to starp punktu P ar platumu φ_2 un punktu P' ar platumu $\varphi_2 + d\varphi_2$ veidosies meridiāna loks $d\varphi_s$.

Meridiāna liekuma rādiuss
 $M = \text{“loks / leņķis”} = \frac{d\varphi}{d\varphi_2}; \quad (4.2)$

Meridiāna loka pieaugumu $d\varphi$ projicē uz meridiāna plaknes koordinātu asīm C_2 z_2 un C_2 p_2 . Iegūst, ka, salīdzinot punktu P ar koordinātām (z_2 , p_2), punkts P' ar koordinātām ($z_2 + dz_2$, $p_2 + (-dp_2)$) ir tālāk no elipsoīda ekvatora plaknes par dz_2 un tuvāk elipsoīda rotācijas asij par dp_2 .

No koordinātu pieaugumu taisnleņķa trijstūra P P' P'' seko, ka
 $(-dp_2 / d\varphi) = \frac{\sin \varphi_2}{d\varphi} \text{ un } d\varphi = -dp_2 / \sin \varphi_2 \quad (4.3)$

Ievietojot (4.3) liekuma rādiusa izteiksmē (4.2), iegūst
 $M = - \frac{dp_2}{d\varphi_2 \cdot \sin \varphi_2} \quad (4.4)$

Tātad meridiāna liekuma rādiusa noteikšanai jāatrod attiecība ($dp_2 / d\varphi_2$).

Punkta P attālums līdz elipsoīda rotācijas asij ir (2.20),(3.9)
 $p_2 = a \cdot \cos \varphi_2 / W(\varphi_2)$, kur
 $W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}$ - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija. (4.5)

Liekot $W(\varphi_2)$ labo pusi izteiksmē (4.5), iegūst
 $p_2 = a \cdot \cos \varphi_2 / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} = a \cdot \cos \varphi_2 \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-1/2} \quad (4.6)$

...Skaidrot!

[HdV 39, 3.1, 246], [Balodis Kart.,16], [Heck 95, 167], [HdV IV, 49]

Var pierādīt, ka
 $(\frac{dp_2}{d\varphi_2}) = - (a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin \varphi_2) / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{3/2} \quad (4.7)$

Liekot (4.7) labo pusi liekuma rādiusa izteiksmē (4.4), iegūst
 $M = (a \cdot (1 - e^2)) / (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{3/2} =$
 $= a \cdot (1 - e^2) \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} =$
 $= a \cdot (1 - e^2) / W^3(\varphi_2) \quad (4.8)$

Otrais galvenais normālšķēlums ir **pirmais vertikāls** ($\lambda_2 = \text{const}$, $\alpha_{312} = +\pi / 2$). Noteiksim tā liekuma rādiusu (s.a. meridiāna šķērsliekuma rādiusu). Jāuzsver, ka punkta P paraēle nav normālšķēlums. Paralēles plakne P P_y ar pirmā vertikāla plakni P P_z veido leņķi φ_2 [sk. 4.3.zīm.]. Meridiāna plakne ar pirmā vertikāla plakni veido taisnu leņķi $\alpha_{312} = +\pi / 2$. [Torge 75, 65], [Cīrulis 90, 114], [Balodis Kart.,16], [Морозов 79,]

Taisnleņķa trijstūra P P_z P_y hipotenūzas P P_z garumu apzīmēsim ar N un sauksim par **meridiāna šķērsliekuma rādiusu** punktā P [sk. 4.3.zīm.].

Ievērosim, ka starp trijstūra P P_z P_y elementiem pastāv šādas sakarības:
 $p_2 / N = \cos \varphi_2; \quad N = p_2 / \cos \varphi_2; \quad p_2 = N \cdot \cos \varphi_2; \quad (4.9)$

Pēdējā no tām skaitliski izteic franču matemātiķa D.Menjē teorēmu (J.Mensnier (1754. - 1793))
 [Cīrulis 90, 117].

Liekot (4.5) izteiksmes labo pusi sakarību (4.9) otrā izteiksmē, iegūst, ka meridiāna šķērsliekuma rādiuss ir

$$N = \frac{a^2}{\cos \varphi_2} = \left(\frac{a \cdot \cos \varphi_2}{W(\varphi_2)} \right) / \cos \varphi_2 = a / W(\varphi_2), \quad (4.10)$$

kur $W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}$ - punkta P elipsoidālā platuma φ_2 1.sferoidiskā funkcija.

Var pierādīt, ka elipsoīda pirmo un otro ekscentritāti saista izteiksme

$$(1 - e^2) \cdot (1 + \sqrt{e'}) = 1, \quad (4.11)$$

kur e, e' - elipsoīda 1. un 2.ekscentricitāte [sk.1.lek], [Heck 95, 64, (3.6)].

Lietojot (4.11), atrod sekojošas sakarības starp 1. un 2. sferoidisko funkciju

$$W(\varphi_2) = V(\varphi_2) / \sqrt{1 + \sqrt{e'}} \quad (4.12)$$

$$W(\varphi_2) = V(\varphi_2) \cdot \sqrt{1 - e^2} \quad (4.13)$$

$$W(\varphi_2) = V(\varphi_2) \cdot a / c \quad (4.14)$$

$$W(\varphi_2) = V(\varphi_2) \cdot b / a, \quad (4.15)$$

[Багратуни 62, 36], [Закатов , 29], [Морозов 79, 13],

kur

a,b

- Zemes elipsoīda pusasu garumi;

c

- elipsoīda polārais liekuma rādiuss (1.19) - (1.24);

$$V(\varphi_2) = \sqrt{1 + \sqrt{e'}} \cdot \cos^2 \varphi_2 \quad - \text{elipsoidālā platuma 2.sferoidiskā funkcija (2.25)}$$

Ievērojot pāreju (4.14), meridiāna šķērsliekuma rādiuss, izteikts ar elipsoidālā platuma 2.sferoidisko funkciju, ir

$$N = a / W(\varphi_2) = a / (V(\varphi_2) \cdot a / c) = (a \cdot c) / (V(\varphi_2) \cdot a) = c / V(\varphi_2) \quad (4.16)$$

Tātad izvēlētā ģeodēziskā sistēmā **gds** [sk. 1.lek.] Zemes elipsoīda punktā P ar elipsoidālo platumu φ_2 galveno normālšķēlumu liekuma rādiusus var iegūt pēc izteiksmēm (4.8) un (4.10), kuras pārrakstīsim blakus

$$M = a \cdot (1 - e^2) / W^3(\varphi_2) \quad (4.17)$$

$$N = a / W(\varphi_2) \quad (4.18)$$

Izvērsti

$$M = a \cdot (1 - e^2) / (\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2})^3 \quad (4.19)$$

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}, \quad (4.20)$$

kur $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$ - elipsoīda primārās ekscentritātes kvadrāts (1.28)

Lietojot izteiksmes (4.19) un (4.20), jāievēro sekojošais.

Izteiksmju vienkāršotai pārbaudei aizstāsim elipsoīdu ar sfēru. Tai jāņem $a = b = r$, kur r -sfēras rādiuss. Tādēļ sfērai $e^2 = 0$ un neatkarīgi no punkta P elipsoidālā platuma $M = N = r$.

Ievērojot, ka Zemes elipsoīdam $e^2 \sim 1 / 150$, no (4.19) un (4.20) seko, ka visos no ziemeļpola ($\varphi_2 < +\pi / 2$) atšķirīgos punktos $N > M$

Elipsoīda ziemeļpolā $\underline{EN}$ platums ir $\varphi_2 = +\pi / 2$ un tādēļ $\sin \varphi_2 = 1$. Izteiksmes (4.19) un (4.20) vienkāršojas līdz

$$M(\pi / 2) = a \cdot (1 - e^2) / (\sqrt{1 - e^2})^3 \quad (4.19)$$

$$N(\pi / 2) = a / \sqrt{1 - e^2} \quad (4.20)$$

No (1.16) iegūst, ka $\sqrt{1 - e^2} = b / a$. Savkārt $(1 - e^2) = b^2 / a^2$. Bez tam $a^2 / b = c$, kur c - polārais liekuma rādiuss. Tātad elipsoīda ziemeļpolā

$$M(\pi / 2) = c. \quad (4.21)$$

$$N(\pi / 2) = c. \quad (4.22)$$

Elipsoīda ekvatora punktā $\underline{EE}$ platums ir $\varphi_2 = 0$. Tādēļ $\sin \varphi_2 = 0$ un $\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} = 1$.

Izteiksmes (4.19) un (4.20) vienkāršojas līdz

$$M(0) = a \cdot (1 - e^2) \quad (4.23)$$

$$N(0) = a \quad (4.24)$$

Elipsoīda normālšķēluma rādiusu punktā P ar platumu φ_2 virzienā α_3 , kur α_3 ir ģeodēziskais azimuts no sR intervāla $[0; 2 \cdot \pi[$, izteic kā

$$R(\varphi_2, \alpha_3) = 1 / (\cos^2 \alpha_3 / M(\varphi_2) + \sin^2 \alpha_3 / N(\varphi_2)) \quad (4.25)$$

Izteiksmi (4.25) sauc arī par Eilera formulu un tās rezultātu $R(\varphi_2, \alpha_3)$ – par **elipsoīda liekuma rādiusu pēc Eilera**. [Heck 95, 169], [Cīrulis 90, 127], [Морозов 79, 44].

No (4.25) var iegūt, ka

$$\begin{aligned} R(\varphi_2, 0) &= 1 / (\cos^2 0 / M(\varphi_2) + \sin^2 0 / N(\varphi_2)) = \\ &= 1 / (1 / M(\varphi_2) + 0 / N(\varphi_2)) = \\ &= 1 / (1 / M(\varphi_2)) = \\ &= M(\varphi_2). \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{Līdzīgi iegūst, ka } R(\varphi_2, \pi / 2) = N(\varphi_2). \quad (4.27)$$

Tātad elipsoīda liekuma rādiuss pēc Eilera ir galveno liekuma rādiusu vispārinājums.

Bieži lieto arī **elipsoīda vidējo liekuma rādiusu pēc Gausa**

$$R'(\varphi_2) = \sqrt{M(\varphi_2) \cdot N(\varphi_2)} = c / V^2(\varphi_2). \quad (4.28)$$

[Heck 95, 170]

Saprotams, ka datorvidē ir lietderīgi realizēt vispārīgo risinājumu t.i. izteiksmi (4.25). Augstākās ģeodēzijas uzdevumu risināšanas datorprogrammā to veic sekojoša Pascal valodā rakstīta funkcija

```
{ x. Uzstādīt normālšķēluma liekuma rādiusu }
function Set_Radius_of_curvature
{ -----
}
(          gc:TY_xyz;  { -ģeodēziskās koordinātas          <
}
          al3:TY_rnm;  { -ģeodēziskais azimuts grādos          <
}
          var      gdt:TY_gdt  { -ģeodēzisko datu pakete          <
}))
    {return}:TY_rnm;
{ -----
}
{ 1996.g.26.septembrī }
{ =====
}

const ro=180/Pi;
var M,N:TY_rnm;
var W:TY_rnm;
var cs,sn:TY_rnm;
begin {Set_Radius_of_curvature}
{ -----
}

{ -----
}
```

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

```

with gdt do
begin {with gdt}
{ -----

{ ...sk.Morozov,20.c.

{ -----

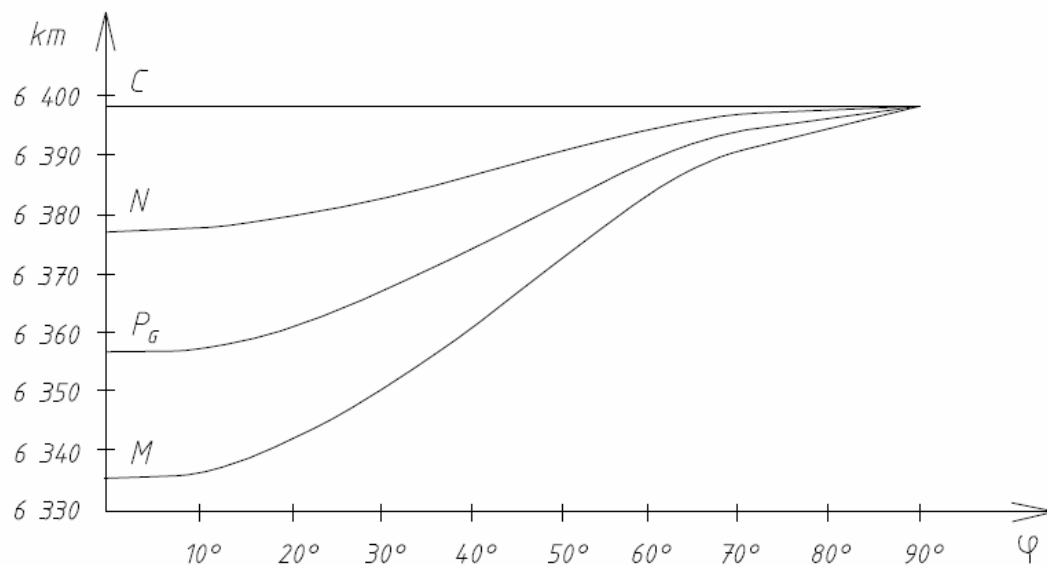
{ ... "gdt.c"      -elipsoīda polārais liekuma rādiuss
{
{                -polar curvature radius
{
{ ... "gdt.a"      -elipsoīda lielās pusass garums
{
{                -semimajor axis
{
{ ... "gdt.e"      -elipsoīda 1.ekscentricitāte
{
{                -first eccentricity
{
{ ... "gc.y"       -ģeodēziskais platums
{ -----

{ aprēķināt meridiāna liekuma rādiusu }
W:=set_W(gc.y,gdt);
M:=a*(1-e*e)/(W*W*W);
N:=a/W;
cs:=cos(al3/ro);
sn:=sin(al3/ro);
Set_Radius_of_curvature:=1/((cs*cs)/M+(sn*sn)/N);
end {with gdt};
{ -----

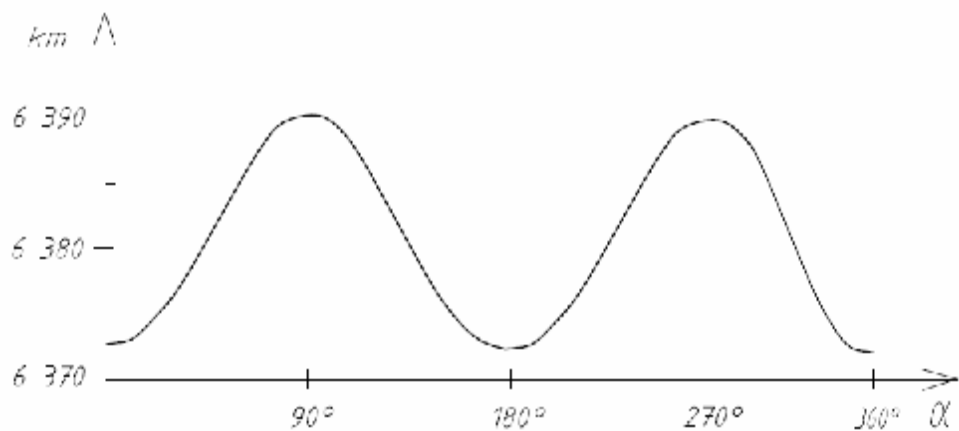
}

end {Set_Radius_of_curvature};
{ =====
}

```



12. zīm. Elipsoīda meridiāna garenliekuma, vidējā un šķērsliekuma rādus izmaiņa platumiem φ_2 no sR intervāla $[0, +\pi/2[$.
[Heck 95, 168].



13. zīm. Elipsoīda liekuma rādus pēc Eilera izmaiņa atkarībā no normālšķēluma ģeodēziskā azimuta α_3 izmaiņas Beseļa elipsoīdam platumā $\varphi_2 = 50^\circ$.
[Heck 95, 169].

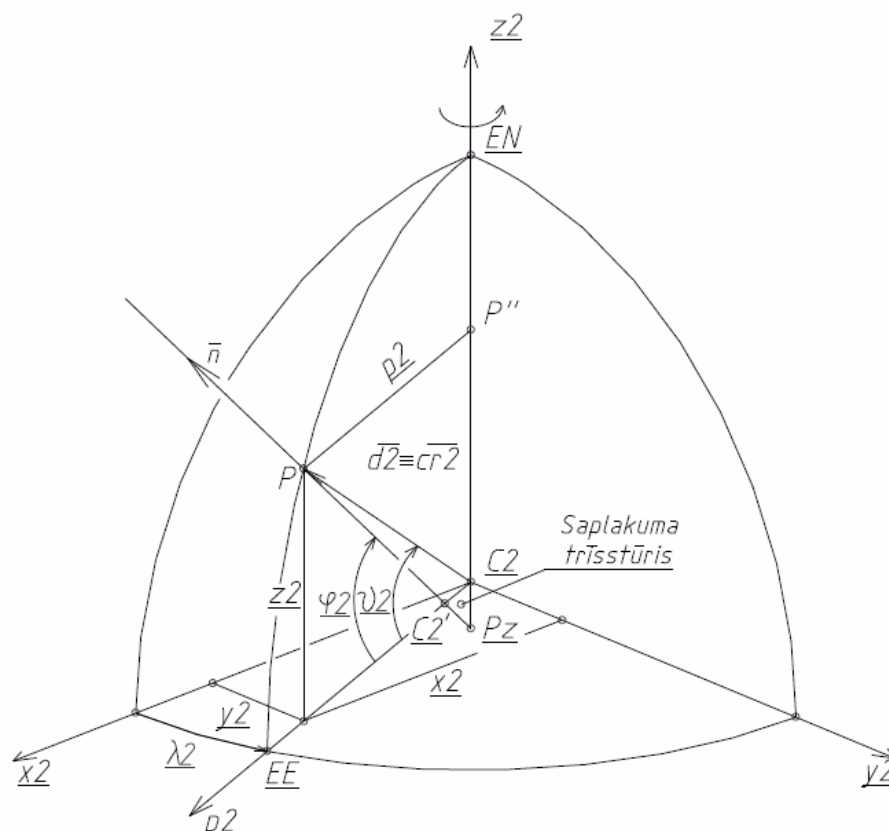
5. Zemes elipsoīda parametriskie vienādojumi.

Zemes elipsoīda parametriskie vienādojumi [Cīrulis 90, 28], [Heck 95,3.7], dod iespēju pēc

elipsoīda punkta P parametriem

- elipsoidālām koordinātām no
- reducētām sfēriskām koordinātām no
- sfēriskām koordinātām no
- aprēķināt tā taisnleņķa koordinātas no

$$\begin{aligned} \underline{ce2} &= (\lambda_2, \varphi_2, h_2)^T \text{ vai} \\ \underline{cs2'} &= (\alpha_2, \underline{v2'}, \underline{d2'})^T \text{ vai} \\ \underline{cs2} &= (\alpha_2, \underline{v2}, \underline{d2})^T \\ \underline{cr2} &= (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T. \end{aligned}$$



14. zīm. Zemes elipsoīda parametriskie vienādojumi

Šeit:

a,b

EN

C2

C2 EN

C2 x2 y2 z2

C2 x2 y2

P

PE

d2

cr2 = (x2, y2, z2)^T

x2, y2, z2

C2 p2 z2

EE

EE P EN

P Pz

- Zemes elipsoīda pusasu garumi no ģeodēziskās sistēmas gds [sk. 1.lek.];

- elipsoīda ziemeļpols;

- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);

- elipsoīda rotācijas ass;

- elipsoīda [kvaziģeocentriskā] taisnleņķa koordinātu sistēma;

- elipsoīda ekvatora plakne;

- elipsoīda punkts ziemeļu puslodē;

- elipsoīda punkta P projekcija ekvatora plaknē C2 x2 y2;

- punkta P kvaziģeocentriskais vektors (r.a. C2P [sk. 2.lek.]);

- punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas (cr2 = d2);

- punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no cr2;

- punkta P meridiāna plakne (r.a. C2 EE P EN);

- elipsoīda ekvatora punkts;

- punkta P meridiāna loks;

- elipsoīda normāle punktā P(tā pieder meridiāna plaknei);

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

n	- elipsoīda normāles vienības vektors punktā P;
$\underline{Pz}$	- punkta P normāles un elipsoīda rotācijas ass $\underline{C2 EN}$ šķēlums
$\underline{C2'}$	- punkta P normāles un ekvatora plaknes $\underline{C2 x2 y2}$ šķēlums;
$\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2}$	- punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no $\underline{ce2}$ (punktam P elipsoidālais augstums $\underline{h2} = 0$);
$\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{\vartheta2}, \underline{d2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās sfēriskās koordinātas [sk. 3.lek.];
$\underline{\alpha2}, \underline{\vartheta2}, \underline{d2}$	- punkta P kvaziģeocentriskais (s.a. ģeocentriskais) garums, platums un attālums (s.a. kvaziģeocentriskā vektora $\underline{d2}$ garums);
$\underline{cs2'} = (\underline{\alpha2'}, \underline{\vartheta2'}, \underline{d2'})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās reducētās koordinātas [sk. 2.lek.];
$\underline{\alpha2'}, \underline{\vartheta2'}, \underline{d2'}$	- punkta P kvaziģeocentriskais (s.a. ģeocentriskais) garums, reducētais platums un reducētais attālums (nogriežņa $\underline{C2 Pa}$ garums [sk. 3.1.zīm.]);
$\underline{Py}$	- elipsoīda rotācijas ass $\underline{C2 EN}$ punkts;
$\underline{P Py}$	- punkta P paralēles rādiuss (nogrieznis $\underline{P Py}$ ar rotācijas asi $\underline{C2 EN}$ veido taisnu leņķi);
$\underline{z2}, \underline{p2}$	- punkta P abscisa un ordināta meridiāna plaknē $\underline{C2 EE P EN}$ [sk. 2.lek.] ($\underline{z2}$ ir arī aplikāta no $\underline{cr2}$);

Reizinot Zemes elipsoīda vienādojuma [sk. (2.1.), (4.1)]

$$(\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2) / a^2 + \underline{z2}^2 / b^2 - 1 = 0, \quad (5.1)$$

kreiso un labo pusi ar elipsoīda lielās pusass kvadrātu a^2 , iegūst, ka

$$\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2 + (a^2 / b^2) \cdot \underline{z2}^2 - a^2 = 0 \quad (5.2)$$

No izteiksmes (1.39) iegūst pusasu garumu attiecību [Морозов 79,(1.19)]

$$a / b = \sqrt{1 + \sqrt{e'}}; \quad (5.3)$$

Ievietojot izteiksmē (5.2) izteiksmi (5.3), Zemes elipsoīda vienādojumu uzrakstīsim šādā veidā:

$$\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2 + (1 + \sqrt{e'}) \cdot \underline{z2}^2 = a^2, \quad (5.4)$$

kur

- a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no $\underline{gds}$ [sk. 1.lek.];
- e' - elipsoīda 2.ekscentricitāte [sk.1.lek.] (sfērai $e' = 0$);
- $\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2}$ - punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{cr2}$;

Pārnēsīsim izteiksmes (5.4) kreisās puses trešo saskaitāmo $(1 + \sqrt{e'}) \cdot \underline{z2}^2$ uz tās labo pusi un pārrakstīsim elipsoīda vienādojumu šādā formā

$$\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2 = a^2 - (1 + \sqrt{e'}) \cdot \underline{z2}^2, \quad (5.5)$$

Ievērosim iepriekš iegūtās sakarības (2.15), (5.3.) un izteiksmes (5.5) labo pusi aizstāsim ar

$$\underline{p2}^2 = a^2 - (1 + \sqrt{e'}) \cdot \underline{z2}^2. \quad (5.6)$$

Iegūtā izteiksme

$$\underline{x2}^2 + \underline{y2}^2 = \underline{p2}^2 \quad (5.7)$$

izteic elipsoīda šķēlumu ar plakni, kas ir perpendikulāra rotācijas asij $\underline{C2 EN}$.

Tā ir **elipsoīda paralēle** ($z^2 = \text{const}$) ar rādiusu p^2 .

Ņemot paralēli (5.7) ar lielāko rādiusu $p^2 = a$, kur a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums, uzrakstīsim **elipsoīda ekvatora** vienādojumu

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (5.8)$$

No vienādojuma (5.6) un sakarības starp elipsoīda ekscentricitātēm [sk. (4.11)]

$$(1 - e^2) \cdot (1 + \sqrt{e'}) = 1, \quad (5.9)$$

kā arī elipsoīda pusasu attiecības [sk. (1.37)]

$$b/a = \sqrt{1 - e^2}, \quad (5.10)$$

secīgi iegūsim, ka paralēlei ar rādiusu p^2 aplikāta z^2 ir

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{e'}) \cdot z^2 &= a^2 - p^2; \\ z^2 &= (a^2 - p^2) / (1 + \sqrt{e'}); \\ z^2 &= (1 - e^2) \cdot (a^2 - p^2); \\ z^2 &= (b/a)^2 \cdot (a^2 - p^2); \\ z &= (b/a) \cdot \sqrt{a^2 - p^2}, \end{aligned}$$

kur p^2 ir no intervāla [0, a].

Elipsoīda ziemeļpolā $z = b$, kur b - Zemes elipsoīda mazās pusass garums.

Tālāk vienādojumā (5.1) punkta P abscisas un ordinātas kvadrātu summu ($x^2 + y^2$) aizstāsim ar paralēles rādiusa kvadrātu p^2 [sk. 5.1.zīm.], [sk. (5.7)] un tādējādi iegūsim **elipsoīda meridiāna** vienādojumu

$$p^2/a^2 + z^2/b^2 - 1 = 0, \quad (5.11)$$

[Cīrulis 83, 63], [Cīrulis 90, 85], [Heck 95, (3.9)], [Морозов 79, 9, 12, 23, 24, (1.20)]

Piezīme.

Norādot punkta P meridiānu, parasti tā elipsoidālo garumu λ^2 ņem no intervāla [0, $2 \cdot \pi$].

Tādēļ punkta P meridiāns jāsaprot kā puselipse $\underline{EN}$ P $\underline{ES}$, kur $\underline{EN}$ - elipsoīda ziemeļpols un $\underline{ES}$ - elipsoīda dienvidpols;

Zemes elipsoīda vektoriālais vienādojums ir

$$\underline{d} = x^2 \cdot \underline{i} + y^2 \cdot \underline{j} + z^2 \cdot \underline{k}, \quad (5.12)$$

kur

$\underline{d}$ - punkta P kvaziģeocentriskais vektors (r.a. $\underline{C2P}$ [sk. 2.lek.]);
 $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ - elipsoīda [kvaziģeocentriskās] taisnleņķa koordinātu sistēmas $\underline{C2}$ x^2 y^2 z^2 vienības vektoru (s.a. ortu) trijnieks;
 [Морозов 79, (1.25)]

Zemes elipsoīda parametriskos vienādojumus iegūst no meridiāna parametriskajiem vienādojumiem [sk. (2.21), (2.22)]

$$p^2 = a \cdot \cos \varphi^2 / W(\varphi^2) \quad (5.13)$$

$$z^2 = b \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \varphi^2 / W(\varphi^2), \quad (5.14)$$

kur $W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}$ - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija.

Punkta P paralēles rādiuss pēc D.Menjē teorēmas [sk. (4.9)] ir

$$p_2 = N \cdot \cos \varphi_2, \quad (5.15)$$

kur $N = a / W(\varphi_2)$ - meridiāna šķērslieduma rādiuss punktā P [sk. (4.18)]

Punkta P attālums līdz ekvatora plaknei (s.a. aplikāta) ir [sk. (2.24)]

$$z_2 = c \cdot \sin \varphi_2 / ((1 + \sqrt{e'}) \cdot V(\varphi_2)), \quad (5.16)$$

kur

$V(\varphi_2) = \sqrt{1 + \sqrt{e'} \cdot \cos^2 \varphi_2}$ - elipsoidālā platuma 2.sferoidiskā funkcija;
 c - elipsoīda polārais lieduma rādiuss [sk. (1.19) – (1.24)]

Tā kā meridiāna šķērslieduma rādiuss punktā P [sk. (4.16)]

$$N = c / V(\varphi_2),$$

tad aplikātas izteiksme (5.16) vienkāršojas līdz

$$\begin{aligned} z_2 &= N \cdot \sin \varphi_2 / (1 + \sqrt{e'}) \text{ vai arī} \\ z_2 &= (N / (1 + \sqrt{e'})) \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tātad punkta P koordinātas tā meridiāna plaknē ir

$$p_2 = N \cdot \cos \varphi_2, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (N / (1 + \sqrt{e'})) \cdot \sin \varphi_2 \\ &[\text{Heck 95, (3.19) }] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ievietosim p_2 pēc (5.18) elipsoīda paralēles parametriskos vienādojumos [sk. (2.2), (2.3)]

$$x_2 = p_2 \cdot \cos \lambda_2 \quad (5.20)$$

$$y_2 = p_2 \cdot \sin \lambda_2, \quad (5.21)$$

kur

p_2 - paralēles rādiuss;

λ_2 – meridiāna elipsoidālais garums no intervāla [0° ; 360°].

Tādējādi ekvatora plaknē C_2 x_2 y_2 iegūst punkta P projekcijas PE koordinātas [sk. 5.1.zīm.].

$$x_2 = N \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2 \quad (5.22)$$

$$y_2 = N \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2, \quad (5.23)$$

kur

$$N = N(\varphi_2);$$

$N(\varphi_2) = c / (\sqrt{1 + \sqrt{e'} \cdot \cos^2 \varphi_2})$ - elipsoīda meridiāna šķērslieduma rādiuss punktā P [sk. (4.16), (2.25)].

Papildināsim (5.22) un (5.23) ar aplikātas izteiksmi (5.19)

$$\begin{aligned} \underline{x}_2 &= N \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2 \\ \underline{y}_2 &= N \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2, \\ \underline{z}_2 &= (N / (1 + \sqrt{e'^2})) \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

[Heck 95, (3.35)], [Морозов 79, (1.73)]

Tā kā elipsoīda 1. un 2. ekscentricitāti saista sakarība

$$(1 - e^2) \cdot (1 + \sqrt{e'^2}) = 1 \quad (5.25)$$

vai

$$1 / (1 + \sqrt{e'^2}) = (1 - e^2) \quad (5.26)$$

[sk. (4.11)], [Heck 95, (3.6)],

tad vienādojumu sistēmā (5.24) aplikātas $\underline{z}_2$ izteiksmē daļu $(N / (1 + \sqrt{e'^2}))$ var izteikt šādi

$$(N / (1 + \sqrt{e'^2})) = N \cdot (1 - e^2). \quad (5.27)$$

Tādējādi **elipsoīda parametriskie** (λ_2, φ_2) **vienādojumi** (5.24) iegūst šādu veidu

$$\begin{aligned} \underline{x}_2 &= N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2 \\ \underline{y}_2 &= N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2, \\ \underline{z}_2 &= N(\varphi_2) \cdot \sin \varphi_2 \cdot (1 - e^2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Piezīmes.

1. Izteiksmes (5.28) sauc par elipsoīda parametriskiem (λ_2, φ_2) vienādojumiem;
2. Parametrisko vienādojumu leņķiskie argumenti ir elipsoīda jebkura punkta P elipsoidālais garums λ_2 un elipsoidālais platums φ_2 no $\underline{ce}_2 = (\lambda_2, \varphi_2, h_2)^T$;
3. Parametrisko vienādojumu metriskais elements ir elipsoīda meridiāna šķērsliekuma rādiuss $N(\varphi_2) = c / (\sqrt{1 + \sqrt{e'^2}} \cdot \cos^2 \varphi_2)$ punktā P, kura elipsoidālais platums ir φ_2 no $\underline{ce}_2 = (\lambda_2, \varphi_2, h_2)^T$;
4. Ja valstī vai valstu grupā ģeodēziskā sistēma **gds** ir izveidota veiksmīgi, tad argumentu λ_2 un φ_2 vērtības ir ļoti tuvas punktā P mērītām astronomiskām koordinātām (garumam un platumam).
5. Taisnleņķa koordinātu $\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2$ no $\underline{cr}_2 = (\underline{x}_2, \underline{y}_2, \underline{z}_2)^T$ aprēķināšanai nepieciešamie elipsoīda parametri c, e^2 un $\sqrt{e'^2}$ ir aktuālā ģeodēziskā sistēmā **gds** doto ģeometrisku parametru – elipsoīda lielās pusass garuma a un elipsoīda polārā saplakuma f funkcijas [sk. 1.lek.];
6. Punkta P aplikāta $\underline{z}_2$ nav atkarīga no punkta P elipsoidālā garuma λ_2 ;
7. Aplikātas $\underline{z}_2$ izteiksmē reizinātājs $(1 - e^2)$ apmēram ir $(1 - 1 / 150) = 0.99333...$ [sk. (1.44)];
8. Elipsoīda vienādojumi (5.28) izteic elipsoīda punkta P_v koordinātu pārveidošanu $\underline{cr}_2[v] = \underline{er}_2(\underline{ce}_2[v])$.

Tāpat kā iepriekš, sasaistot meridiāna parametriskos vienādojumus

$$\underline{p}_2 = a \cdot \cos \underline{v}_2' \quad (5.29)$$

$$\underline{z}_2 = b \cdot \sin \underline{v}_2' \quad (5.30)$$

[sk. (3.3), (3.4)],

kur $\underline{v}_2'$ - punkta P reducētais platums no $\underline{cs}_2' = (\alpha_2, \underline{v}_2', d_2')^T$ [sk.3.lek.], ar paralēles parametriskajiem vienādojumiem (5.20) un (5.21), iegūst **elipsoīda parametriskos** $(\lambda_2, \underline{v}_2')$ **vienādojumus**

$$\underline{x}_2 = a \cdot \cos \underline{v}_2' \cdot \cos \lambda_2$$

$$\begin{aligned} \underline{y2} &= a \cdot \cos \underline{v2}' \cdot \sin \underline{\lambda2}, \\ \underline{z2} &= b \cdot \sin \underline{v2}' \end{aligned} \quad (5.31)$$

[Heck 95, (3.36)], [Морозов 79, (1.23)]

Piezīmes.

1. Izteiksmes (5.31) sauc par elipsoīda parametriskiem ($\underline{\lambda2}$, $\underline{v2}'$) vienādojumiem;
2. Parametrisko vienādojumu leņķiskie argumenti ir elipsoīda jebkura punkta P elipsoidālais garums $\underline{\lambda2}$ un reducētais platums $\underline{v2}' = \tan^{-1} ((b / a) \cdot \tan \underline{\phi2})$ [sk. (3.20)] no $\underline{cs2}' = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}', \underline{d2}')^T$;
3. Parametrisko vienādojumu metriskie elementi ir elipsoīda lielās un mazās pusass garumi a un b;
4. Ja elipsoīda pusasis a = b = r, tad $\underline{v2}' = \underline{v2}$ un (5.31) kļūst par sfēras ($\underline{\lambda2}$, $\underline{v2}$, r) vienādojumiem;
5. Iespējams arī šāds pietiekami vienkāršs pretējs risinājums:
 $\underline{\lambda2} = \tan^{-1} (\underline{y2} / \underline{x2})$
 $\underline{v2}' = \tan^{-1} ((\underline{z2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{e' }}) / (\underline{x2} \cdot \cos \underline{\lambda2} + \underline{y2} \cdot \sin \underline{\lambda2}))$
6. Elipsoīda vienādojumi (5.31) izteic elipsoīda punkta P_v koordinātu pārveidošanu $\underline{cr2}[v] = \underline{sr2}'(\underline{cs2}'[v])$;

Tāpat kā iepriekš, sasaistot meridiāna parametriskos vienādojumus

$$\underline{p2} = \underline{d2} \cdot \cos \underline{v2} \quad (5.32)$$

$$\underline{z2} = \underline{d2} \cdot \sin \underline{v2} \quad (5.33)$$

[sk. (3.5), (3.6)],

kur $\underline{v2}$ - punkta P [kvazi] ģeocentriskais platums no $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$ [sk.3.lek.], ar paralēles parametriskajiem vienādojumiem (5.20) un (5.21), iegūst **elipsoīda parametriskos ($\underline{\lambda2}$, $\underline{v2}$) vienādojumus**

$$\begin{aligned} \underline{x2} &= \underline{d2} \cdot \cos \underline{v2} \cdot \cos \underline{\lambda2} \\ \underline{y2} &= \underline{d2} \cdot \cos \underline{v2} \cdot \sin \underline{\lambda2}, \\ \underline{z2} &= \underline{d2} \cdot \sin \underline{v2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

[Heck 95, (3.37)]

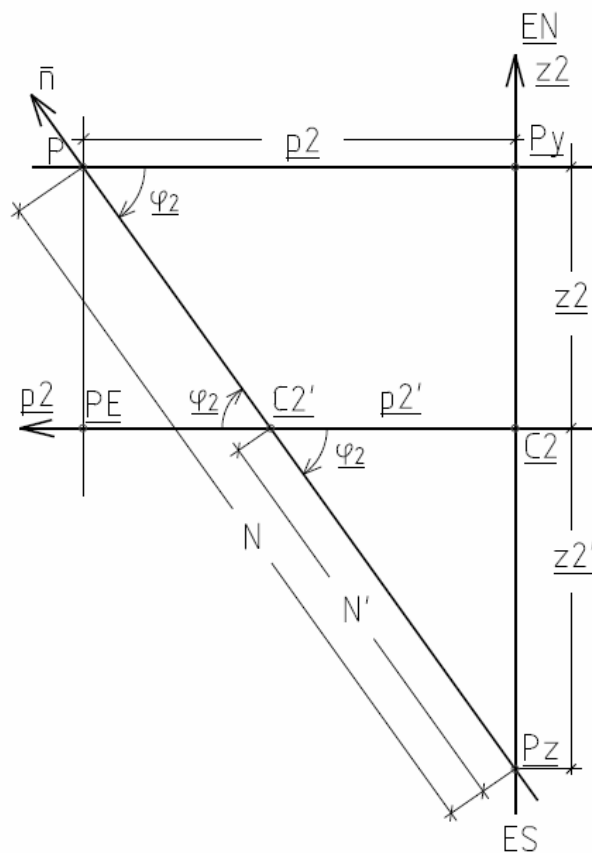
Piezīmes.

1. Izteiksmes (5.34) sauc par elipsoīda parametriskiem ($\underline{\lambda2}$, $\underline{v2}$) vienādojumiem;
2. Parametrisko vienādojumu leņķiskie argumenti ir elipsoīda jebkura punkta P elipsoidālais garums $\underline{\lambda2}$ un kvaziģeocentriskais platums $\underline{v2} = \tan^{-1} ((b / a)^2 \cdot \tan \underline{\phi2})$ [sk. (3.18), (3.20)] no $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$;
3. Parametrisko vienādojumu metriskais elements ir punkta P kvaziģeocentriskā vektora $\underline{d2}$ garums (s.a. kvaziģeocentriskais attālums)
 $\underline{d2} = a / \sqrt{1 + \sqrt{e' }} \cdot \sin^2 \underline{v2}$ no $\underline{cs2} = (\underline{\alpha2}, \underline{v2}, \underline{d2})^T$
4. Elipsoīda vienādojumi (5.34) izteic elipsoīda punkta P_v koordinātu pārveidošanu $\underline{cr2}[v] = \underline{sr2}(\underline{cs2}[v])$.

6. Zemes elipsoīda saplakuma trijstūris.

Zemes elipsoīda polārā saplakuma dēļ [sk. (1.11.)- (1.13.)] caur ziemeļu platuma punktu P vilkta normāle $\underline{P}\underline{Z}$ (φ_2 no $\underline{ce}_2$ pieder intervālam $] 0, \pi [$), šķēļ elipsoīda ekvatora plakni $\underline{C}_2 \underline{x}_2 \underline{y}_2$ punktā $\underline{C}_2'$ un krustojas ar elipsoīda rotācijas asi $\underline{EN} \underline{ES}$ dienvidos no elipsoīda centra $\underline{C}_2$ punktā $\underline{P}_z$.

Figūru $\underline{C}_2' \underline{C}_2 \underline{P}_z$, kas veidojas elipsoīda dienvidu daļā tā saplakuma dēļ, sauc par **elipsoīda saplakuma trijstūri**.



15. zīm. Zemes elipsoīda saplakuma trijstūris

(Salīdzinot ar . zīm., punkta P meridiāna plakne ir parādīta no austrumu puses (sk. arī . zīm.))

Šeit:

- | | |
|--|--|
| $\underline{P}$ | - elipsoīda punkts tā ziemeļu daļā; |
| $\underline{EN}$ | - elipsoīda ziemeļpols (North Pole); |
| $\underline{ES}$ | - elipsoīda dienvidpols(South Pole); |
| $\underline{C}_2$ | - elipsoīda centrs(s.a. kvaziģeocentrs); |
| $\underline{C}_2 \underline{x}_2 \underline{y}_2$ | - elipsoīda ekvatora plakne (šeit $\underline{C}_2 \underline{PE}$); |
| $\underline{C}_2 \underline{p}_2 \underline{z}_2$ | - punkta P meridiāna plakne (r.a. $\underline{C}_2 \underline{EE} \underline{P} \underline{EN}$); |
| $\underline{PE}$ | - elipsoīda punkta P projekcija ekvatora plaknē $\underline{C}_2 \underline{x}_2 \underline{y}_2$; |
| $\underline{P} \underline{P}_z$ | - elipsoīda normāle punktā P (tā pieder meridiāna plaknei); |
| $\underline{P}_z$ | - punkta P normāles un elipsoīda rotācijas ass $\underline{C}_2 \underline{EN}$ šķēlums; |
| $\underline{C}_2'$ | - punkta P normāles un ekvatora plaknes $\underline{C}_2 \underline{x}_2 \underline{y}_2$ šķēlums; |
| $\underline{n}$ | - elipsoīda normāles vienības vektors punktā P ; |
| $\underline{ce}_2 = (\lambda_2, \varphi_2, h_2)^T$ | - punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| $\lambda_2, \varphi_2, h_2$ | - punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no $\underline{ce}_2$ (punktam P elipsoidālais augstums $h_2 = 0$); |
| $\underline{P}_y$ | - elipsoīda rotācijas ass $\underline{C}_2 \underline{EN}$ punkts; |

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

- | | |
|--|---|
| $P \underline{Py}$ | - punkta P paralēles rādiuss (nogrieznis $P \underline{Py}$ ar rotācijas asi $\underline{C2} \underline{EN}$ veido taisnu leņķi); |
| $\underline{z2}, \underline{p2}$ | - punkta P abscisa un ordināta meridiāna plaknē $\underline{C2} \underline{EE} P \underline{EN}$ [sk. 2.lek.] ($\underline{z2}$ ir arī aplikāta no cr2); |
| $\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$ | - punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas; |
| $\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2}$ | - punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no cr2 ; |
| N | - meridiāna šķērsliekuma rādiuss (nogriežņa $P \underline{Pz}$ garums). |

Noteiksim izvēlētajā ģeodēziskajā sistēmā **gds** saplakuma trijstūra malu garumus kā punkta P elipsoidālā platuma $\varphi2$ funkcijas.

Saprotams, ka $\underline{C2}' \underline{C2} \underline{Pz}$ ir taisnleņķa trijstūris. Apzīmēsim tā katetes $\underline{C2}' \underline{C2}$ un $\underline{C2} \underline{Pz}$ attiecīgi ar $\underline{p2}'$ un $\underline{z2}'$, bet hipotenūzu $\underline{C2}' \underline{Pz}$ – ar N' . Viegli ievērot, ka meklējamie elipsoīda saplakuma trijstūra malu garumu apzīmējumi ir izvēlēti saistībā ar $\underline{p2}$, $\underline{z2}$ un N .

Saplakuma trijstūrim $\underline{C2} \underline{C2}' \underline{Pz}$ līdzīgs ir otrs 6.1.zīm. redzamais taisnleņķa trijstūris $P \underline{Py} \underline{Pz}$. Trijstūru līdzību pamato kopīgais elipsoīda rotācijas ass nogrieznis $\underline{C2} \underline{Pz}$, kopīgais hipotenūzas nogrieznis $\underline{C2}' \underline{Pz}$ un tas, ka katete $P \underline{Py}$ ir paralēla katetei $\underline{C2}' \underline{C2}$.

Leņķa $\underline{PE} \underline{C2}' P$, ko veido ekvatora plakne $\underline{C2}' \underline{PE}$ ar normāli $\underline{C2}' P$, vērtība ir punkta P elipsoidālais platums $\varphi2$ no **ce2**. Viegli saskatīt, ka arī leņķu $\underline{Py} P \underline{Pz}$ un $\underline{C2} \underline{C2}' Pz$ vērtības ir $\varphi2$ no **ce2**.

Atgādināsim, ka trijstūra $P \underline{Py} \underline{Pz}$ hipotenūza $P \underline{Pz}$ ir punkta P meridiāna šķērsliekuma rādiuss. Tā vērtība

$$N = a / W(\varphi2), \quad (6.1)$$

kur

- | | |
|--|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| $W(\varphi2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi2}$ | - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte [sk.1.lek], |

ir fiksētā ģeodēziskajā sistēmā **gds** punkta P elipsoidālā platuma $\varphi2$ funkcija.

Pieņemsim, ka šķērsliekuma rādiuss N ir zināms. Tad trijstūrī $P \underline{Py} \underline{Pz}$

$$(\underline{z2} + \underline{z2}') / N = \sin \varphi2 \quad (6.2)$$

$$\underline{p2} / N = \cos \varphi2. \quad (6.3)$$

No (6.2) izriet, ka

$$(\underline{z2} + \underline{z2}') = N \cdot \sin \varphi2, \quad (6.4)$$

un saplakuma trijstūra 1.katete ir

$$\underline{z2}' = N \cdot \sin \varphi2 - \underline{z2}. \quad (6.5)$$

Ievietojot punkta P aplikātas izteiksmi [sk. (5.28)]

$$\underline{z2} = N \cdot \sin \varphi2 \cdot (1 - e^2), \quad (6.6)$$

kur $N = N(\varphi2)$,

izteiksmē (6.5) un veicot tās secīgu pārveidošanu, saplakuma trijstūra 1.katetes $\underline{C2}$ $\underline{Pz}$ aprēķināšanai iegūst šādu izteiksmi

$$\begin{aligned}\underline{z2}' &= N \cdot \underline{\sin \varphi2} - N \cdot \underline{\sin \varphi2} \cdot (1 - e^2); \\ \underline{z2}' &= N \cdot \underline{\sin \varphi2} (1 - (1 - e^2)); \\ \underline{z2}' &= N \cdot e^2 \cdot \underline{\sin \varphi2}.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Piezīme.

Saplakuma trijstūra kateti $\underline{z2}'$, ja zināms punkta P paralēles rādiuss $\underline{p2}$ un aplikāta $\underline{z2}$, var izteikt arī no taisnleņķa trijstūra P $\underline{Py}$ $\underline{Pz}$ sekojošā veidā

$$\begin{aligned}\underline{p2} / (\underline{z2} + \underline{z2}') &= \underline{\tan \varphi2}; \\ (\underline{z2} + \underline{z2}') &= \underline{p2} \cdot \underline{\tan \varphi2}; \\ \underline{z2}' &= \underline{p2} \cdot \underline{\tan \varphi2} - \underline{z2}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Saplakuma trijstūra 2.katetes $\underline{C2}$ $\underline{C2}'$ aprēķināšanai, sekojot trijstūru P $\underline{Py}$ $\underline{Pz}$ un $\underline{C2}'$ $\underline{C2}$ $\underline{Pz}$ līdzībai, sastādīsim proporciju

$$\underline{p2} / (\underline{z2} + \underline{z2}') = \underline{p2}' / \underline{z2}',$$

no kuras izriet, ka 2.katetes garums ir

$$\underline{p2}' = (\underline{p2} \cdot \underline{z2}') / (\underline{z2} + \underline{z2}'). \quad (6.9)$$

Atcerēsimies, ka pēc D.Menjē teorēmas

$$\underline{p2} = N \cdot \underline{\cos \varphi2} \text{ [sk.(4.9.) un, bez tam, } (\underline{z2} + \underline{z2}') = N \cdot \underline{\sin \varphi2} \text{ [sk.(6.4.) , kā arī } \\ \underline{z2}' = N \cdot e^2 \cdot \underline{\sin \varphi2} \text{ [sk.(6.7.) .}$$

Tādēļ 2.katetes garuma [sk.(6.9.) izteiksmi secīgi pārveidosim un iegūsim, ka

$$\begin{aligned}\underline{p2}' &= (\underline{p2} \cdot \underline{z2}') / (\underline{z2} + \underline{z2}'); \\ \underline{p2}' &= (N \cdot \underline{\cos \varphi2} \cdot N \cdot e^2 \cdot \underline{\sin \varphi2}) / (N \cdot \underline{\sin \varphi2}); \\ \underline{p2}' &= N \cdot e^2 \cdot \underline{\cos \varphi2}.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Saplakuma trijstūra hipotenūzas $\underline{C2}'$ $\underline{Pz}$ garumu uzrakstīsim pēc Pitagora teorēmas

$$\begin{aligned}N' &= \underline{\text{sqrt}}((\underline{z2}')^2 + (\underline{p2}')^2); \\ N' &= \underline{\text{sqrt}}((N \cdot e^2 \cdot \underline{\sin \varphi2})^2 + (N \cdot e^2 \cdot \underline{\cos \varphi2})^2); \\ N' &= N \cdot e^2 \cdot \underline{\text{sqrt}}(\underline{\sin^2 \varphi2} + \underline{\cos^2 \varphi2}); \\ N' &= N \cdot e^2;\end{aligned}\quad (6.11)$$

Tātad punkta P normāle ar elipsoīda rotācijas asi un ekvatora plakni veido saplakuma trijstūri, kura malas ir [sk. 6.1.zīm.], [sk. (6.7), (6.9.), (6.11)]

$$\begin{aligned}\underline{z2}' &= N \cdot e^2 \cdot \underline{\sin \varphi2}; \\ \underline{p2}' &= N \cdot e^2 \cdot \underline{\cos \varphi2}; \\ N' &= N \cdot e^2;\end{aligned}\quad \}, \quad (6.12)$$

kur

$$N = a / \underline{\text{sqrt}}(1 - e^2 \cdot \underline{\sin^2 \varphi2})$$

[Морозов 79, 1.75]

Sfērai saplakuma nav un, liekot izteiksmēs (6.12) $e^2 = 0$ [sk. (1.28)], iegūst, ka arī saplakuma trijstūris nav, jo $\underline{z2}' = \underline{p2}' = N' = 0$.

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Skaitlisks piemērs.

Pieņemsim, ka punkta P platums ir $\varphi_2 = 60^\circ$, elipsoīda lielās pusass garums $a = 6400$ km. un 1. ekscentritātes kvadrāts e^2 apmēram ir $1 / 150 = 0.00666\dots$ [sk. (1.41), (1.44)].

Platuma trigonometrisko funkciju vērtības

$$\sin 60^\circ = 0.5 \cdot \sqrt{3} = 0.5 \cdot 1.732 = 0.866025.$$

$$\cos 60^\circ = 0.5.$$

Platuma 1. sferoidiskās funkcijas vērtība

$$W(60^\circ) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 60^\circ} = \sqrt{1 - 0.00666 \cdot 0.866025^2} = 0.997499.$$

Meridiāna šķērsliekuma rādiusa vērtība

$$N(60^\circ) = a / W(60^\circ) = 6400 / 0.997499 = 6414 \text{ km}.$$

Saplakuma trijstūra malu garumi

$$\underline{z_2'} = 6414 \cdot 0.00666 \cdot 0.866025 = 37 \text{ km};$$

$$\underline{p_2'} = 6414 \cdot 0.00666 \cdot 0.5 = 21 \text{ km};$$

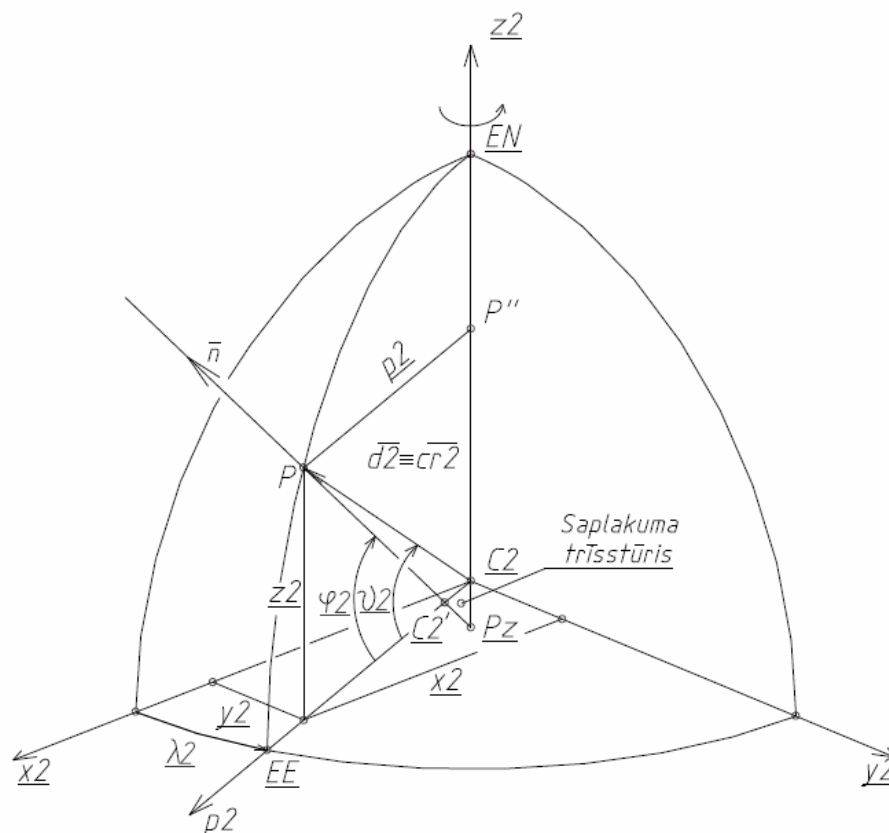
$$N' = 6414 \cdot 0.00666 = 43 \text{ km};$$

Kontrole pēc Pitagora teorēmas sniedz tuvinam aprēķinam atbilstošu rezultātu

$$\tilde{N}' = \sqrt{37^2 + 21^2} = 42.5 \text{ km}.$$

7. Zemes elipsoīda normāle.

Zemes elipsoīda normāle ir taisne, kura ir nepieciešama Zemes ģeogrāfiskā apvalkā (s.a.uz Zemes fiziskās virsmas) dažādos punktos iegūto ģeodēzisko mērījumu pārvešanai uz kopīgas matemātiskās apstrādes virsmas – rotācijas elipsoīda. Zemes elipsoīda normāli punktā P noteic tās vienības vektors $\mathbf{n}$. Pievērsīsimies tā koordinātu noteikšanai.



16. zīm. Zemes elipsoīda normāle

Šeit:

<u>P</u>	- elipsoīda punkts tā ziemeļu daļā;
<u>EN</u>	- elipsoīda ziemeļpols (North Pole);
<u>ES</u>	- elipsoīda dienvidpols(South Pole);
<u>C2</u>	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
<u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u>	- elipsoīda ekvatora plakne (šeit <u>C2</u> <u>PE</u>);
<u>C2</u> <u>p2</u> <u>z2</u>	- punkta P meridiāna plakne (r.a. <u>C2</u> <u>EE</u> P <u>EN</u>);
<u>PE</u>	- elipsoīda punkta P projekcija ekvatora plaknē <u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> ;
P <u>Pz</u>	- elipsoīda normāle punktā P(tā pieder meridiāna plaknei);
<u>Pz</u>	- punkta P normāles un elipsoīda rotācijas ass <u>C2</u> <u>EN</u> šķēlums
<u>C2'</u>	- punkta P normāles un ekvatora plaknes <u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> šķēlums;
<u>n</u> = (<u>x2n</u> , <u>y2n</u> , <u>z2n</u>) ^T	- elipsoīda normāles vienības vektora koordinātas punktā P;
<u>x2n</u> , <u>y2n</u> , <u>z2n</u>	- punkta P normāles vienības vektora abscisa, ordināta un aplikāta;
<u>ce2</u> = (<u>λ2</u> , <u>φ2</u> , <u>h2</u>) ^T	- punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
<u>λ2</u> , <u>φ2</u> , <u>h2</u>	- punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> (punktam P elipsoidālais augstums <u>h2</u> = 0);

P_y	- elipsoīda rotācijas ass C_2 EN punkts;
$P \underline{P_y}$	- punkta P paralēles rādiuss (nogrieznis $P \underline{P_y}$ ar rotācijas asi C_2 EN veido taisnu leņķi);
$\underline{z_2}, \underline{p_2}$	- punkta P abscisa un ordināta meridiāna plaknē C_2 EE P EN [sk. 2.lek.] ($\underline{z_2}$ ir arī aplikāta no $\underline{cr_2}$);
$\underline{cr_2} = (\underline{x_2}, \underline{y_2}, \underline{z_2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x_2}, \underline{y_2}, \underline{z_2}$	- punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{cr_2}$;
N	- meridiāna šķērslietuma rādiuss (nogriežņa $P \underline{P_z}$ garums).

Punktu P uz elipsoīda noteic tā līniju – paralēles $\underline{\lambda_2}$ un meridiāna $\underline{\varphi_2}$ krustpunkts (s.a. elipsoīda $\underline{\lambda_2}$ līnijas un $\underline{\varphi_2}$ līnijas krustpunkts). Katrai no tām punktā P eksistē attiecīgi pieskarvektori $\underline{t \lambda_2}$ un $\underline{t \varphi_2}$.

Punkta P normāles vienības vektoru izteic pieskarvektoru $\underline{t \lambda_2}$ un $\underline{t \varphi_2}$ vektoriālā (s.a. ārējā) reizinājuma un tā moduļa dalījums [Heck 95, 3.38], [Cīrulis 90, 3.1.42], [Bartsch 67, 142]

$$\underline{n} = ((\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}) \cdot (\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2})) / (\| ((\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}) \cdot (\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2})) \|), \quad (7.1)$$

kur

$\underline{cr_2}$ - punkta ($\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2}$) stāvokļa vektors;

($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}$) - elipsoīda parametrisko vienādojumu (5.24) (s.a. vektorfunkcijas $\underline{cr_2}$) parciālie atvasinājumi pēc elipsoidālā garuma $\underline{\lambda_2}$;

($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2}$) - elipsoīda parametrisko vienādojumu (5.24) (s.a. vektorfunkcijas $\underline{cr_2}$) parciālie atvasinājumi pēc elipsoidālā platuma $\underline{\varphi_2}$;

($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}$) · ($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2}$) - parciālo atvasinājumu vektoru vektoriālais reizinājums;

$\| ((\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}) \cdot (\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2})) \|$ - vektoriālā reizinājuma modulis.

Atcerēsimies, ka meridiāna punkta P taisnleņķa koordinātas tā plaknē ir

$$\underline{p_2} = c \cdot \cos \underline{\varphi_2} / V(\underline{\varphi_2}) \quad (7.2)$$

$$\underline{z_2} = c \cdot \sin \underline{\varphi_2} / ((1 + \sqrt{e'}) \cdot V(\underline{\varphi_2})) \quad (7.3)$$

[sk. 2.23., 2.24.]

vai arī

$$\underline{p_2} = N \cdot \cos \underline{\varphi_2}, \quad (7.4)$$

$$\underline{z_2} = (N / (1 + \sqrt{e'})) \cdot \sin \underline{\varphi_2} \quad (7.5)$$

[sk. 5.18., 5.19.]

Ievērojot, ka izteiksmēs (7.4.) un (7.5) meridiāna šķērslietuma rādiuss ir

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi_2}}, \quad (7.6)$$

[sk. 4.20],

var iegūt šādus atvasinājumus pēc elipsoidālā platuma $\underline{\varphi_2}$

$$(\partial \underline{p_2} / \partial \underline{\varphi_2}) = - M \cdot \sin \underline{\varphi_2} \quad (7.7)$$

$$(\partial \underline{z_2} / \partial \underline{\varphi_2}) = M \cdot \cos \underline{\varphi_2} \quad (7.8)$$

[Heck 95, 3.21].

Ar (7.7.) un (7.8) vektorfunkcijas $\underline{cr_2}$ [sk. (5.24)]

$$\underline{x_2} = N \cdot \cos \underline{\varphi_2} \cdot \cos \underline{\lambda_2}$$

$$\underline{y_2} = N \cdot \cos \underline{\varphi_2} \cdot \sin \underline{\lambda_2}, \quad \} \quad (7.9)$$

$$\underline{z_2} = (N / (1 + \sqrt{e'})) \cdot \sin \underline{\varphi_2}$$

[Heck 95, (3.35)], [Морозов 79, (1.73)]

atvasinājumu ($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}$) un ($\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2}$) elementi ir

$$\left. \begin{aligned} (\partial \underline{x_2} / \partial \underline{\lambda_2}) &= -N \cdot \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\sin \lambda_2} \\ (\partial \underline{y_2} / \partial \underline{\lambda_2}) &= +N \cdot \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\cos \lambda_2} \\ (\partial \underline{z_2} / \partial \underline{\lambda_2}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

[Heck 95, (3.39a)]

$$\left. \begin{aligned} (\partial \underline{x_2} / \partial \underline{\varphi_2}) &= -M \cdot \underline{\sin \varphi_2} \cdot \underline{\cos \lambda_2} \\ (\partial \underline{y_2} / \partial \underline{\varphi_2}) &= -M \cdot \underline{\sin \varphi_2} \cdot \underline{\sin \lambda_2} \\ (\partial \underline{z_2} / \partial \underline{\varphi_2}) &= M \cdot \underline{\cos \varphi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

[Heck 95, (3.39b)].

Liekot iegūtos vektorus

$$(\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\lambda_2}) = ((\partial \underline{x_2} / \partial \underline{\lambda_2}), (\partial \underline{y_2} / \partial \underline{\lambda_2}), (\partial \underline{z_2} / \partial \underline{\lambda_2}))^T \quad (7.12)$$

$$(\partial \underline{cr_2} / \partial \underline{\varphi_2}) = ((\partial \underline{x_2} / \partial \underline{\varphi_2}), (\partial \underline{y_2} / \partial \underline{\varphi_2}), (\partial \underline{z_2} / \partial \underline{\varphi_2}))^T \quad (7.13)$$

izteiksmē (7.1), iegūst normāles vienības vektoru elipsoīda punktā P

$$\underline{n} = \underline{n}(\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2}) = (\underline{x_{2n}}, \underline{y_{2n}}, \underline{z_{2n}})^T, \quad (7.14)$$

kur

$$\underline{x_{2n}} = \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\cos \lambda_2};$$

$$\underline{y_{2n}} = \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\sin \lambda_2};$$

$$\underline{z_{2n}} = \underline{\sin \varphi_2};$$

[Heck 95, (3.40)].

Tādējādi, ja zināms vektors $\underline{n}(\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2})$, elipsoīda parametriskos $(\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2})$ vienādojumus

$$\left. \begin{aligned} \underline{x_2} &= N(\varphi_2) \cdot \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\cos \lambda_2} \\ \underline{y_2} &= N(\varphi_2) \cdot \underline{\cos \varphi_2} \cdot \underline{\sin \lambda_2}, \\ \underline{z_2} &= N(\varphi_2) \cdot \underline{\sin \varphi_2} \cdot (1 - e^2) \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

[sk. (5.28)]

var uzrakstīt īsāk

$$\underline{cr_2} = N(\varphi_2) \cdot \underline{n}(\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2})', \quad (7.16)$$

kur

$$N(\varphi_2) = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \underline{\sin^2 \varphi_2}};$$

$$\underline{n}' = \underline{n}(\underline{\lambda_2}, \underline{\varphi_2})' = (\underline{x_{2n}'}, \underline{y_{2n}'}, \underline{z_{2n}'})^T;$$

$$\underline{z_{2n}'} = \underline{z_{2n}} \cdot (1 - e^2).$$

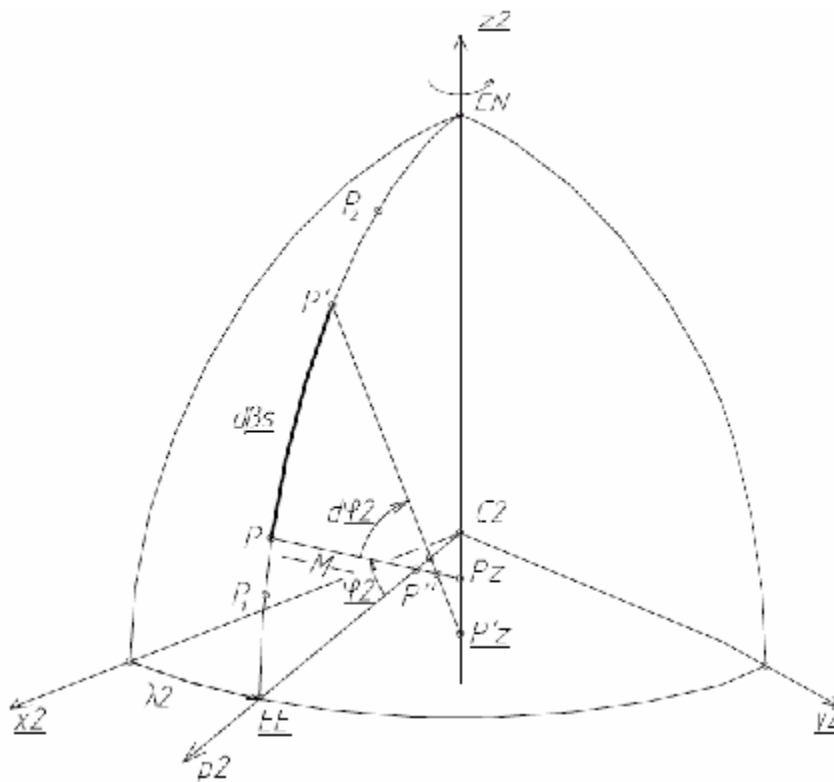
Uzdevums.

Pierādīt, ka vektora $\underline{n}$ garums ir 1 !

Pārbaudīt izteiksmes sfēriskam Zemes modelim !

8. Zemes elipsoīda meridiāna loka garums.

Zemes elipsoīda meridiāna loka garums dod iespēju pēc zināmiem meridiāna punktu elipsoidāliem platumiem, kas doti leņķa vienībās (grādos, minūtēs, sekundēs), iegūt elipsoīda loka garumu starp punktiem attāluma vienībās (metros). Meridiāna loka garums apmēram atbilst attālumam starp elipsoīda punktu pirmtēliem - iezīmētiem apvidus punktiem (s.a. ģeodēziskiem punktiem), skaitot to pa liektu un neregulāru Zemes fizisko virsmu. Meridiāna loku garumus plaši lieto elipsoīda gabalu attēlošanai plaknē (s.a. ģeogrāfiskā apvalka kartogrāfisko attēlu veidošanai).



17. zīm. Zemes elipsoīda meridiāna loka garums

Šeit:

$$P_1$$
$$P_2$$
$$\mathbf{ce2}_1 = (\lambda 2_1, \varphi 2_1, \mathbf{h} 2_1)^T$$
$$\mathbf{ce2}_2 = (\lambda2_2, \phi2_2, h2_2)^T$$
 $\lambda 2_2, \varphi 2_2, h 2_2$

P

P'

EN

C2

- elipsoīda meridiāna λ_2 loka sākuma punkts;
- elipsoīda meridiāna λ_2 loka beigu punkts;
- punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- punkta P_1 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no **ce2₁**;
- (punktam P_1 elipsoidālais augstums ($h_{21} = 0$);
- punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- punkta P_2 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no **ce2₂** ;
- (punktam P_2 elipsoidālais augstums $h_{22} = 0$);
- (punktiem P_1 un P_2 : $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_2$ un $\varphi_{21} < \varphi_{22}$);
- elipsoīda palīgpunkts uz punktu P_1 un P_2 meridiāna;
- elipsoīda palīgpunkts uz punktu P_1 un P_2 meridiāna;
- elipsoīda ziemeļpols (North Pole);
- elipsoīda centrs(s.a. kvaziģeocentrs);

$\underline{C2} \underline{EN}$	- elipsoīda rotācijas ass;
$\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$	- elipsoīda ekvatora plakne;
$\underline{EE}$	- elipsoīda ekvatora punkts;
$\underline{C2} \underline{EE} \underline{P} \underline{EN}$	- punkta P meridiāna plakne;
$\underline{P} \underline{Pz}$	- elipsoīda normāle punktā P (tā pieder meridiāna plaknei);
$\underline{Pz}$	- punkta P normāles un rotācijas ass $\underline{C2} \underline{EN}$ šķēlums;
$\underline{P'} \underline{Pz'}$	- elipsoīda normāle punktā P' (tā pieder meridiāna plaknei);
$\underline{Pz'}$	- punkta P' normāles un rotācijas ass $\underline{C2} \underline{EN}$ šķēlums;
$\underline{P''}$	- punktu P un P' normāļu krustpunkts [sk. $\underline{Pm}$ 4.3.zīm.];
$\underline{N}(\underline{\varphi2})$	- meridiāna šķērsliedzuma rādiuss (nogriežņa $\underline{P} \underline{Pz}$ garums).
$\underline{d\varphi2}$	- elipsoidālā platuma pieaugums no punkta P uz punktu P';
$\underline{d\varphi s}$	- meridiāna loka pieaugums no punkta P uz punktu P';
$\underline{cn5}_u = (\underline{\lambda5}_u, \underline{\varphi5}_u, \underline{w5}_u)^T$	- punkta P_u globālās naturālās (s.a dabīgās) koordinātas;
$\underline{\lambda5}_u, \underline{\varphi5}_u, \underline{w5}_u$	- punkta P_u astronomiskais garums, platums un smaguma spēka potenciāls no $\underline{cn5}_u$ [Heck 95,35];
	(veiksmīgi izveidotā ģeodēziskā sistēmā punkta P_u elipsoidālās koordinātas $\underline{\lambda2}_u, \underline{\varphi2}_u$ maz atšķiras no naturālām koordinātām $\underline{\lambda5}_u, \underline{\varphi5}_u$).

Atcerēsimies ģeodēzijā bieži lietojamo sakarību “(loks / leņķis) = (rādiuss / ρ)”, no kuras seko, ka “rādiuss = (loks $\cdot \rho$) / leņķis”. Ja leņķis ir izteikts radiānos, tad pārejas reizinātājs $\rho = 180^\circ / \pi$ ir lieks [sk. (4.2)]. No šīs sakarības izriet, ka “loks = rādiuss $\cdot$ leņķis radiānos”. Atšķirībā no riņķa līnijas loka rādiusa meridiāna liekuma rādiuss $\underline{M}(\underline{\varphi2})$ ir mainīgs.

Tādēļ, lai aprēķinātu meridiāna loku no punkta P_1 līdz P_2 , ņem meridiāna elementāro loku

$$\underline{d\varphi s} = \underline{M}(\underline{\varphi2}) \cdot \underline{d\varphi2}, \quad (8.1)$$

kur

$$\underline{M}(\underline{\varphi2}) = a \cdot (1 - e^2) / W^3(\underline{\varphi2}) \text{ [sk. (4.8)]};$$

a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no $\underline{gds}$ [sk. 1.lek.];

e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no $\underline{gds}$ [sk.1.lek], [Heck 95, 64, (3.6)];

$W(\underline{\varphi2}) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi2}}$ - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)].

Integrējot to visiem $\underline{\varphi2}$ no $\underline{\varphi2}_1$ līdz $\underline{\varphi2}_2$, iegūst, ka

$$\begin{aligned} \underline{\varphi s}_{12} &= \int_{\underline{\varphi2}_1}^{\underline{\varphi2}_2} \underline{M}(\underline{\varphi2}) \cdot \underline{d\varphi2} = \\ &= \int_{\underline{\varphi2}_1}^{\underline{\varphi2}_2} (a \cdot (1 - e^2) / W^3(\underline{\varphi2})) \cdot \underline{d\varphi2} = \\ &= \int_{\underline{\varphi2}_1}^{\underline{\varphi2}_2} (a \cdot (1 - e^2) \cdot W(\underline{\varphi2})^{-3}) \cdot \underline{d\varphi2} = \\ &= a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_{\underline{\varphi2}_1}^{\underline{\varphi2}_2} W(\underline{\varphi2})^{-3} \cdot \underline{d\varphi2}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

kur

$$W(\underline{\varphi2})^{-3} = (1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi2})^{-3/2}. \quad (8.3)$$

No (8.2) un (8.3) izriet, ka meridiāna loka garumu izteic otrās šķiras eliptisks integrālis. Tā aprēķināšanai ir šādas iespējas:

- zemintegrāļa izteiksmes izvēršanās pakāpju rindā un, ierobežojot tās locekļu skaitu, secīga integrēšana pa atsevišķiem locekļiem (s.a meridiāna loka iztaisnošana);

- lietiskā matemātikā aplūkoto skaitliskās integrēšanas tuvīno metožu lietošana datorvidē.

[Balodis, Kartogrāfija,16,18,393], [Cīrulis 90, 117], [HdV IV,75], [Kronbergs 1, 438].

Vispirms izvēršim zemintegrāļa izteiksmi (8.3) binomiālā rindā (s.a. veidosim binoma izvērējumu pēc I. Ņutona)

Atgādināsim, ka [Krastiņš 70,277]

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n. \quad (8.4)$$

Sekojoš (8.4), iegūstam izvirzījumu

$$\begin{aligned} W(\varphi_2)^{-3} &= (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} = \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 + \\ &\quad + \left(\frac{15}{8}\right) \cdot e^4 \cdot \sin^4 \varphi_2 + \\ &\quad + \left(\frac{35}{16}\right) \cdot e^6 \cdot \sin^6 \varphi_2 + \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi_2 &= \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \varphi_2) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) \end{aligned} \quad (8.6)$$

ir identisks pārveidojums, jo

$$\cos(2 \cdot \varphi_2) = 1 - 2 \cdot \sin^2 \varphi_2 \quad [\text{Bartsch } 67, 189], [\text{Выгодский } 54, 353].$$

Pēc parauga (8.6) var leņķa sinusa pakāpes izteikt kā pāru leņķa kosinusus

$$\sin^2 \varphi_2 = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) \quad (8.7)$$

$$\sin^4 \varphi_2 = \left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \cos(4 \cdot \varphi_2) \quad (8.8)$$

Ievietojot izteiksmes (8.7) un (8.8) izteiksmē (8.5), iegūstam, ka

$$\begin{aligned} W(\varphi_2)^{-3} &= (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} = \\ &= 1 + \left(\frac{3}{2}\right) \cdot e^2 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2)\right) + \\ &\quad + \left(\frac{15}{8}\right) \cdot e^4 \cdot \left(\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \cos(4 \cdot \varphi_2)\right) + \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

Turpināsim izteiksmes (8.9) pārveidošanu un sakārtošanu integrēšanai

$$\begin{aligned} W(\varphi_2)^{-3} &= (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} = \\ &= 1 + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot e^2 - \\ &\quad - \left(\frac{3}{4}\right) \cdot e^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) + \\ &\quad + \left(\frac{45}{64}\right) \cdot e^4 - \\ &\quad - \left(\frac{15}{16}\right) \cdot e^4 \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) + \\ &\quad + \left(\frac{15}{64}\right) \cdot e^4 \cdot \cos(4 \cdot \varphi_2) + \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} W(\varphi_2)^{-3} &= (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} = \\ &= + \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot e^2 + \left(\frac{45}{64}\right) \cdot e^4 + \dots\right) - \\ &\quad - \left(\left(\frac{3}{4}\right) \cdot e^2 + \left(\frac{15}{16}\right) \cdot e^4 + \dots\right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_2) + \end{aligned}$$

$$+ ((15/64) \cdot e^4 + \dots) \cdot \cos(4\varphi_2) - \dots \quad (8.11)$$

Ievēdīsim apzīmējumus [HdV IV, 75]

$$\begin{aligned} \underline{aa} &= (1 + (3/4) \cdot e^2 + (45/64) \cdot e^4 + \dots) \\ \underline{bb} &= ((3/4) \cdot e^2 + (15/16) \cdot e^4 + \dots) \\ \underline{cc} &= ((15/64) \cdot e^4 + \dots) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Ievērosim, ka šie koeficienti ir tikai elipsoīda 1.ekscentritātes funkcijas.

Tādējādi zemintegrāļa izteiksme (8.3) ir pārveidota šādā integrēšanai piemērotā formā

$$\begin{aligned} W(\varphi_2)^{-3} &= (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2} = \\ &= \underline{aa} - \underline{bb} \cdot \cos(2\varphi_2) + \underline{cc} \cdot \cos(4\varphi_2) - \dots \end{aligned} \quad (8.13)$$

[Зданович 70, 57], [Heck 95, 229, pamatuzdevumu sekas ($\Delta\lambda_2 = 0, \alpha_3 = 0$)], [Balodis 38,20]

Meridiāna loka garumu no elipsoidālā platuma φ_{21} līdz φ_{22} izteic integrālis

$$\varphi_{S12} = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_{\varphi_{21}}^{\varphi_{22}} (\underline{aa} - \underline{bb} \cdot \cos(2\varphi_2) + \underline{cc} \cdot \cos(4\varphi_2) - \dots) \cdot d\varphi_2, \quad (8.14)$$

Atcerēsimies, ka kosinusa funkcijai integrālis

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + c. \quad (8.15)$$

Veiksim (8.14) integrēšanu pa atsevišķiem saskaitāmiem no platuma φ_{21} līdz φ_{22} .

Tās rezultāts ir meklētais meridiāna loka garums

$$\begin{aligned} \varphi_{S12} &= a \cdot (1 - e^2) \cdot (\underline{aa} \cdot (\varphi_{22} - \varphi_{21}) - \\ &\quad - (\underline{bb}/2) \cdot (\sin(2\varphi_{22}) - \sin(2\varphi_{21})) + \\ &\quad + (\underline{cc}/4) \cdot (\sin(4\varphi_{22}) - \sin(4\varphi_{21})) - \\ &\quad - \dots), \end{aligned} \quad (8.16)$$

kur

$\varphi_{21}, \varphi_{22}$ – meridiāna λ_2 loka sākuma punkta P_1 un beigu punkta P_2 elipsoidālie platumi radiānos [Закатов (7.7)];

a – ģeodēziskās sistēmas (gds) elipsoīda lielās pusass garums;

$\underline{aa}, \underline{bb}, \underline{cc}, \dots$ – ģeodēziskās sistēmas (gds) elipsoīda 1.ekscentritātes funkcijas (sk. 8.12).

Otrās šķiras eliptisku integrāli [sk. (8.2)]

$$\varphi_{S12} = \int_{\varphi_{21}}^{\varphi_{22}} M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2$$

var aprēķināt arī, lietojot skaitliskās integrēšanas tuvinās metodes. Parasti datorvidē izvēlas Simpsona (T.Simpsons (1710.- 1761.g.) –angļu matemātiķis) ieteikto paņēmieni. Vienkāršākā gadījumā īsiem meridiāna lokiem (φ_{S12} nepārsniedz 500km) integrēšanas intervālu daļa uz pusēm un meridiāna loka garumu iegūst kā

$$\varphi_{S12} = ((\varphi_{22} - \varphi_{21}) / 6) \cdot (M(\varphi_{21}) + 4 \cdot M(\varphi_{2m}) + M(\varphi_{22})), \quad (8.17)$$

kur

φ_{2m} – meridiāna loka vidējais platums ($\varphi_{2m} = (\varphi_{21} + \varphi_{22}) / 2$).

[Kronbergs 1, 438, 421], [Практ. 82, 259], [sk. Set_Bs_Simpson], [Демидович 66, 584]

Piezīmes.

1. Lai aprēķinātu meridiāna loka garumu no ekvatora punkta EE līdz meridiāna punktam P platumā φ_2 , izteiksmē (8.16) vai (8.17) liek $\varphi_1 = 0$ un $\varphi_2 = \varphi_2$.

Iegūto izteiksmi

$$\varphi_s(\varphi_2) = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left(\frac{aa}{2} \cdot \varphi_2 - \left(\frac{bb}{2} \right) \cdot \sin(2 \cdot \varphi_2) + \left(\frac{cc}{4} \right) \cdot \sin(4 \cdot \varphi_2) - \dots \right), \quad (8.18)$$

kur φ_2 – punkta P elipsoidālais platumus radiānos,

lieto abscisas aprēķināšanai elipsoīdam piekārtotā koordinātu plaknē [Закатов (7.8)].

2. Ievietojot izteiksmē (8.18) elipsoīda ziemeļpola EN platumu $\varphi_2 = 90^\circ / \rho^\circ$, iegūst aktuālās ģeodēziskās sistēmas (**gds**) meridiāna ceturtdaļas garumu. Apmēram pirms diviem gadsimtiem 1798.gadā Francijā zinātnieku grupa (Delambrs (1749-1822) un Mešens (1744-1804), piedaloties Laplasam (1740-1827) un Borda (1733-1799)) darbā "Base du systeme metrique decimal" aprakstīja meridiāna loka garuma mērīšanu starp Formentēru (pie Parīzes) un Denkerku (pie Kalē). Pēc šī loka aprēķinātais Parīzes meridiāna ceturtdaļas garums 5 130 739.8 Perū toazi tika dalīts ar 10 000 000 un nosaukts par **metru**. Darbā lietots Delambra elipsoīds ($a = 6\,375\,653$ m, $f = 1 / 334.0$) [Balodis, Mērnieceība, 30]. Jāuzsver, ka metrs ir izcils ģeodēzisko darbību rezultāts. Atzīmēsim, ka "GRS_80 metrs" ir 1.00020.

3. Īsam meridiāna lokam drīkst lietot sakarību

$$\varphi_{s12} = a \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \left(1 - \left(\left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_m) \right) \cdot e^2 \right), \quad (8.19)$$

kur

a – ģeodēziskās sistēmas (**gds**) elipsoīda lielās pusass garums;
 e – elipsoīda 1.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek];
 φ_1 – meridiāna loka sākuma punkta P_1 elipsoidālais platumus radiānos;
 φ_2 – meridiāna loka beigu punkta P_2 elipsoidālais platumus radiānos;
 φ_m – meridiāna loka vidējais platumus ($\varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$).
 [Закатов (7.11)];

4. Izteiksmē (8.19) ir divi elipsoīda parametri - a un e . Atgādināsim, ka elipsoīda polārais saplakums f , ko blakus lielās pusass garumam a ietver ģeodēziskā sistēmā (**gds**), ir elipsoīda 1.ekscentricitātes funkcija: $f = 1 - \sqrt{1 - e^2}$ [sk. (1.12)].
5. Elipsoīda parametru a un f noteikšana bija pēdējos gadsimtos veiktās t.s. **grādu mērīšanas** uzdevums. Vienkāršākā gadījumā izvēlējās divus atšķirīgus dažādu meridiānu lokus un ar triangulācijas (trijstūru virknes) palīdzību, veicot nopietnas ģeodēziskas un astronomiskas darbības, ieguva loku garumus φ_{s12} , φ_{s34} un punktu $P_1, \dots, P_4$ astronomiskos platumus ($\varphi_1, \dots, \varphi_4$) no **cn5**₁ ... **cn5**₄. Nosacīti pielīdzinot astronomiskos un elipsoidālos platumus, (s a neievērojot svērteņa līnijas novirzes no elipsoīda normāles) pieņēma, ka $\varphi_u \approx \varphi_{su}$ visiem $u = 1, \dots, 4$. Vienkāršoti (t.i. bez vismazāko kvadrātu metodes lietošanas) elipsoīda parametrus a un f ieguva no divu vienādojumu sistēmas ar diviem nezināmiem:

$$\begin{aligned} \varphi_{s12} &= a \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \left(1 - \left(\left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{m12}) \right) \cdot e^2 \right), \\ \varphi_{s34} &= a \cdot (\varphi_4 - \varphi_3) \cdot \left(1 - \left(\left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \cos(2 \cdot \varphi_{m34}) \right) \cdot e^2 \right), \end{aligned} \quad (8.20)$$

kur

$$\varphi_{m12} = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$$

$$\varphi_{5m_{34}} = (\varphi_{5_3} + \varphi_{5_4}) / 2$$

6. Līdz 40 km garu meridiāna loku drīkst aizstāt ar riņķa līnijas nogriezni, kuras garums ir

$$\varphi_{S_{12}} = \underline{Mm} \cdot (\varphi_{2_2} - \varphi_{2_1}), \quad (8.21)$$

kur

$$\underline{Mm} = (a \cdot (1 - e^2)) \cdot W(\varphi_{2m})^{-3} \text{ - meridiāna loka vidējais liekuma rādiuss;}$$

$$\varphi_{2m} = (\varphi_{2_1} + \varphi_{2_2}) / 2 \quad \text{- meridiāna loka vidējais platums;}$$

$$(\varphi_{2_2} - \varphi_{2_1}) \quad \text{- punktu } P_1 \text{ un } P_2 \text{ platumu starpība radiānos.}$$

7. Lietderīgi ievērot, ka Rīgas apkārtnē ($\varphi_2 = 57^\circ$) starp elipsoidālo platumu starpībām

$$\Delta\varphi_2 = (\varphi_{2_2} - \varphi_{2_1}) \text{ un meridiāna loka garumiem } \varphi_{S_{12}} \text{ pastāv šādas sakarības:}$$

$$1^\circ \text{ atbilst } 111\,000 \text{ m}$$

$$1' \text{ atbilst } 1\,800 \text{ m}$$

$$1'' \text{ atbilst } 30 \text{ m.}$$

8. Līdz šim meridiāna loka izteiksmēs liekuma rādiusu

$$M(\varphi_2) = a \cdot (1 - e^2) / W^3(\varphi_2) \text{ [sk. (4.8)] vai arī}$$

$$M(\varphi_2) = a \cdot (1 - e^2) \cdot W(\varphi_2)^{-3},$$

kur

$$W(\varphi_2)^{-3} = (1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2)^{-3/2},$$

izteicām ar 1.sferoidisko funkciju $W(\varphi_2)$.

Šeit, ievērojot sakarību

$$W(\varphi_2) = V(\varphi_2) \cdot (1 - e^2)^{1/2}, \quad (8.22)$$

kur $V(\varphi_2)$ – elipsoidālā platuma 2.sferoidiskā funkcija,

[sk.(4.13)], [Морозов, 13],

parādīsim, ka arī

$$M(\varphi_2) = c \cdot V(\varphi_2)^{-3}, \quad (8.23)$$

kur

c – elipsoīda polārais liekuma rādiuss [sk. (1.19), ..., (1.24)]

Tiešām

$$M(\varphi_2) = a \cdot (1 - e^2) \cdot W(\varphi_2)^{-3} =$$

$$= a \cdot (1 - e^2) \cdot (V(\varphi_2) \cdot (1 - e^2)^{1/2})^{-3} =$$

$$= a \cdot (1 - e^2) \cdot V(\varphi_2)^{-3} \cdot (1 - e^2)^{-3/2} =$$

$$= a \cdot (1 - e^2)^{1 - (3/2)} \cdot V(\varphi_2)^{-3} =$$

$$= a \cdot (1 - e^2)^{-(1/2)} \cdot V(\varphi_2)^{-3} =$$

$$= c \cdot V(\varphi_2)^{-3},$$

$$\text{kur } c = a \cdot (1 - e^2)^{-(1/2)} \text{ [sk. (1.21)]}$$

9. Meridiāna loka garumu no ekvatora līdz platumam φ_2 izteic arī integrālis

$$\varphi_S(\varphi_2) = \int_0^{\varphi_2} M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2 = c \cdot \int_0^{\varphi_2} V(\varphi_2)^{-3} \cdot d\varphi_2 \quad (8.24)$$

Rīkojoties līdzīgi kā ar $W(\varphi_2)^{-3}$ izvīrējumu, var iegūt šādu [Heck 95, (7.29)], [

Set_Bs_Heck] izteiksmi meridiāna loka garuma aprēķināšanai

$$\varphi_S(\varphi_2) = \underline{alp} \cdot \varphi_2 + \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2}{(\underline{bt0} + \underline{cs}^2 \cdot (\underline{bt2} + \underline{cs}^2 \cdot (\underline{bt4} + \underline{cs}^2 \cdot (\underline{bt6})))}, \quad (8.25)$$

$$\text{kur } \underline{cs}^2 = \underline{\cos}^2 \varphi_2 \text{ un}$$

$$\underline{alp} = 6\,367\,449.146 \text{ m}$$

$$\underline{bt0} = -32\,144.4802 \text{ m}$$

$$\underline{bt2} = +135.3669 \text{ m}$$

$$\underline{bt4} = -0.7095 \text{ m}$$

$$\underline{bt6} = +0.0040 \text{ m}$$

ir GRS-80 elipsoīdam un Latvijas 1992.gada ģeodēziskai sistēmai (LGS –92) atbilstoši parametri [sk. Heck 95 , Referenzsystem 80 , turpat arī Bessel, Int.Ellipsoid, Krassowski, Referenzsystem 67].

10. Iespējams arī pretējs risinājums: pēc dotā meridiāna loka garuma $\varphi_s(\varphi_2)$ atrast punkta P elipsoidālo platumu φ_2 radiānos [Heck 95, (7.30)]

$$\tilde{\varphi}_2 = \varphi_s(\varphi_2) / \underline{alp} - \text{elipsoidālā platumā prognoze}; \quad (8.26)$$

$$\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 + \frac{\sin \tilde{\varphi}_2 \cdot \cos \tilde{\varphi}_2}{\left(\underline{b0} + \underline{cs}^2 \cdot \left(\underline{b2} + \underline{cs}^2 \cdot \left(\underline{b4} + \underline{cs}^2 \cdot \left(\underline{b6} \right) \right) \right) \right)}, \quad (8.27)$$

kur $\underline{cs}^2 = \cos^2 \tilde{\varphi}_2$ un

$$\underline{alp} = 6\,367\,449.146 \text{ m}$$

$$\underline{b0} = 0.005\,022\,8940$$

$$\underline{b2} = 0.000\,029\,3706$$

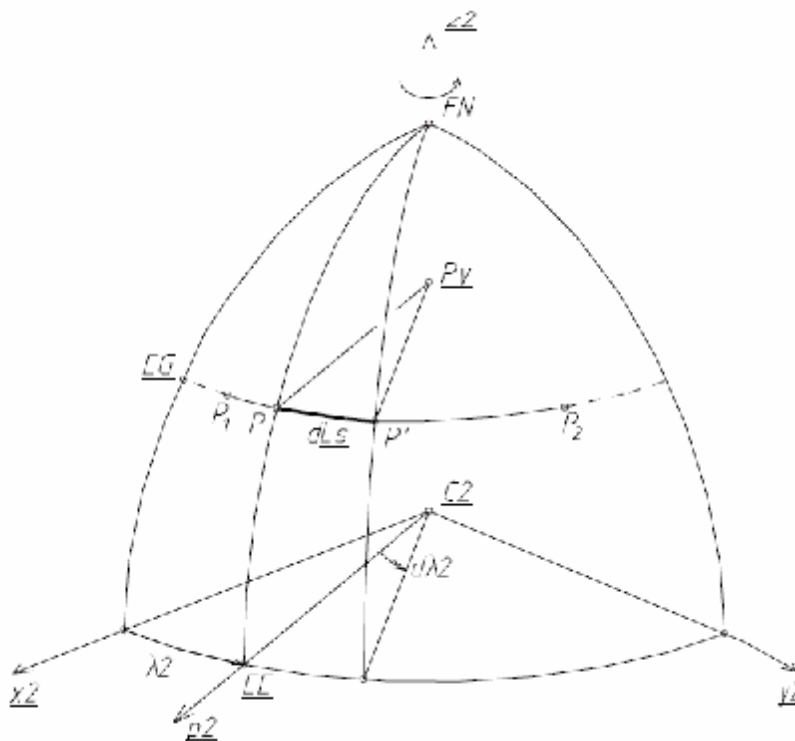
$$\underline{b4} = 0.000\,000\,2351$$

$$\underline{b6} = 0.000\,000\,0022$$

ir, tāpat kā iepriekš, LGS-92 atbilstoši parametri (radiānos) [sk. Heck 95, Tab. 7.1].

9. Zemes elipsoīda paralēles loka garums.

Zemes elipsoīda paralēles loka garums dod iespēju pēc zināmiem divu meridiānu punktu elipsoidāliem garumiem, kas doti leņķa vienībās (grādos, minūtēs, sekundēs), dotā platumā iegūt elipsoīda paralēles loka garumu starp punktiem attāluma vienībās (metros). Paralēles loka garums apmēram atbilst attālumam starp elipsoīda punktu pirmtēliem - iezīmētiem apvidus punktiem (s.a. ģeodēziskiem punktiem), skaitot to pa liektu un neregulāru Zemes fizisko virsmu. Paralēles loka garumus plaši lieto elipsoīda gabalu attēlošanai plaknē (s.a. ģeogrāfiskā apvalka kartogrāfisko attēlu veidošanai).



18. zīm. Zemes elipsoīda paralēles loka garums

Šeit:

- | | |
|--|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| P ₁ | - elipsoīda paralēles φ_2 loka sākuma punkts; |
| P ₂ | - elipsoīda paralēles φ_2 loka beigu punkts; |
| $\underline{ce2_1} = (\underline{\lambda2_1}, \underline{\varphi2_1}, \underline{h2_1})^T$ | - punkta P ₁ kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| $\underline{\lambda2_1}, \underline{\varphi2_1}, \underline{h2_1}$ | - punkta P ₁ elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no ce2₁ ; |
| | (punktam P ₁ elipsoidālais augstums ($\underline{h2_1} = 0$); |
| $\underline{ce2_2} = (\underline{\lambda2_2}, \underline{\varphi2_2}, \underline{h2_2})^T$ | - punkta P ₂ kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| $\underline{\lambda2_2}, \underline{\varphi2_2}, \underline{h2_2}$ | - punkta P ₂ elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no ce2₂ ; |
| | (punktam P ₂ elipsoidālais augstums $\underline{h2_2} = 0$); |
| | (punktiem P ₁ un P ₂ : $\underline{\lambda2_1} = \underline{\lambda2_2} = \underline{\lambda2}$ un $\underline{\varphi2_1} < \underline{\varphi2_2}$); |
| P | - elipsoīda paralēles palīgpunkts starp punktiem P ₁ un P ₂ ; |
| P' | - elipsoīda paralēles palīgpunkts starp punktiem P ₁ un P ₂ ; |
| EN | - elipsoīda ziemeļpols (North Pole); |

C_2	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
$C_2 \text{ EN}$	- elipsoīda rotācijas ass;
$C_2 \text{ x}_2 \text{ y}_2$	- elipsoīda ekvatora plakne;
EE	- elipsoīda ekvatora punkts;
$C_2 \text{ EE P EN}$	- punkta P meridiāna plakne;
$d\lambda_2$	- elipsoidālā garuma pieaugums no punkta P uz punktu P';
$d\lambda_s$	- paralēles loka pieaugums no punkta P uz punktu P';
$N(\varphi_2)$	- meridiāna šķērsliekuma rādiuss (nogriežņa P $\underline{P_z}$ garums).
$p_2(\varphi_2)$	- paralēles rādiuss platumā φ_2 (nogriežņa P $\underline{P_y}$ garums).

No sakarības “loks = rādiuss · leņķis radiānos” [sk. 8.lek.] izriet, ka paralēles elementārais loks ir

$$d\lambda_s = p_2(\varphi_2) \cdot d\lambda_2, \quad (9.1)$$

kur

$p_2(\varphi_2)$ - paralēles φ_2 rādiuss;

Paralēles rādiusu platumā φ_2 izteic D.Menjē teorēma [sk. (4.9)]

$$p_2(\varphi_2) = N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2, \quad (9.2)$$

kur

$$N(\varphi_2) = a / W(\varphi_2) \text{ - meridiāna šķērsliekuma rādiuss platumā } \varphi_2; \text{ [sk. (4.10)] } \quad (9.3)$$

$$W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} \text{ - elipsoidālā platumā 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)] } \quad (9.4)$$

a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];

e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek], [Heck 95, 64, (3.6)].

Atcerēsimies, ka Zemes elipsoīda jebkura paralēle ir riņķa līnija.

Paralēles rādiuss p_2 fiksētā ģeodēziskā sistēmā **gds** ir vienīgi paralēles elipsoidālā platumā φ_2 funkcija un tādēļ tas, aprēķinot paralēles loka garumu, kā riņķa līnijas rādiuss paliek nemainīgs.

Izteiksim paralēles φ_2 loka garumu no punkta P_1 līdz punktam P_2 kā integrāli.

Integrējot (9.1) visiem λ_2 no λ_{21} līdz λ_{22} , iegūst, ka

$$\begin{aligned} \lambda_{s12} &= \int_{\lambda_{21}}^{\lambda_{22}} p_2(\varphi_2) \cdot d\lambda_2 = \\ &= p_2(\varphi_2) \cdot \int_{\lambda_{21}}^{\lambda_{22}} d\lambda_2 = \\ &= p_2(\varphi_2) \cdot (\lambda_{22} - \lambda_{21}) \end{aligned} \quad (9.5)$$

[sk. Krastiņš, 214], [Закаров (8.2)], [Balodis Kartogr., 16], [Cīrulis 90, 117].

Tātad paralēles loka garums no punkta P_1 līdz punktam P_2 ir

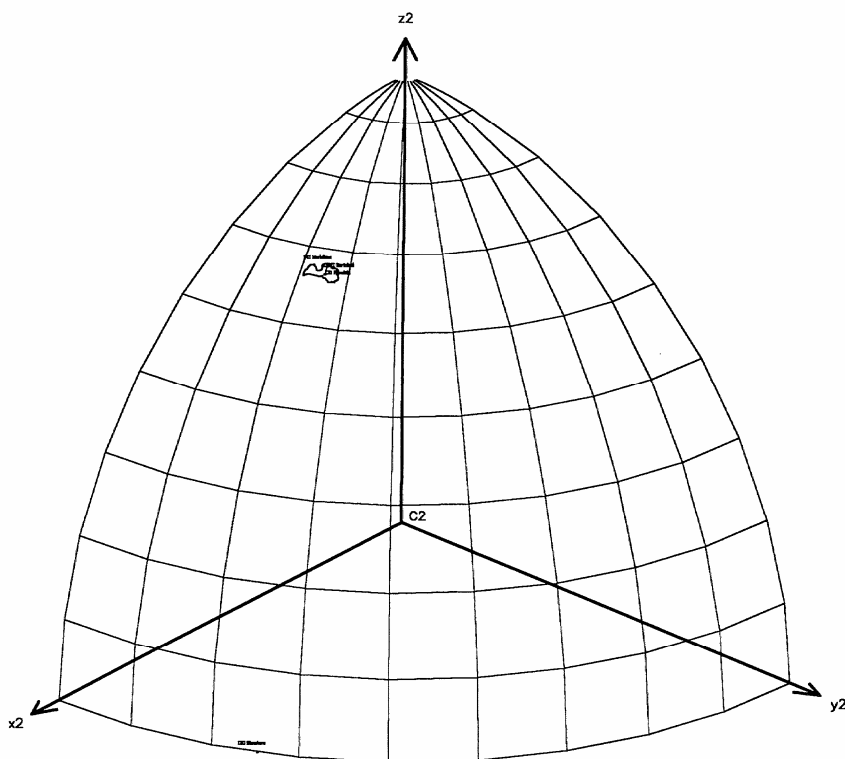
$$\lambda_{s12} = N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot (\lambda_{22} - \lambda_{21}), \quad (9.6)$$

kur

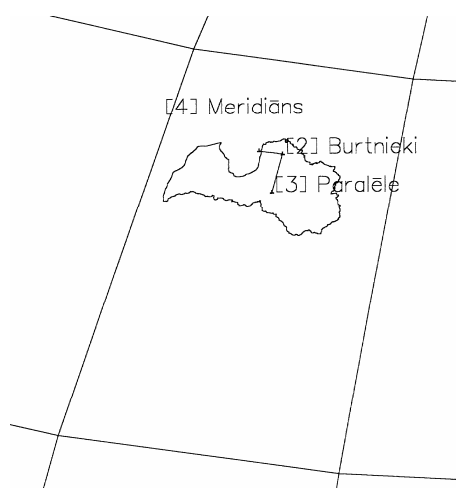
$$N(\varphi_2) = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2}$$

Piemērs

[sk. 8. un 9.lek.], [sk. datorprogrammu “gds_hgh_” 6.uzd.]



19. zīm. Zemes elipsoīda meridiāna un paralēles loku garumu aprēķināšana.
Kopskats kvaziģeocentriskā taisnleņķa koordinātu telpā.
Zemes elipsoīds attēlots kā $10^\circ \cdot 10^\circ$ trapeču sistēma.
Trapecē $(20^\circ, 50^\circ) - (30^\circ, 60^\circ)$ attēlota Latvijas robeža, uzdevumā lietotie elipsoīda punkti un loki starp tiem



20. zīm. Zemes elipsoīda meridiāna un paralēles loku garumu aprēķināšana.
Trapece $(20^\circ, 50^\circ) - (30^\circ, 60^\circ)$ kvaziģeocentriskā taisnleņķa koordinātu telpā. Elipsoīda punkti: [2] - ģeodēziskā punkta “Burtnieki” attēls; [3] – “Burtnieku” meridiāna punkts 1° uz dienvidiem; [4] - “Burtnieku” paralēles punkts 1° uz rietumiem.

Zemes elipsoīda meridiāna un paralēles loku garumu aprēķināšanas protokols
Datorprogramma "gds_hgh_" (ver. 00.05.19.).

6.

Meridiāna un paralēles loku garumi

00.11.05 18h 56m 51s

Uzdevums: 6.1

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92

Elipsoīds: GRS_80

Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[1] Burtnieki 25:15:38.0296 **57:41:22.8839** 83.606

Paralēles elipsoidālais platums: **56:41:22.8839**

Iegūts:

Elipsoīda punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] Burtnieki 25:15:38.0296 **57:41:22.8839** 0.000

Elipsoīda punkts "Paralēle"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[3] Paralēle 25:15:38.0296 **56:41:22.8839** 0.000

Elipsoīda punkts "Ekvators"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[5] Ekvators 25:15:38.0296 **0:00:00.0000** 0.000

Meridiāna loka garums no 2.līdz 3.punktam: 111363.257

...pēc izvirzījuma,sk.HdV IV,S.75

Meridiāna loka garums no 2.līdz 3.punktam: 111363.257

...pēc Simpsona,sk.Kronbergs 1,421.lpp.

Meridiāna loka garums no 2.līdz 3.punktam: 111363.257

...pēc Heck,sk.Heck 95,232.lpp.

Meridiāna loka garums no 2.līdz 3.punktam: 111363.893 (~)

...pēc Zakatov (īsam lokam),sk.Zakatov 76,(7.11)

Kontrole:

2.punkta elipsoidālais **platums pēc loka garuma**: 57:41:22.8838

Uzdevums: 6.2

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92

Elipsoīds: GRS_80

Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[1] Burtnieki **25:15:38.0296** 57:41:22.8839 83.606

Meridiāna elipsoidālais garums: **24:15:38.0296**

Iegūts:

Elipsoīda punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] Burtnieki **25:15:38.0296** 57:41:22.8839 0.000

Elipsoīda punkts "Meridiāns"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[4] Meridiāns **24:15:38.0296** 57:41:22.8839 0.000

Paralēles loka garums no 4.punkta līdz 2.punktam: 59643.536

00.11.05 18h 56m 51s

Meridiāna un paralēles loku garumi

6. _____

Piezīme [salīdzināt ar 8.lek. 7.piezīmi].

Burtnieku apkārtnē ($\varphi_2 = 57^\circ 41'$) starp elipsoidālo koordinātu starpībām $\Delta\lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)$,

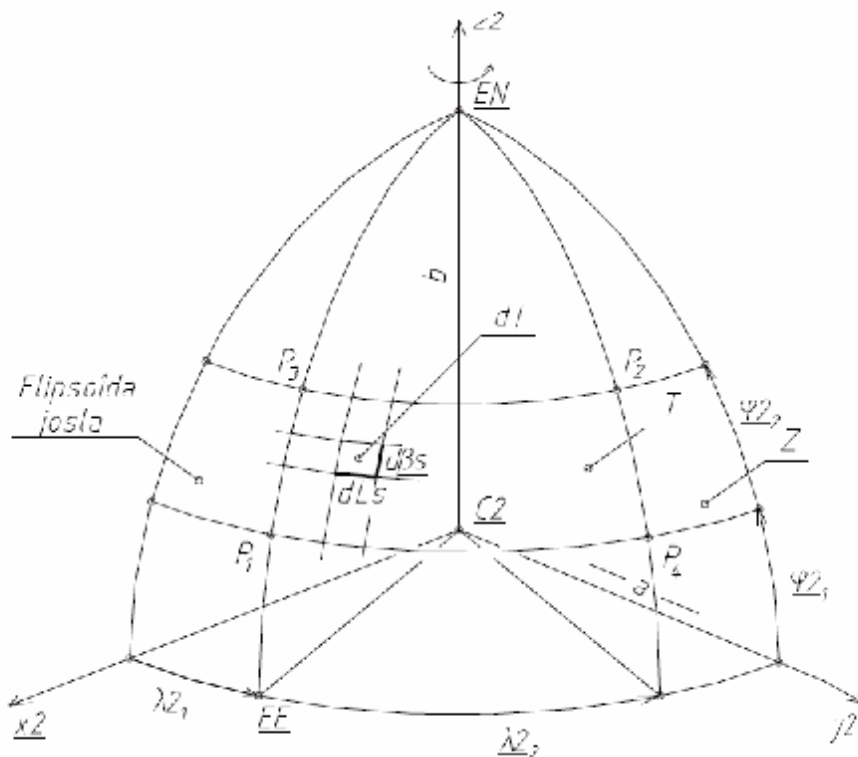
$\Delta\varphi_2 = (\varphi_2 - \varphi_1)$ un loku garumiem λ_{S12} , φ_{S12} pastāv šādas sakarības:

elipsoidālā garuma 1° atbilst 59 643 m; 1' atbilst 994 m; 1" atbilst 17 m.

elipsoidālā platuma 1° atbilst 111 363 m; 1' atbilst 1 856 m; 1" atbilst 31 m.

10. Zemes elipsoīda trapeces laukums.

Zemes elipsoīda meridiāni un paralēles krustojoties veido vienādsānu elipsoidālās trapeces. Trapeces sāni $P_1 P_3$ un $P_4 P_2$ (sk. 10.1.zīm.) ir dažādu elipsoidālo garumu meridiānu loki. Trapeces pamati $P_1 P_4$ un $P_3 P_2$ - dažādu elipsoidālo platumu paralēļu loki. Elipsoīda trapeces laukuma noteikšana ir cieši saistīta gan ar atsevišķu Zemes gabalu laukumu noteikšanu, gan arī ar visas Zemes laukuma noteikšanu. Saprotams, ka līdz tam uz Zemes fiziskās virsmas iegūtie līniju nogriežņu un leņķu mērījumi jāpārnes (s.a. jāreducē) uz valstī apstiprinātās ģeodēziskās sistēmas **gds** elipsoīda.



20. zīm. Zemes elipsoīda trapeces laukums

Šeit:

- a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];
- b - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];
- e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek];
- P_1 - elipsoīda paralēles φ_{2_1} loka sākuma punkts;
- P_2 - elipsoīda paralēles φ_{2_2} loka beigu punkts;
- P_3 - meridiāna loka λ_{2_1} galapunkts punkts;
- P_4 - meridiāna loka λ_{2_2} sākuma punkts;
- $\underline{ce2_1} = (\lambda_{2_1}, \varphi_{2_1}, h_{2_1})^T$ - punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- $\lambda_{2_1}, \varphi_{2_1}, h_{2_1}$ - punkta P_1 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platumu un augstums no **ce2₁**;
- (punktam P_1 elipsoidālais augstums ($h_{2_1} = 0$);
- $\underline{ce2_2} = (\lambda_{2_2}, \varphi_{2_2}, h_{2_2})^T$ - punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- $\lambda_{2_2}, \varphi_{2_2}, h_{2_2}$ - punkta P_2 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platumu un augstums no **ce2₂** ;
- (punktam P_2 elipsoidālais augstums $h_{2_2} = 0$);
- $\underline{ce2_3} = (\lambda_{2_3}, \varphi_{2_3}, h_{2_3})^T$ - punkta P_3 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

$\lambda_3, \varphi_3, h_3$	- punkta P_3 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no ce ₃ ;
ce ₄ = $(\lambda_4, \varphi_4, h_4)^T$	(punktam P_1 elipsoidālais augstums ($h_1 = 0$);
$\lambda_4, \varphi_4, h_4$	- punkta P_4 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
	- punkta P_4 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no ce ₄ ;
$P_1 P_3 P_2 P_4$	(punktam P_4 elipsoidālais augstums $h_4 = 0$);
$P_1 P_4$	- elipsoīda trapece;
$P_3 P_2$	- elipsoīda trapeces dienvidu pamats;
$P_1 P_3$	- elipsoīda trapeces ziemeļu pamats;
$P_4 P_2$	- elipsoīda trapeces rietumu sāns;
<u>EN</u>	- elipsoīda trapeces austrumu sāns;
<u>C2</u>	- elipsoīda ziemeļpols (North Pole);
<u>C2 EN</u>	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
<u>C2 x2 y2</u>	- elipsoīda rotācijas ass;
<u>dλs</u>	- elipsoīda ekvatora plakne;
<u>dφs</u>	- paralēles loka elementārais pieaugums;
<u>dT</u>	- meridiāna loka elementārais pieaugums;
T	- elipsoīda trapeces laukuma elements;
Z	- elipsoīda trapeces $P_1 P_3 P_2 P_4$ laukums;
<u>Δφ2</u>	- elipsoīda joslas ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \cdot \pi$) laukums;
<u>φ2</u>	- elipsoīda joslas platums radiānos;
	- elipsoīda joslas vidējais platums radiānos;

[sk. ПРАКТ по ВЫСШ. 82, 260], [HdV IV,95]

Meridiāna un paralēles loku elementi ir [sk. (8.1) un (9.1)]

$$d\phi_s = M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2, \quad (10.1)$$

$$d\lambda_s = p_2(\varphi_2) \cdot d\lambda_2, \quad (10.2)$$

kur

$$M(\varphi_2) = a \cdot (1 - e^2) / W(\varphi_2)^3 - \text{meridiāna liekuma rādiuss platumā } \varphi_2; \quad (10.3)$$

$$W(\varphi_2) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_2} - \text{elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija}; \quad (10.4)$$

dφ2 - elipsoidālā platuma elementārais pieaugums;

dλ2 - elipsoidālā garuma elementārais pieaugums;

a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];

e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek], [Heck 95, 64, (3.6)];

$$p_2(\varphi_2) = N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 - \text{paralēles rādiuss platumā } \varphi_2; \quad (10.5)$$

$$N(\varphi_2) = a / W(\varphi_2) - \text{meridiāna šķērsliekuma rādiuss platumā } \varphi_2; \quad (10.6)$$

Elipsoīda trapeces laukuma elements ir meridiāna loka un paralēles loka elementāro pieaugumu reizinājums

$$\begin{aligned} dT &= d\phi_s \cdot d\lambda_s = \\ &= M(\varphi_2) \cdot p_2(\varphi_2) \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2 = \\ &= M(\varphi_2) \cdot N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2 = \\ &= a^2 \cdot (1 - e^2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot W(\varphi_2)^{-4} \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2. \end{aligned} \quad (10.7)$$

[Закатов 76, 42, Морозов 79, 33]

Izteiksmē (10.7) reizinātāju “ $a^2 \cdot (1 - e^2)$ ” aizstāsim ar “ b^2 ”.

Tiešām, [sk.(1.16)]

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \text{ un}$$

$$a^2 \cdot (1 - e^2) = b^2 \quad (10.8)$$

Ievērojot (10.8), elipsoīda trapeces laukuma elements (10.7) vienkāršojas līdz

$$dT = b^2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot W(\varphi_2)^{-4} \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2 \quad (10.9)$$

Kā redzams, laukuma elementa dT galvenā daļa nav atkarīga no elipsoidālā garuma λ_2 .

Tādējādi **elipsoīda trapeces laukumu** izteic divkāršais integrālis [sk. Buiķis 97, 200]

$$T = b^2 \cdot \int_{\lambda_{2[1]}}^{\lambda_{2[2]}} \int_{\varphi_{2[1]}}^{\varphi_{2[2]}} \cos \varphi_2 \cdot W(\varphi_2)^{-4} \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2 \quad (10.10)$$

Liekot izteiksmē (10.10) $\lambda_{2_1} = 0$, $\lambda_{2_2} = 2 \cdot \pi$ un $\varphi_{2_1} = 0$, $\varphi_{2_2} = \pi / 2$, iegūst puselipsoīda laukumu.

Ja (10.10) integrēšanu veic visiem elipsoidāliem garumiem λ_2 no intervāla [0, $2 \cdot \pi$], tad iegūst **elipsoīda joslas laukumu**

$$Z = 2 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot \int_{\varphi_{2[1]}}^{\varphi_{2[2]}} \cos \varphi_2 \cdot W(\varphi_2)^{-4} \cdot d\varphi_2 \cdot d\lambda_2 \quad (10.11)$$

[sk. Багратуни 47]

Praktiski elipsoīda joslas laukumu iegūst pēc šāda (10.10) izvirzījuma

$$Z = 4 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot (\underline{aa}' \cdot \sin((1/2) \cdot \underline{\Delta\varphi_2}) \cdot \cos(\varphi_2) - \underline{bb}' \cdot \sin((3/2) \cdot \underline{\Delta\varphi_2}) \cdot \cos(3 \cdot \varphi_2) + \underline{cc}' \cdot \sin((5/2) \cdot \underline{\Delta\varphi_2}) \cdot \cos(5 \cdot \varphi_2) - \underline{dd}' \cdot \sin((7/2) \cdot \underline{\Delta\varphi_2}) \cdot \cos(7 \cdot \varphi_2) + \underline{ee}' \cdot \sin((9/2) \cdot \underline{\Delta\varphi_2}) \cdot \cos(9 \cdot \varphi_2) - \dots), \quad (10.12)$$

kur

$\underline{\Delta\varphi_2} = \varphi_{2_2} - \varphi_{2_1}$ - elipsoīda joslas platums radiānos;

$\varphi_2 = (\varphi_{2_1} + \varphi_{2_2}) / 2$ - elipsoīda joslas vidējais platums,

un Zemes elipsoīda speciālie parametri ir

$$\begin{aligned} \underline{aa}' &= 1 + (1/2) \cdot e^2 + (3/8) \cdot e^4 + (5/16) \cdot e^6 + (35/128) \cdot e^8 \\ \underline{bb}' &= (1/6) \cdot e^2 + (3/16) \cdot e^4 + (3/16) \cdot e^6 + (35/192) \cdot e^8 \\ \underline{cc}' &= (3/80) \cdot e^4 + (1/16) \cdot e^6 + (5/64) \cdot e^8 \\ \underline{dd}' &= (1/112) \cdot e^6 + (5/256) \cdot e^8 \\ \underline{ee}' &= (5/2304) \cdot e^8 \end{aligned} \quad (10.13)$$

[Справ. геодезиста], [Багратуни, параметру $\underline{aa}'$,... vērtības Krasovska elipsoīdam], [HdV IV, 97], [HdV 3.1.,39,274]

Elipsoīda trapeces laukumu izteiksim kā elipsoīda joslas gabala laukumu

$$T = (\lambda_{2_2} - \lambda_{2_1}) \cdot Z, \quad (10.14)$$

kur

Z - elipsoīda joslas laukums no platuma φ_{2_1} līdz platumam φ_{2_2} .

Elipsoīda laukums

$$E = 2 \cdot Z, \quad (10.15)$$

kur

Z - elipsoīda joslas laukums no platuma $\varphi_{2_1} = 0$ līdz platumam $\varphi_{2_2} = \pi / 2$.

Elipsoīda laukuma aprēķināšanai var lietot arī izteiksmi

$$E = 4 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot (1 + (2/3) \cdot e^2 + (3/4) \cdot e^4 + (4/7) \cdot e^6 + (5/9) \cdot e^8 + \dots) \quad (10.16)$$

Atceroties, ka sfēras laukums ir

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2, \quad (10.17)$$

kur r – sfēras rādiuss,

redzams, ka izteiksmē (10.16) pusass garums b un reizinātājs $(1 + (2 / 3) \cdot e^2 + \dots)$ izteic elipsoīda un sfēras laukumu atšķirību.

Savkārt lodes tilpums ir

$$V = (4 / 3) \cdot \pi \cdot r^3, \quad (10.18)$$

kur r – lodes rādiuss.

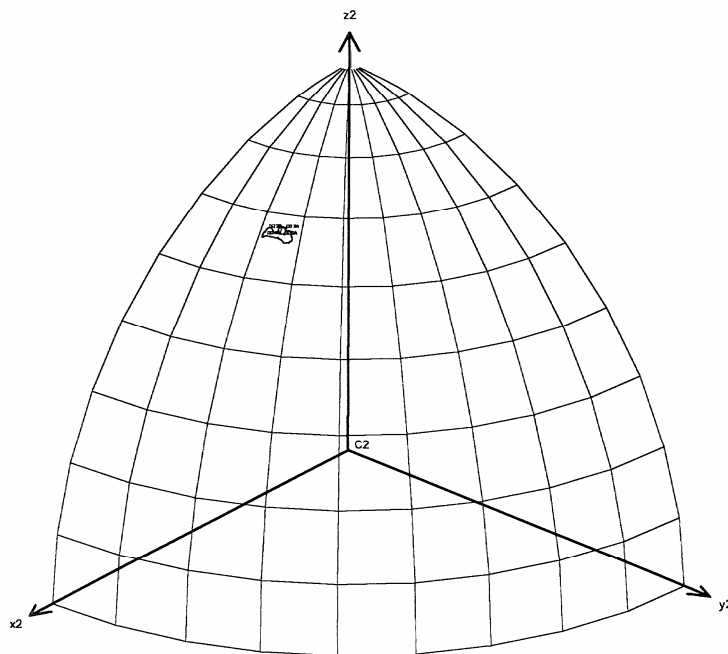
Elipsoīdam vienlielas lodes rādiuss

$$r = \sqrt[3]{E / (4 \cdot \pi)}$$

[sk. Prakt. 82,263 skaitl. piemērs]

Piemērs

[sk. datorprogrammu “gds_hgh_” 7.uzd.]



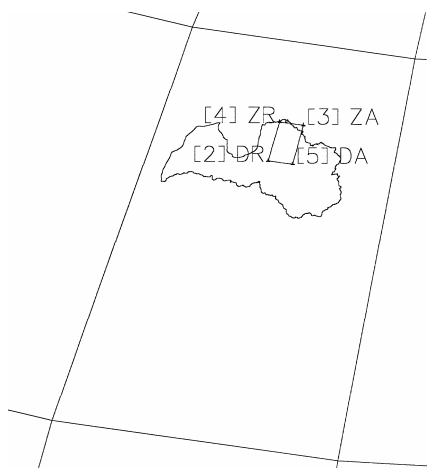
21.zīm. Zemes elipsoīda trapeces laukuma aprēķināšana.

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Kopskats kvaziģeocentriskā taisnleņķa koordinātu telpā.

Zemes elipsoīds attēlots kā $10^\circ \cdot 10^\circ$ trapecu sistēma.

Trapecē ($20^\circ, 50^\circ$) - ($30^\circ, 60^\circ$) attēlota Latvijas robeža, uzdevumā lietotie elipsoīda punkti un loki starp tiem



22. zīm. Zemes elipsoīda trapeces laukuma aprēķināšana.

Trapecē ($20^\circ, 50^\circ$) - ($30^\circ, 60^\circ$) kvaziģeocentriskā taisnleņķa koordinātu telpā.

Dotās elipsoīda trapeces punkti:

[4] ZR	25:00:00.0000	58:00:00.0000	[3] ZA	26:00:00.0000	58:00:00.0000
[2] DR	25:00:00.0000	57:00:00.0000	[5] DA	26:00:00.0000	57:00:00.0000

Zemes elipsoīda trapeces laukuma aprēķināšanas uzdevums

Datorprogramma “gds_hgh_” (ver. 00.05.19.).

7.

Zemes elipsoīda trapeces laukums

00.11.12 16h 19m 07s

(ver.00.02.26.)

/7a:LGS_92

-ģeodēziskās sistēmas nosaukums;

... tam jābūt no ģeodēzisko sistēmu saraksta (sk. /1a.);

... piemēram,

... LGS_21

... LGS_92

... Pulkowo_42.1

... WGS_84

... Model_1

... Model_2

=====

7.1.uzdevums

Aprēķināt Zemes elipsoīda trapeces laukumu pēc
tās Dienvidrietumu (DR) un Ziemeļaustrumu (ZA)
stūru elipsoidālām koordinātām

...dota trapeces DienvidRietumu punkts seko
no /7b: - /7e:

/7b:Elipsoīda trapeces "DR" punkts
-elipsoīda punkta apraksts;
...tajā "xxx" ir punkta nosaukums;
...punkta nosaukums aprakstā ir nepieciešams;

/7c:ce2
-koordinātu telpas nosaukums;
..."ce2" -kvaziģeocentriskā elipsoidālo koordinātu telpa;

/7d:GD94
-koordinātu kataloga nosaukums;
..."GD94" -1994.gada ģeodēzisko koordinātu katalogs (VZD);
...ja koordinātu katalogs nav zināms,tad jābūt "/7d:-"

/7e: 25:00:00.00000 57:00:00.00000 0.000
-punkta elipsoidālais garums;
-punkta elipsoidālais platums;
-punkta elipsoidālais augstums;
...elipsoīda punktiem augstums ir nulle;
...elipsoidālās koordinātas ce2;
...tām jābūt /7a: ģeodēziskajā sistēmā;
...tām jāatbilst /7b: aprakstam;
...ieteicams izvēlēties punktu dzimtā vietā;

...dota trapeces ZiemeļAustrumu punkts seko
no /7f: - /7i:

/7f:Elipsoīda trapeces "ZA" punkts
-elipsoīda punkta apraksts;
...tajā "xxx" ir punkta nosaukums;
...punkta nosaukums aprakstā ir nepieciešams;

/7g:ce2
-koordinātu telpas nosaukums;
..."ce2" -kvaziģeocentriskā elipsoidālo koordinātu telpa;

/7h:GD94
-koordinātu kataloga nosaukums;
..."GD94" -1994.gada ģeodēzisko koordinātu katalogs (VZD);
...ja koordinātu katalogs nav zināms,tad jābūt "/7h:-"

/7i: 26:00:00.00000 58:00:00.00000 0.000
-punkta elipsoidālais garums;
-punkta elipsoidālais platums;
-punkta elipsoidālais augstums;
...elipsoīda punktiem augstums ir nulle;
...elipsoidālās koordinātas ce2;
...tām jābūt /7a: ģeodēziskajā sistēmā;
...tām jāatbilst /7f: aprakstam;

...ieteicams izvēlēties punktu dzimtā vietā;

Aprēķināt Zemes elipsoīda trapeces laukumu pēc
tās DienvidRietumu (DR) un ZiemeļAustrumu (ZA)
stūru elipsoidālām koordinātām
7.1.uzdevums

=====

Zemes elipsoīda trapeces laukums

7. _____

Zemes elipsoīda trapeces laukuma aprēķināšanas protokols
Datorprogramma "gds_hgh_" (ver. 00.05.19.).

7. _____

Zemes elipsoīda trapeces laukums

00.11.12 16h 19m 13s

Uzdevums: 7.1

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92

Elipsoīds: GRS_80

Elipsoīda trapeces "DR" punkts

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] DR 25:00:00.0000 57:00:00.0000 0.000

Elipsoīda trapeces "ZA" punkts

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[3] ZA 26:00:00.0000 58:00:00.0000 0.000

Iegūts:

Elipsoīda trapeces "DR" punkts

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] DR 25:00:00.0000 57:00:00.0000 0.000

Elipsoīda trapeces "ZA" punkts

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[3] ZA 26:00:00.0000 58:00:00.0000 0.000

Elipsoīda punkts "ZR"

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[4] ZR 25:00:00.0000 58:00:00.0000 0.000

Elipsoīda punkts "DA"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[5] DA 26:00:00.0000 57:00:00.0000 0.000

Elipsoīda trapeces DR-ZA laukums: 667700.893 ha

Elipsoīda "GRS_80" laukums T= 510065621.719 km²

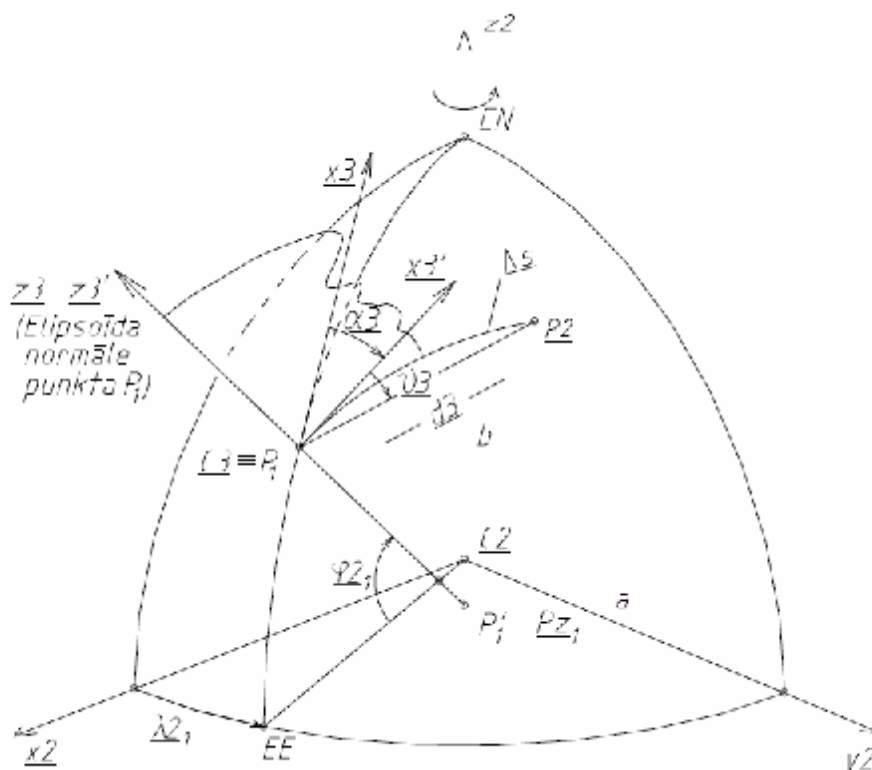
00.11.12 16h 19m 13s

Zemes elipsoīda trapeces laukums

7. _____

11. Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi.

Plakne, kas vilkta caur elipsoīda punkta P normāli, šķēļ elipsoīdu pa virsmas līniju – elipsoīda normālšķēlumu. Iepriekš [sk. 4.lek.] aplūkojām divus galvenos normālšķēlumus: meridiānu ($\alpha_3 = 0$) un pirmo vertikālu ($\alpha_3 = \pi / 2$). Šeit punkta P vietējā ģeodēziskā telpā aprakstīsim elipsoīda normālšķēlumu jebkurā virzienā (α_3 ir no $[0, 2 \cdot \pi]$).



23. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi

Šeit:

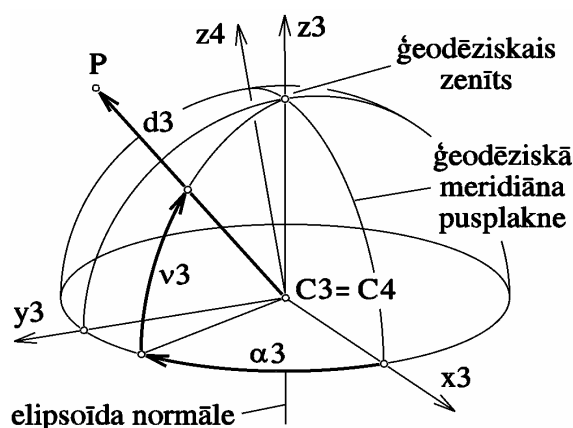
- | | |
|---|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek]; |
| e' | - elipsoīda 2.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek]; |
| <u>C2</u> | - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs); |
| <u>EN</u> | - elipsoīda ziemeļpols; |
| <u>EE</u> | - elipsoīda ekvatora punkts; |
| <u>C3</u> = P_1 | - elipsoīda normālšķēluma loka sākuma punkts; |
| P_2 | - elipsoīda normālšķēluma loka beigu punkts; |
| <u>Ns</u> | - normālšķēluma loka garums; |
| <u>C2</u> <u>EN</u> | - elipsoīda rotācijas ass; |
| <u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> | - elipsoīda ekvatora plakne; |
| <u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> <u>z2</u> | - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa (s.a. elipsoīda [kvaziģeocentriskā] taisnleņķa koordinātu sistēma; |
| <u>cr2</u> = (<u>x2</u> , <u>y2</u> , <u>z2</u>) ^T | - punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas. |
| <u>x2</u> , <u>y2</u> , <u>z2</u> | - punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2</u> ; |
| <u>ce2</u> = (<u>λ2</u> , <u>φ2</u> , <u>h2</u>) ^T | - punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| <u>λ2</u> , <u>φ2</u> , <u>h2</u> | - punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> (punktam P elipsoidālais augstums <u>h2</u> = 0); |
| <u>EN</u> <u>C2</u> <u>EE</u> <u>C3</u> | - punkta P = P_1 meridiāna plakne; |
| <u>P</u> <u>Pz</u> | - elipsoīda normāle punktā P = P_1 ; |
| <u>C2'</u> | - normāles P <u>Pz</u> un ekvatora plaknes <u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> šķēlums; |

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

- $\underline{Pz}$ - normāles $\underline{P}$ $\underline{Pz}$ un elipsoīda rotācijas ass $\underline{C2}$ $\underline{EN}$ krustpunkts;
- $\underline{ce2}_1 = (\underline{\lambda 2}_1, \underline{\varphi 2}_1, \underline{h 2}_1)^T$ - punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- $\underline{\lambda 2}_1, \underline{\varphi 2}_1, \underline{h 2}_1$ - punkta P_1 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no $\underline{ce2}_1$;
- (punktam P_1 elipsoidālais augstums ($\underline{h 2}_1 = 0$) ;
- $\underline{ce2}_2 = (\underline{\lambda 2}_2, \underline{\varphi 2}_2, \underline{h 2}_2)^T$ - punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- $\underline{\lambda 2}_2, \underline{\varphi 2}_2, \underline{h 2}_2$ - punkta P_2 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no $\underline{ce2}_2$;
- (punktam P_2 elipsoidālais augstums $\underline{h 2}_2 = 0$) ;
- $\underline{C3}$ $\underline{x3}$ $\underline{y3}$ $\underline{z3}$ - vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpa
- (s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpa;
- s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ ģeodēziskā taisnleņķa koordinātu sistēma);
- $\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās taisnleņķa koordinātas;
- $\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3}$ - punkta P vietējā ģeodēziskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{cr3}$;
- $\underline{cs3} = (\underline{\alpha 3}, \underline{v 3}, \underline{d 3})^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās sfēriskās koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā;
- $\underline{\alpha 3}, \underline{v 3}, \underline{d 3}$ - vietējais ģeodēziskais azimuts, ģeodēziskais slīpuma leņķis un [ģeodēziskais] slīpais attālums no $\underline{cs3}$
- $\underline{C3}$ $\underline{x3'}$ $\underline{y3'}$ $\underline{z3'}$ - vietējā ģeodēziskā palīgkoordinātu sistēma;
- $\underline{cr3'} = (\underline{x3'}, \underline{y3'}, \underline{z3'})^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās taisnleņķa palīgkoordinātas normālšķēluma P_1 P_2 $\underline{Pz}$ plaknē;
- $\underline{cs3'} = (\underline{\alpha 3'}, \underline{v 3'}, \underline{d 3'})^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās sfēriskās palīgkoordinātas normālšķēluma P_1 P_2 $\underline{Pz}$ plaknē;

Šeit un turpmāk, noklusējot stāvpunktu (s.a. topocentru) P_1 , ir pieņemts, ka punkta P_2 sfēriskās koordinātas $\underline{cs3}$ ir jālasa kā

- $\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha 3}_{12}, \underline{v 3}_{12}, \underline{d 3}_{12})^T$, kur
- $\underline{\alpha 3}_{12}$ - ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
- $\underline{v 3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
- $\underline{d 3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;



24. Vietējā ģeodēziskā koordinātu telpa

[sk. Crd_map.ppt]

Punkta P_1 vietējo ģeodēzisko taisnleņķa koordinātu $\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$ sistēmas $\underline{C3}$ $\underline{x3}$ $\underline{y3}$ $\underline{z3}$ abscisu ass $\underline{C3}$ $\underline{x3}$ ir savietota ar punkta P_1 meridiāna plakni $\underline{EN}$ $\underline{C2}$ $\underline{EE}$ P_1 un ir virzīta no punkta P_1 elipsoīda ziemeļpola $\underline{EN}$ virzienā. Ordinātu ass $\underline{C3}$ $\underline{y3}$ 11.1. zīmējumā nav parādīta.

Aplikātu ass $\underline{C3} \underline{z3}$ ir savietota ar elipsoīda normāli $\underline{P} \underline{Pz}$ punktā $\underline{P} = \underline{P}_1$ un virzīta uz punkta $\underline{P}_1$ ģeodēzisko zenītu.

Elipsoīda normālšķēlumu no punkta $\underline{P}_1$ punkta $\underline{P}_2$ virzienā uzdod elipsoīda normālplaknes $\underline{P}_1 \underline{Pz} \underline{P}_2$ ģeodēziskais azimuts $\underline{\alpha 3} = \underline{\alpha 3}_1$ virzienam no punkta $\underline{P}_1$ uz punktu $\underline{P}_2$

Izteiksmju vienkāršošanai blakus vietējo taisnleņķa koordinātu $\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$ sistēmai $\underline{C3} \underline{x3} \underline{y3} \underline{z3}$ ievēdīsim vietēju palīgkoordinātu $\underline{cr3}' = (\underline{x3}', \underline{y3}', \underline{z3}')^T$ sistēmu $\underline{C3} \underline{x3}' \underline{y3}' \underline{z3}'$ tā, ka to aplikātu asis sakrīt (t.i. $\underline{C3} \underline{z3} = \underline{C3} \underline{z3}'$), bet abscisu palīgass $\underline{C3} \underline{x3}'$, veidojot ar pamatasi $\underline{C3} \underline{x3}$ leņķi $\underline{\alpha 3} = \underline{\alpha 3}_1$, ir virzīta pa normālšķēluma $\underline{P}_1 \underline{P}_2 \underline{Pz}$ plakni punkta $\underline{P}_2$ virzienā.

Abu aplūkoto sistēmu taisnleņķa koordinātas $\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$ un $\underline{cr3}' = (\underline{x3}', \underline{y3}', \underline{z3}')^T$ saista šādas vienkāršas sakarības [Heck 95, (6.21), (6.23)] :

$$\begin{aligned} \underline{x3}' &= \underline{x3} \cdot \cos \underline{\alpha 3} + \underline{y3} \cdot \sin \underline{\alpha 3}; \\ \underline{y3}' &= -\underline{x3} \cdot \sin \underline{\alpha 3} + \underline{y3} \cdot \cos \underline{\alpha 3}; \\ \underline{z3}' &= \underline{z3}; \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{x3} &= \underline{x3}' \cdot \cos \underline{\alpha 3}; \\ \underline{y3} &= \underline{x3}' \cdot \sin \underline{\alpha 3}; \\ \underline{z3} &= \underline{z3}'; \end{aligned} \quad (11.2)$$

Tā kā palīgsistēmas abscisu ass ir savietota ar normālšķēluma plakni, tad palīgaplikāta ir [Heck 95, (6.25)]

$$\underline{z3}' = - ((\underline{x3}')^2 / (2 \cdot R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}))) \cdot (1 - (\underline{x3}' / N(\underline{\varphi 2}_1)) \cdot (\underline{\eta 2}_1)^2 \cdot \tan \underline{\varphi 2}_1 \cdot \cos \underline{\alpha 3} + \dots, \quad (11.3)$$

kur

$\underline{x3}'$ – palīgsistēmas abscisa, kas norāda ar $\underline{\alpha 3}$ uzdota normālšķēluma punktu tā plaknē $\underline{P}_1 \underline{Pz} \underline{P}_2$;

$R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}) = 1 / (\cos^2 \underline{\alpha 3} / M(\underline{\varphi 2}_1) + \sin^2 \underline{\alpha 3} / N(\underline{\varphi 2}_1))$

- elipsoīda liekuma rādiuss pēc Eilera punktā $\underline{P}_1$ ar platumu $\underline{\varphi 2}_1$ virzienā $\underline{\alpha 3}$ [sk. (4.25)];

$M(\underline{\varphi 2}_1) = a \cdot (1 - e^2) / W(\underline{\varphi 2}_1)^3$ - meridiāna liekuma rādiuss platumā $\underline{\varphi 2}$ [sk. (4.17)];

$N(\underline{\varphi 2}_1) = a / W(\underline{\varphi 2}_1)$ - meridiāna šķērslietuma rādiuss platumā $\underline{\varphi 2}$ [sk. (4.18)];

$W(\underline{\varphi 2}_1) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi 2}_1}$ - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)];

$\underline{\eta 2}_1 = e' \cdot \cos \underline{\varphi 2}_1$ - eta funkcija [sk. (2.26)];

e' - elipsoīda 2.ekscentricitāte no $\underline{gds}$ [sk.1.lek];

Aplikāta $\underline{z3}'$ izteic attālumu no uz palīgabscisu ass izvēlēta punkta $\underline{x3}'$ līdz virzienā $\underline{\alpha 3}$ izvēlētam elipsoīda normālam šķēlumam. Tā kā no (11.3) ir redzams, ka ($\underline{z3}' < 0$), tad $\underline{z3}'$ izteic ģeodēziskā horizonta $\underline{C3} \underline{x3} \underline{y3}$ t.s.depresiju elipsoīda (Zemes) liekuma dēļ.

Palīgabscisai $\underline{x3}'$ atbilst normālšķēluma loks ar garumu [Heck 95, (6.29a)]

$$\begin{aligned} \underline{Ns} &= \underline{x3}' \cdot (1 + (1 / 6) \cdot (\underline{x3}' / R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}))^2 - \\ &\quad - (3 / 8) \cdot (\underline{x3}' / R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}))^2 \cdot (\underline{x3}' / N(\underline{\varphi 2}_1)) \cdot (\underline{\eta 2}_1)^2 \cdot \tan \underline{\varphi 2}_1 \cdot \cos \underline{\alpha 3} + \\ &\quad + \dots) \end{aligned} \quad (11.4)$$

Invertējot izteiksmi (11.4), iegūst palīgabscisu $\underline{x3}'$ kā normālšķēluma loka garuma šādu funkciju [Heck 95, (6.29b)]

$$\begin{aligned} \underline{x3}' &= \underline{Ns} \cdot (1 - (1 / 6) \cdot (\underline{Ns} / R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}))^2 + \\ &\quad + (3 / 8) \cdot (\underline{Ns} / R(\underline{\varphi 2}_1, \underline{\alpha 3}))^2 \cdot (\underline{Ns} / N(\underline{\varphi 2}_1)) \cdot (\underline{\eta 2}_1)^2 \cdot \tan \underline{\varphi 2}_1 \cdot \cos \underline{\alpha 3} + \\ &\quad + \dots) \end{aligned} \quad (11.5)$$

Ģeodēziskais slīpais attālums $\underline{d3} = \underline{d3}_{12}$ no punkta P_1 uz punktu P_2 (s.a. normālšķēluma hordas garums), sekojot Pitagora teorēmai un izteiksmēm (11.5), (11.3), ir [Heck 95, (6.30)]

$$\underline{d3} = \sqrt{(\underline{x3}')^2 + (\underline{z3}')^2} = \underline{x3}' \cdot (1 + (1/8) \cdot (\underline{x3}' / R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))^2 - \dots) \quad (11.6)$$

Normālšķēluma hordas garumu var izteikt arī kā normālšķēluma loka garuma funkciju [Heck 95, (6.31a)]

$$\underline{d3} = \underline{Ns} \cdot (1 - (1/24) \cdot (\underline{Ns} / R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))^2 \cdot (1 - \dots)) \quad (11.7)$$

Invertējot izteiksmi (11.7), iegūst normālšķēluma loka garumu kā normālšķēluma hordas garuma funkciju [Heck 95, (6.31b)]

$$\underline{Ns} = \underline{d3} \cdot (1 + (1/24) \cdot (\underline{d3} / R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))^2 \cdot (1 - \dots)) \quad (11.8)$$

Ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 $\underline{v3} = \underline{v3}_{12}$ (s.a. normālšķēluma hordas depresijas leņķis) kā normālšķēluma loka garuma funkcija ir [Heck 95, (6.33a)]

$$\underline{v3} = (\underline{Ns} / (2 \cdot R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))) \cdot (1 - (\underline{Ns} / N(\varphi_{21})) \cdot (\eta \varphi_{21})^2 \cdot \tan \varphi_{21} \cdot \cos \alpha_3 + \dots) \quad (11.9)$$

Ģeodēzisko slīpuma leņķi $\underline{v3}$ var izteikt arī kā normālšķēluma hordas garuma funkciju [Heck 95, (6.33b)]

$$\underline{v3} = (\underline{d3} / (2 \cdot R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))) \cdot (1 - (\underline{d3} / N(\varphi_{21})) \cdot (\eta \varphi_{21})^2 \cdot \tan \varphi_{21} \cdot \cos \alpha_3 + \dots) \quad (11.10)$$

Izvēlētā virzienā, ko uzdod ģeodēziskais azimuts $\underline{\alpha3}$, aprēķinātais ģeodēziskais slīpuma leņķis $\underline{v3}$ un slīpais attālums $\underline{d3}$ ir sfēriskās koordinātas no $\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T$ punkta $P_1 = C3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpā.

Pāreju no sfēriskām koordinātām uz taisnleņķa koordinātām $\underline{cr3}_{12} = (\underline{x3}_{12}, \underline{y3}_{12}, \underline{z3}_{12})^T$ punkta $P_1 = C3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpā vispārēji apraksta sakarība

$$\underline{cr3}_{12} = \underline{sr3}(\underline{cs3}_{12}), \quad (11.11)$$

kur

$\underline{sr3}$ izteic ar sfēriskām koordinātām nepieciešamās darbības.

Saprotams, ka pāreju no taisnleņķa koordinātām $\underline{cr3}_{12} = (\underline{x3}_{12}, \underline{y3}_{12}, \underline{z3}_{12})^T$ uz sfēriskām koordinātām $\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T$ punkta $P_1 = C3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpā vispārēji apraksta pretēja sakarība

$$\underline{cs3}_{12} = \underline{rs3}(\underline{cr3}_{12}), \quad (11.12)$$

kur

$\underline{rs3}$ izteic ar taisnleņķa koordinātām nepieciešamās darbības.

Bez tam, ievērojot izteiksmes (11.2), elipsoīda normālšķēluma taisnleņķa koordinātas $\underline{cr3}_{12} = (\underline{x3}_{12}, \underline{y3}_{12}, \underline{z3}_{12})^T$ var arī iegūt kā normālšķēluma ģeodēziskā azimuta $\underline{\alpha3}_{12}$ un palīgkoordinātu $\underline{x3}_{12}' = \underline{x3}'$ un $\underline{z3}_{12}' = \underline{z3}'$ funkcijas.

Elipsoīda normālšķēlumu var arī aprakstīt kvaziģeocentriskā telpā. Ar to saistītā koordinātu pārveidošanas vispārīgā sakarība ir šāda

$$\underline{cr2}_2 = \underline{r32}(\underline{cr2}_1, \underline{cr3}_{12}), \quad (11.13)$$

kur

r32 izteic ar taisnleņķa koordinātām nepieciešamās darbības, kas realizē pāreju no vietējās ģeodēziskās telpas $C3 \ x3 \ y3 \ z3$ uz kvaziģeocentrisko telpu $C2 \ x2 \ y2 \ z2$.

Viens no darbības r32 izvērsumiem ir šāds [Heck 95, 173, (2.20)]

$$\begin{aligned} x2 &= N(\varphi2_1) \cdot \cos \varphi2_1 \cdot \cos \lambda2_1 - \sin \varphi2_1 \cdot \cos \lambda2_1 \cdot x3 - \sin \lambda2_1 \cdot y3 + \cos \varphi2_1 \cdot \cos \lambda2_1 \cdot z3 \\ y2 &= N(\varphi2_1) \cdot \cos \varphi2_1 \cdot \sin \lambda2_1 - \sin \varphi2_1 \cdot \sin \lambda2_1 \cdot x3 + \cos \lambda2_1 \cdot y3 + \cos \varphi2_1 \cdot \sin \lambda2_1 \cdot z3 \quad (11.14) \\ z2 &= (N(\varphi2_1) / (1 + \text{sqr}(e'))) \cdot \sin \varphi2_1 + \cos \varphi2_1 \cdot x3 + \sin \varphi2_1 \cdot z3 \end{aligned}$$

Salīdzinot ar (11.13), šajās izteiksmēs punkta P_1 kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas $\underline{cr2}_1 = (x2_1, y2_1, z2_1)^T$ aizstātas ar punkta P_1 kvaziģeocentriskām elipsoidālām koordinātām $\underline{ce2}_1 = (\lambda2_1, \varphi2_1, h2_1)^T$.

Piemērs

[sk. datorprogrammu "gds_hgh_" 8.uzd.]

8. _____
Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi
00.11.19 10h 45m 53s
(ver.00.02.27.)
(ver.00.03.20.)

/8a:LGS_92
-ģeodēziskās sistēmas nosaukums;
... tam jābūt no ģeodēzisko sistēmu saraksta (sk. /1a:);
... piemēram,
... LGS_21
... LGS_92
... Pulkowo_42.1
... WGS_84
... Model_1
... Model_2

8.1.uzdevums

Aprēķināt Zemes elipsoīda normālšķēluma koordinātas no dotā ģeodēziskā punkta dotā virzienā

...ģeodēzisko punktu uzdod "/8b: - /8e:";
...normālšķēlumu uzdod tā sākums "/8f: - /8i:";
...un beigas "/8j: - 8i:";

/8b:Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"

-ģeodēziskā punkta apraksts;
...tajā "xxx" ir punkta nosaukums;
...nosaukums aprakstā ir vienmēr nepieciešams;

...ieteicams izvēlēties punktu dzimtā vietā (sk. /2b:);

/8c:ce2

-koordinātu nosaukums;

..."ce2" -elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā;

...tās ir koordinātas "/8a:" ģeodēziskā sistēmā;

/8d:GD94

-koordinātu kataloga nosaukums;

..."GD94" -1994.gada ģeodēzisko koordinātu katalogs (VZD);

...ja koordinātu katalogs nav zināms,tad jābūt "/8d:-"

/8e: 25:15:38.02960 57:41:22.88390 83.606

-punkta elipsoidālais garums;

-punkta elipsoidālais platums;

-punkta elipsoidālais augstums;

...elipsoidālās koordinātas ce2;

...tās ir koordinātas "/8a:" ģeodēziskā sistēmā;

...tām jāatbilst punkta "/8b:" aprakstam;

...ieteicams koordinātas izrakstīt no kataloga;

...katalogs glabājas pie pasniedzēja;

...(šeit: sk.Aizpildošais GPS tīkls 94,70.lpp)

...83.606 -elipsoidālais augstums LGS_92

...63.9 -normālais augstums Baltijas 1977.g sistēmā

...-19.7 -GRS-80 elipsoīda augstums virs ģeoīda

...sk.Transformācija uz ...LKS92 95,5.att.

/8f:Vietējs punkts "Burtnieki-->" uz elipsoīda

-ģeodēziskā punkta apraksts;

...tajā "xxx" ir punkta nosaukums;

...nosaukums aprakstā ir vienmēr nepieciešams;

..."8f:" ir vietējās ģeodēziskās telpas sākuma punkts;

..."8f:" ir savietots ar /8b: projekciju uz elipsoīda;

..."8f:" ir normālšķēluma sākuma punkts;

/8g:cr3

-koordinātu nosaukums;

..."cr3" - taisnleņķa koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā;

...tā ir punkta "/8f:" vietējā ģeodēziskā telpa;

/8h:-

-koordinātu kataloga nosaukums;

...ja koordinātu katalogs nav zināms,tad jābūt "/8h:-"

/8i: 0.00 0.00 0.00

-punkta abscisa;

-punkta ordināta;

-punkta aplikāta;

...taisnleņķa koordinātas "/8g:" telpā;

...tām jābūt "/8a:" ģeodēziskajā sistēmā;

...tām jāatbilst punkta "/8f:" aprakstam;
...tām jābūt (0.00, 0.00, 0.00);

/8j: Vietējs punkts "-->Burtnieki" uz elipsoīda
-ģeodēziskā punkta apraksts;
...tajā "xxx" ir punkta nosaukums;
...nosaukums aprakstā ir vienmēr nepieciešams;
..."/8j:" ir vietējās ģeodēziskās telpas punkts;
..."/8j:" ir normālšķēluma nosakāmais punkts;

/8k:cs3
-koordinātu nosaukums;
..."cs3" - sfēriskās koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā;

/8l:-
-koordinātu kataloga nosaukums;
...ja koordinātu katalogs nav zināms,tad jābūt "/8h:-"

/8m: 135:00:00.00 0:00:00.0 20000.000
-ģeodēziskais azimuts;
-ģeodēziskais slīpuma leņķis;
-slīpais attālums;
...sfēriskās koordinātas "cs3" vietējā ģeodēziskā telpā;
...tām jābūt "/8a:" ģeodēziskajā sistēmā;
...tām jāatbilst "/8f:" aprakstam;
...tām jāatbilst "/8i:" aprakstam;
...tās ir sfēriskās koordinātas no "/8f:" uz "/8j:";

/8n: 1000.0
-normālšķēluma koordinātu aprēķināšanas solis (m);

Aprēķināt Zemes elipsoīda normālšķēluma koordinātas
no dotā punktā dotā virzienā
8.1.uzdevums
=====

8.2.uzdevums
Aprēķināt Zemes elipsoīda normālšķēluma koordinātas
starp dotiem punktiem

Nav realizēts!

...sk.PGU; seko azimuts,slīpais attālums (horda),
slīpuma leņķis?

...ce2 --> cr2 --> cr3

Aprēķināt Zemes elipsoīda normālšķēluma koordinātas
starp dotiem punktiem
8.2.uzdevums

=====

Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi
8. _____

8. _____
Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi
00.11.19 10h 50m 27s

Uzdevums: 8.1

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92
Elipsoīds: GRS_80

Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"
Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2
Koordinātu katalogs: GD94
[1] Burtnieki 25:15:38.0296 57:41:22.8839 83.606

Elipsoīda punkts "Burtnieki"
Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2
Koordinātu katalogs: GD94
[2] Burtnieki 25:15:38.0296 57:41:22.8839 0.000

Vietējs punkts "Burtnieki-->" uz elipsoīda
Taisnleņķa koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā: cr3
[3] Burtnieki--> 0.000 0.000 0.000

Vietējs punkts "-->Burtnieki" uz elipsoīda
Sfēriskās koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā: cs3
[4] -->Burtnieki 135:00:00.0000 0:00:00.0000 20000.000

Iegūts:

Vietējs punkts "Burtnieki-->" uz elipsoīda
Taisnleņķa koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā: cr3
[3] Burtnieki--> 0.000 0.000 0.000

Vietējs punkts "-->Burtnieki" uz elipsoīda
Sfēriskās koordinātas vietējā ģeodēziskā telpā: cs3
[4] -->Burtnieki 135:00:00.0000 0:00:00.0000 20000.000

Elipsoīda normālšķēluma taisnleņķa koordinātas

no 3.punkta uz 4.punktu ar soli 1000.0 m

x3'	x3	y3	z3
0	0.000	0.000	0.000
1000	-707.107	707.107	-0.078
2000	-1414.214	1414.214	-0.313
3000	-2121.320	2121.320	-0.704
4000	-2828.427	2828.427	-1.251
5000	-3535.534	3535.534	-1.955
6000	-4242.641	4242.641	-2.815
7000	-4949.747	4949.747	-3.832
8000	-5656.854	5656.854	-5.005
9000	-6363.961	6363.961	-6.335
10000	-7071.068	7071.068	-7.821
11000	-7778.175	7778.175	-9.463
12000	-8485.281	8485.281	-11.262
13000	-9192.388	9192.388	-13.217
14000	-9899.495	9899.495	-15.329
15000	-10606.602	10606.602	-17.597
16000	-11313.708	11313.708	-20.021
17000	-12020.815	12020.815	-22.602
18000	-12727.922	12727.922	-25.339
19000	-13435.029	13435.029	-28.233

... x3' -normālšķēluma punkta palīgabscisa (m)
 ... x3 -normālšķēluma punkta abscisa (m)
 ... y3 -normālšķēluma punkta ordināta (m)
 ... z3 -normālšķēluma punkta aplikāta (m)
 { ... sk.Heck 95,177,(6.23) }
 { ... sk.Heck 95,178,(6.25) }

00.11.19 10h 50m 27s

Zemes elipsoīda normālšķēlumu vienādojumi

8. _____

$\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2}$	- elipsoīda ekvatora plakne;
$\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2} \ \underline{z2}$	- kvaziģeocentriskā koordinātu telpa (s.a. elipsoīda [kvaziģeocentriskā] taisnleņķa koordinātu sistēma);
$\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas.
$\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2}$	- punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2</u> ;
$\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2}$	- punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ;
$\underline{Pg}_u, \underline{Pg}_v$	- ģeodēziskie punkti uz Zemes fiziskās virsmas no telpas $\underline{sR}^3$;
$\underline{Pg}_u, \underline{Pg}_v$	- taisnes nogrieznis telpā $\underline{sR}^3$;
P_1, P_2	- ģeodēzisko punktu $\underline{Pg}_u, \underline{Pg}_v$ projekcijas uz Zemes elipsoīda;
$P_1 P_2$	- elipsoīda normālšķēluma loks telpā $\underline{sR}^3$ [sk. 11.lek];
$\underline{EN} \ \underline{C2} \ \underline{EE}_1 \ P_1$	- punkta P_1 meridiāna plakne;
$\underline{EN} \ \underline{C2} \ \underline{EE}_2 \ P_2$	- punkta P_2 meridiāna plakne;
$\underline{EE}_1, \underline{EE}_2$	- elipsoīda ekvatora punkti;
$P \ \underline{Pz}$	- elipsoīda normāle tā brīvi izvēlētajā punktā P;
$\underline{Pg}_u \ P_1 \ \underline{C2}_1' \ P_1''$	- elipsoīda normāle punktā P_1 ;
$\underline{Pg}_v \ P_2 \ \underline{C2}_2' \ P_2''$	- elipsoīda normāle punktā P_2 ;
$\underline{C2}_1'$	- normāles $P_1 \ \underline{P}_1''$ un ekvatora plaknes $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2}$ šķēlums;
$\underline{C2}_2'$	- normāles $P_2 \ \underline{P}_2''$ un ekvatora plaknes $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2}$ šķēlums;
$\underline{C3} = P_1$	- elipsoīda normālšķēluma loka sākuma punkts;
P_2	- elipsoīda normālšķēluma loka beigu punkts;
$\underline{ce2}_u = (\underline{\lambda2}_u, \underline{\varphi2}_u, \underline{h2}_u)^T$	- ģeodēziskā punkta $\underline{Pg}_u$ kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_u, \underline{\varphi2}_u, \underline{h2}_u$ - ģeodēziskā punkta $\underline{Pg}_u$ elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> _u ($\underline{\lambda2}_u = \underline{\lambda2}_1$; $\underline{\varphi2}_u = \underline{\varphi2}_1$);
$\underline{ce2}_1 = (\underline{\lambda2}_1, \underline{\varphi2}_1, \underline{h2}_1)^T$	- elipsoīda punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_1, \underline{\varphi2}_1, \underline{h2}_1$ - punkta P_1 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₁ ; (punktam P_1 elipsoidālais augstums ($\underline{h2}_1 = 0$);
$\underline{ce2}_v = (\underline{\lambda2}_v, \underline{\varphi2}_v, \underline{h2}_v)^T$	- ģeodēziskā punkta $\underline{Pg}_v$ kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_v, \underline{\varphi2}_v, \underline{h2}_v$ - punkta $\underline{Pg}_v$ elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> _v ($\underline{\lambda2}_v = \underline{\lambda2}_2$; $\underline{\varphi2}_v = \underline{\varphi2}_2$);
$\underline{ce2}_2 = (\underline{\lambda2}_2, \underline{\varphi2}_2, \underline{h2}_2)^T$	- elipsoīda punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_2, \underline{\varphi2}_2, \underline{h2}_2$ - punkta P_2 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₂ ; (punktam P_2 elipsoidālais augstums $\underline{h2}_2 = 0$);
$\underline{C3} \ \underline{x3} \ \underline{y3} \ \underline{z3}$	- vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpa (s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpa; s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ ģeodēziskā taisnleņķa koordinātu sistēma);
$\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$	- punkta P vietējās ģeodēziskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3}$	- punkta P vietējā ģeodēziskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr3</u> ;
$\underline{cs3} = (\underline{\alpha3}, \underline{v3}, \underline{d3})^T$	- punkta P vietējās ģeodēziskās sfēriskās koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā;
$\underline{\alpha3}, \underline{v3}, \underline{d3}$	- vietējais ģeodēziskais azimuts, ģeodēziskais slīpuma leņķis un [ģeodēziskais] slīpais attālums no <u>cs3</u>

Šeit un turpmāk, noklusējot stāvpunktu (s.a. topocentru) P_1 , ir pieņemts, ka punkta P_2 sfēriskās koordinātas **cs3** ir jālasa kā

$$\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T, \text{ kur}$$

- α_{12} - ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 ν_{12} - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 d_{12} - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Elipsoīda punktā P_1 normālšķēluma plakne $P_1 P_2 P_1''$, ko uzdod elipsoīda normāle $P_1 P_1''$ punktā P_1 un ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 $\alpha_3 = \alpha_{12}$, šķēļ elipsoīdu pa loku – normālšķēlumu $P_1 P_2$. Tā vienādojumus var uzrakstīt vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpā $C_3 x_3 y_3 z_3$ [sk. 11.lek.]. Uzskatāmības dēļ normālšķēluma plaknei $P_1 P_2 P_1''$ piederoša taisne $P_2 P_1''$ 12.1.zīm.nav parādīta.

Pieņemsim, ka elipsoīda punkts P_2 un ģeodēziskais punkts P_g v. pieder vienai un tai pašai elipsoīda normālei $P_g v P_2 C_2' P_2''$. Ja šādā situācijā normālšķēluma plakni, ko uzdod elipsoīda normāle $P_1 P_1''$ punktā P_1 virza caur ģeodēzisko punktu P_g v, tad, ja $\text{not} (h_{2v} = 0)$, iegūst normālšķēlumu pa loku $P_1 P_2'$. Tas pieder pieder normālšķēluma plaknei $P_g u P_g v P_1''$. Tā vispār atšķiras no normālšķēluma plaknes $P_1 P_2 P_1''$.

Tādēļ punkta P_1 vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpā $C_3 x_3 y_3 z_3$ jāreķinās ar punktu P_2 un P_2' ģeodēzisko azimutu starpību.

Ģeodēzisko azimutu starpība punkta P_g v elipsoidālā augstuma h_{2v} ($\text{not} (h_{2v} = 0)$), dēļ izteic šāda sakarība

$$\alpha_3' - \alpha_3 = - ((\text{eta } \varphi_{21})^2 / (2 \cdot N(\varphi_{21})) \cdot \sin (2 \cdot \alpha_3) \cdot h_{2v} + \dots, \quad (12.1)$$

kur

$$\alpha_3' = \alpha_3' (P_1, P_2')$$

- ģeodēziskais azimuts no elipsoīda punkta P_1 uz ģeodēzisko punktu P_g v, kas atrodas augstumā h_{2v} virs elipsoīda;

$$\alpha_3 = \alpha_3 (P_1, P_2)$$

- ģeodēziskais azimuts no elipsoīda punkta P_1 uz elipsoīda punktu P_2 ;

$$\text{eta } \varphi_{21} = e' \cdot \cos \varphi_{21}$$

- eta funkcija [sk. (2.26)];

$$N(\varphi_{21}) = a / W(\varphi_{21})$$

- meridiāna šķērslietuma rādiuss platumā φ_{21} [sk. (4.18)];

$$W(\varphi_{21}) = \sqrt{ 1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_{21} }$$

- elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)];

[Heck 95, (6.35)], [Бомфорд 58, 74]

Ģeodēzisko azimutu starpība ($\alpha_3' - \alpha_3$) skaitliski nav liela un tādēļ daudzos augstākās ģeodēzijas pielietojumos to neņem vērā. Tā, piemēram, ja $h_{2v} = 3000$ m, tad $\max(\alpha_3' - \alpha_3)$ ir 0.33".

13. Zemes elipsoīda normālšķēlumu duālisms.

Trīsdimensiju telpā $\underline{sR}^3$ divas nesakrītošas taisnes var būt krustiskas, paralēlas un šķērsas. Divas nesakrītošas taisnes sauc par šķērsām, ja tās nav paralēlas un nekrustojas. Caur šķērsām taisnēm nevar novilkt plakni.

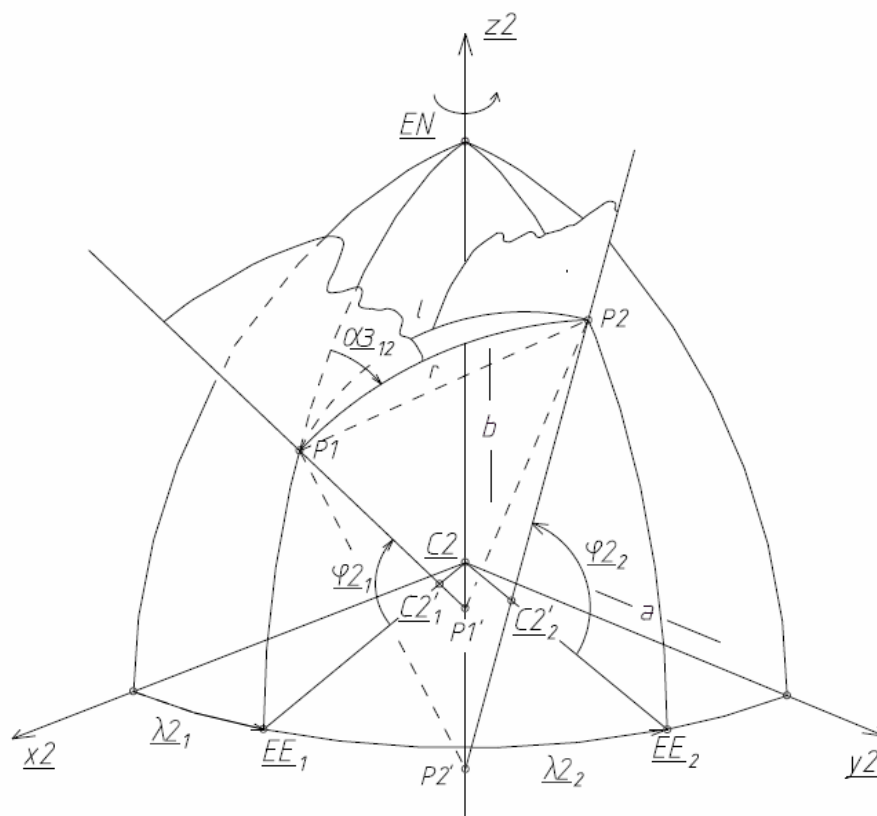
Atcerēsimies, ka [sk. 4.lek.] vispār divu dažādu elipsoīda punktu, piemēram P_1 un P_2 , normāles $P_1 P_1'$ un $P_2 P_2'$ ir šķērsas t.i. nav paralēlas un nekrustojas [REM, 418], [Heck 95, 167].

Meridiāna visu punktu ($\underline{\lambda}_2 = \text{const}$, $\underline{\varphi}_2$ ir no $\underline{sR}$ intervāla $]-\pi/2; +\pi/2[$) normāles pieder tā plaknei $\underline{EN} \underline{C2} P$ un krustojas dažādos tās punktos.

Caur elipsoīda punkta P normāli $P P'$ vilkta plakne, piemēram, $P P' \underline{EN}$, šķeļ elipsoīdu pa tā virsmas līniju. To sauc arī par elipsoīda normālšķēlumu punktā P .

Parasti normālšķēlumu punktā P uzdod ar ģeodēzisko azimutu no elipsoīda punkta $P = P_1$ uz norādītu elipsoīda punktu P_2

Ģeodēzisko azimutu $\underline{\alpha}_{12}$, kas ir $\underline{cs}_{12}$ elements, ņem no $\underline{sR}$ intervāla $[0; 2 \cdot \pi [$



26. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumu duālisms.

Šeit:

- a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];
- b - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no **gds** [sk. 1.lek.];
- e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek];
- e' - elipsoīda 2.ekscentricitāte no **gds** [sk.1.lek];
- $\underline{C2}$ - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
- $\underline{EN}$ - elipsoīda ziemeļpols;

- $\underline{C2} \underline{EN}$ - elipsoīda rotācijas ass;
- $\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$ - elipsoīda ekvatora plakne;
- $\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2} \underline{z2}$ - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa (s.a. elipsoīda [kvaziģeocentriskā] taisnleņķa koordinātu sistēma);

$\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas.
$\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2}$	- punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2</u> ;
$\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2}$	- punkta P elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ;
P_1, P_2	- elipsoīda punkti;
$P_1 P_2$	- elipsoīda normālšķēluma loks telpā $\underline{sR}^3$ [sk. 11.lek];
$\underline{EN} \underline{C2} \underline{EE}_1 P_1$	- punkta P_1 meridiāna plakne;
$\underline{EN} \underline{C2} \underline{EE}_2 P_2$	- punkta P_2 meridiāna plakne;
$\underline{EE}_1, \underline{EE}_2$	- elipsoīda ekvatora punkti;
$P P'$	- elipsoīda normāle tā brīvi izvēlētajā punktā P;
$P_1 P_1' = P_1 \underline{C2}_1' P_1'$	- elipsoīda normāle punktā P_1 ;
$P_2 P_2' = P_2 \underline{C2}_2' P_2'$	- elipsoīda normāle punktā P_2 ;
$\underline{C2}_1'$	- normāles $P_1 P_1'$ un ekvatora plaknes $\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$ šķēlums;
$\underline{C2}_2'$	- normāles $P_2 P_2'$ un ekvatora plaknes $\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$ šķēlums;
$P_1 = \underline{C3}$	- elipsoīda [tiešā] normālšķēluma loka sākuma punkts;
P_2	- elipsoīda [tiešā] normālšķēluma loka beigu punkts;
$\underline{ce2}_1 = (\underline{\lambda2}_1, \underline{\varphi2}_1, \underline{h2}_1)^T$	- elipsoīda punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_1, \underline{\varphi2}_1, \underline{h2}_1$ - punkta P_1 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₁ ; (punktam P_1 elipsoidālais augstums ($\underline{h2}_1 = 0$));
$\underline{ce2}_2 = (\underline{\lambda2}_2, \underline{\varphi2}_2, \underline{h2}_2)^T$	- elipsoīda punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; $\underline{\lambda2}_2, \underline{\varphi2}_2, \underline{h2}_2$ - punkta P_2 elipsoidālais (s.a. ģeodēziskais) garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₂ ; (punktam P_2 elipsoidālais augstums $\underline{h2}_2 = 0$) ;
$\underline{C3} \underline{x3} \underline{y3} \underline{z3}$	- vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpa (s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpa; s.a. punkta $P_1 = \underline{C3}$ ģeodēziskā taisnleņķa koordinātu sistēma);
$\underline{cs3} = (\underline{\alpha3}, \underline{v3}, \underline{d3})^T$	- punkta P vietējās ģeodēziskās sfēriskās koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā;
$\underline{\alpha3}, \underline{v3}, \underline{d3}$	- vietējais ģeodēziskais azimuts, ģeodēziskais slīpuma leņķis un [ģeodēziskais] slīpais attālums no <u>cs3</u> ;
$\underline{cr3} = (\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3})^T$	- punkta P vietējās ģeodēziskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x3}, \underline{y3}, \underline{z3}$	- punkta P vietējā ģeodēziskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr3</u> ;

Šeit un turpmāk, noklusējot stāvpunktu (s.a. topocentru) P_1 , ir pieņemts, ka punkta P_2 sfēriskās koordinātas **cs3** ir jālasa kā

$$\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T, \text{ kur}$$

$\underline{\alpha3}_{12}$ - ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{v3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{d3}_{12}$ - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Pieņemsim, ka elipsoīda punktiem P_1 un P_2 ir spēkā loģisks noteikums

$$(\text{not}(\underline{\lambda2}_1 = \underline{\lambda2}_2)) \text{ and } (\text{not}(\underline{\varphi2}_1 = \underline{\varphi2}_2)) \quad (13.1)$$

Kā zināms [sk.4.lek.], elipsoīda normāle punktā P atrodas meridiāna ($\underline{\lambda2} = \text{const}$) plaknē un veido ar elipsoīda rotācijas asi $\underline{C2} \underline{EN}$ krustpunktu P' .

Elipsoīda punktā P_1 normālšķēluma plakne $P_1 P_1' P_2$, ko uzdod elipsoīda normāle $P_1 P_1'$ punktā P_1 un ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 $\underline{\alpha3} = \underline{\alpha3}_{12}$, šķēļ elipsoīdu pa loku – **tiešo (labo) normālšķēlumu** $P_1 r[ight] P_2$. Tā vienādojumus var uzrakstīt punkta P_1 vietējā (s.a.

topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpā $C_3 \ x_3 \ y_3 \ z_3$ [sk. 11.lek.]. Tiešā normālšķēluma plaknei $P_1 \ P_1' \ P_2$ pieder taisne $P_2 \ P_1'$, kas nav punkta P_2 normāle.

Elipsoīda punktā P_2 normālšķēluma plakne $P_2 \ P_2' \ P_1$, ko uzdod elipsoīda normāle $P_2 \ P_2'$ punktā P_2 , šķēļ elipsoīdu pa loku – **pretējo** (kreiso) **normālšķēlumu** $P_2 \ I$ [eft] P_1 . Pretējā normālšķēluma plaknei $P_2 \ P_2' \ P_1$ pieder taisne $P_1 \ P_2'$, kas nav punkta P_1 normāle.

Attiecīgi $P_1 \ P_1' \ P_2$ un $P_2 \ P_2' \ P_1$ sauc par **tiešo un pretējo normālplakni** no punkta P_1 uz punktu P_2 .

Var pierādīt [Закаров 76, 46], [Барпатуни 62, 50], [Torge ,231], [Borre 90,] sekojošas noteikuma (13.1) sekas

- meridiānu punktu normāles krusto elipsoīda rotācijas asi vienā un tai pašā punktā tikai tad, ja sakrīt punktu elipsoidālie platumumi (s.a. punkti atrodas uz vienas un tās pašas paralēles) [sk. 4.2. zīm.], t.i.

$$\text{not } (\varphi_{21} = \varphi_{22}) \rightarrow \text{not } (P_1' = P_2') \quad (13.2)$$

- samazinoties punkta P elipsoidālam platumam, attālums $\text{dst} ()$ starp punkta P normāles punktu P' un elipsoīda centru C_2 samazinās, t.i.

$$(\varphi_{21} < \varphi_{22}) \rightarrow (\text{dst} (C_2, P_1') < \text{dst} (C_2, P_2')) \quad (13.3)$$

- dažādu meridiānu punktu normāles vispār nekrustojas (to šķēlums ir tukšs), t.i.

$$\text{not } (\lambda_{21} = \lambda_{22}) \rightarrow ((\underline{sP_1P_1'} \cap \underline{sP_2P_2'}) = \{ \}), \quad (13.4)$$

kur

$\underline{sPP'}$ – punkta P normāles punktu kopa;

$\cap$ - kopu šķēlums (kopīgā daļa);

$\{ \}$ – tukša kopa.

- normālplakņu $P_1 \ P_1' \ P_2$ un $P_2 \ P_2' \ P_1$ šķēlums ir normālšķēluma horda $\underline{sP_1P_2}$, t.i.

$$\underline{sP_1P_1'} \ P_2 \cap \underline{sP_2P_2'} \ P_1 = \underline{sP_1P_2} \quad (13.5)$$

- labā normālšķēluma $P_1 \ r$ [ight] P_2 un kreisā normālšķēluma $P_2 \ I$ [eft] P_1 punktu kopās $\underline{sP_1 \ r \ P_2}$ un $\underline{sP_2 \ I \ P_1}$ sakrīt tikai sākuma un beigu punkti t.i.

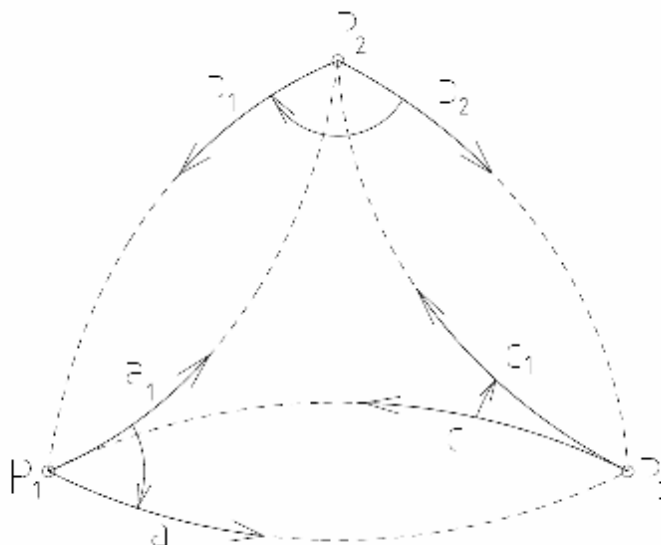
$$\underline{sP_1 \ r \ P_2} \cap \underline{sP_2 \ I \ P_1} = \{ P_1, P_2 \}, \quad (13.6)$$

kur

$\{ P_1, P_2 \}$ – netukša normālšķēlumu punktu kopa.

Piezīmes.

1. Ģeodēziskais azimuts α_{12} no punkta P_1 uz punktu P_2 ir leņķis starp elipsoīda ziemeļpolu $\underline{EN}$ un punktu P_2 (leņķis starp normālšķēlumiem $P_1 \ \underline{EN}$ un $P_1 \ r \ P_2$).
2. Izteiksme (13.6) apraksta Zemes elipsoīda **normālšķēlumu duālismu**.
3. Normālšķēlumu duālisma dēļ horizontālie leņķi $P_v \ P_u \ P_z, \dots$, kas mērīti starp triangulācijas trijstūra $P_u \ P_v \ P_z$ virsotnēm uz Zemes fiziskās virsmas, pēc to pārvešanas (s.a. reducēšanas) uz Zemes elipsoīda neveido noslēgtu trijstūri $P_1 \ P_2 \ P_3$ [Барпатуни 62, 51].



13.2. zīm. Zemes elipsoīda nenoslēgts trijstūris.

4. Zīmējumā pieņemts, ka ($\alpha_2 > \alpha_3$) un ($\alpha_3 > \alpha_1$).
5. Zīmējumā parādītie elipsoīda trijstūra $P_1 P_2 P_3$ leņķi α_2 , α_1 , α_3 un α_3 , α_2 , α_1 starp tiešiem normālšķēlumiem a , b , c neveido noslēgtu trijstūri.
6. Elipsoīda trijstūrus noslēdz, novēršot normālšķēlumu duālismu tā, ka tiešo un pretējo normālšķēlumu apvieno ģeodēziskā līnijā [sk. 14.lek.].

14. Zemes elipsoīda ģeodēziskās līnijas.

Zemes elipsoīda savstarpēji pretējo normālšķēlumu duālisma [sk.13.lek.] novēršanai starp punktiem P_1 un P_2 ievieš ģeodēzisko līniju [Cīrulis, 46]. Par **ģeodēzisko līniju** sauc tādu virsmas (arī elipsoīda) līniju, kuras katrā punktā tās galvenā normāle sakrīt ar virsmas normāli.

Vispārīgā gadījumā ģeodēzisko līniju raksturo gan tās liekums, gan arī vērpus

[Cīrulis, 24., 46., 65.], [Морозов 1979., 36.], [Torge 1991., 216, Geodesics on the Rotational Ellipsoid],

[Torge 1975., 231]

Ģeodēziskās līnijas liekums un vērpus ir

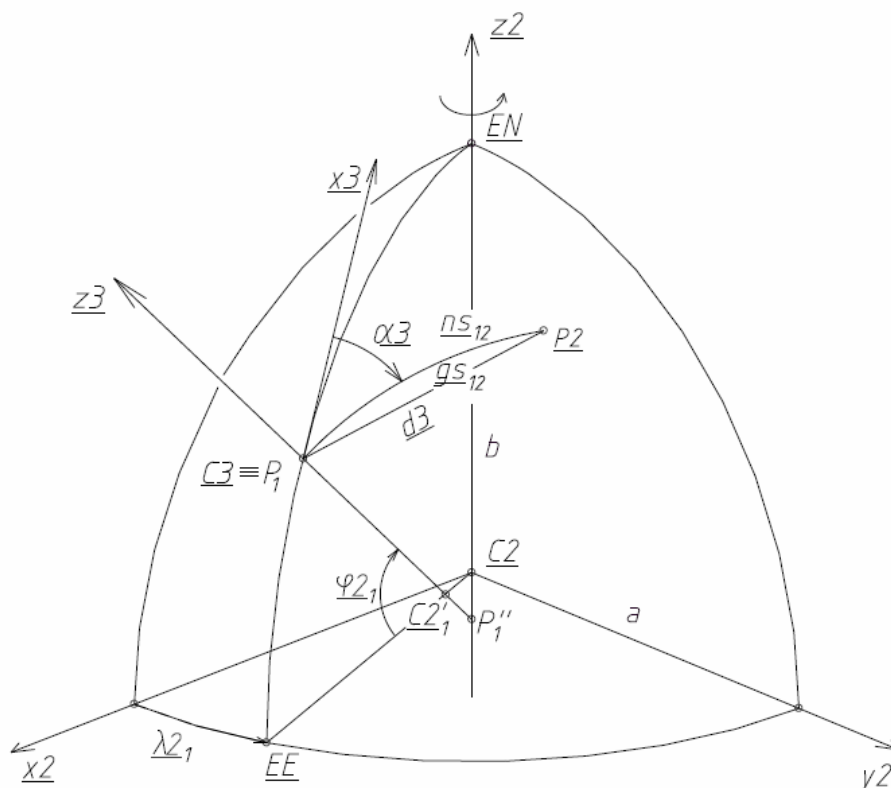
$$\chi_g = (1 + \frac{\eta^2 \varphi_1^2}{N^2} \cdot \cos^2 \alpha_3) / N(\varphi_1)$$

$$\sigma_g = - (\frac{\eta^2 \varphi_1^2}{N^2} \cdot \sin \alpha_3 \cdot \cos \alpha_3) / N(\varphi_1)$$

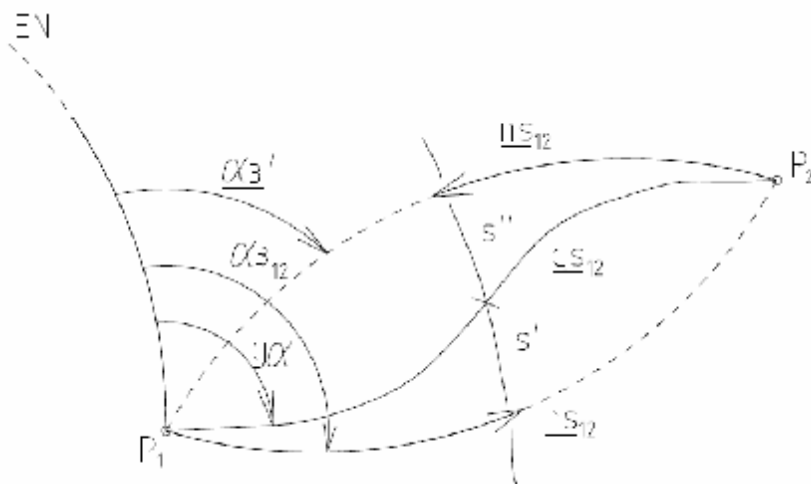
Zemes elipsoīda īpašas ģeodēziskās līnijas ir meridiāns un tam perpendikulāra šķēluma loks. Ģeodēziskā līnija apmierina Klero vienādojumu [1733.g.]

$$p_2 \cdot \sin \alpha_3 = \text{const},$$

kur p_2 – ģeodēziskās līnijas punkta paralēles rādiuss [sk. 2.lek.]



14.1.zīm. Zemes elipsoīda ģeodēziskā līnija.



14.2. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un ģeodēziska līnija [Torge 1975., 231].

Šeit:

- | | |
|---|---|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek]; |
| e' | - elipsoīda 2.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek]; |
| <u>$C2$</u> | - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs); |
| <u>EN</u> | - elipsoīda ziemeļpols; |
| <u>$C2\ EN$</u> | - elipsoīda rotācijas ass; |
| <u>$C2\ x2\ y2$</u> | - elipsoīda ekvatora plakne; |
| <u>$C2\ x2\ y2\ z2$</u> | - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa; |
| <u>$cr2$</u> = (<u>$x2$</u> , <u>$y2$</u> , <u>$z2$</u>) ^T | - punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas. |
| <u>$x2$</u> , <u>$y2$</u> , <u>$z2$</u> | - punkta P kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2</u> ; |
| <u>$ce2$</u> = (<u>$\lambda2$</u> , <u>$\varphi2$</u> , <u>$h2$</u>) ^T | - punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| <u>$\lambda2$</u> , <u>$\varphi2$</u> , <u>$h2$</u> | - punkta P elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ; |
| P_1, P_2 | - elipsoīda punkti; |
| $P_1\ P_2$ | - elipsoīda normālšķēluma loks telpā <u>sR^3</u> [sk. 11.lek]; |
| <u>$EN\ C2\ EE_1\ P_1$</u> | - punkta P_1 meridiāna plakne; |
| <u>$EN\ C2\ EE_2\ P_2$</u> | - punkta P_2 meridiāna plakne (zīm. nav parādīta) |
| <u>EE_1, EE_2</u> | - elipsoīda ekvatora punkti; |
| $P\ P'$ | - elipsoīda normāle tā brīvi izvēlēta punktā P; |
| $P_1\ P_1' = P_1\ C2_1'\ P_1'$ | - elipsoīda normāle punktā P_1 ; |
| $P_2\ P_2' = P_2\ C2_2'\ P_2'$ | - elipsoīda normāle punktā P_2 (zīm. nav parādīta); |
| <u>$C2_1'$</u> | - normāles $P_1\ P_1'$ un ekvatora plaknes <u>$C2\ x2\ y2$</u> šķēlums; |
| <u>$C2_2'$</u> | - normāles $P_2\ P_2'$ un ekvatora plaknes <u>$C2\ x2\ y2$</u> šķēlums; |
| $P_1 = C3 =$ | - elipsoīda [tiešā] normālšķēluma loka sākuma punkts; |
| P_2 | - elipsoīda [tiešā] normālšķēluma loka beigu punkts; |
| <u>$ce2_1$</u> = (<u>$\lambda2_1$</u> , <u>$\varphi2_1$</u> , <u>$h2_1$</u>) ^T | - elipsoīda punkta P_1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| <u>$\lambda2_1$</u> , <u>$\varphi2_1$</u> , <u>$h2_1$</u> | - punkta P_1 elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2_1</u> ; |
| <u>$ce2_2$</u> = (<u>$\lambda2_2$</u> , <u>$\varphi2_2$</u> , <u>$h2_2$</u>) ^T | - elipsoīda punkta P_2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas; |
| <u>$\lambda2_2$</u> , <u>$\varphi2_2$</u> , <u>$h2_2$</u> | - punkta P_2 elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2_2</u> ; |
| <u>$C3\ x3\ y3\ z3$</u> | - vietējā (s.a. topocentriskā) ģeodēziskā koordinātu telpa
(s.a. punkta $P_1 = C3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpa;
s.a. punkta $P_1 = C3$ ģeodēziskā taisnleņķa koordinātu sistēma); |

- $\underline{cs}_3 = (\underline{\alpha}_3, \underline{v}_3, \underline{d}_3)^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās sfēriskās koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā;
 $\underline{\alpha}_3, \underline{v}_3, \underline{d}_3$ - vietējais ģeodēziskais azimuts, ģeodēziskais slīpuma leņķis un [ģeodēziskais] slīpais attālums no $\underline{cs}_3$;
 $\underline{cr}_3 = (\underline{x}_3, \underline{y}_3, \underline{z}_3)^T$ - punkta P vietējās ģeodēziskās taisnleņķa koordinātas;
 $\underline{x}_3, \underline{y}_3, \underline{z}_3$ - punkta P vietējā ģeodēziskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{cr}_3$;
 $\underline{x}_3 = \underline{x}_{312}$ - punkta P_2 vietējā ģeodēziskā abscisa punkta P_1 sistēmā;
 $\underline{y}_3 = \underline{y}_{312}$ - punkta P_2 vietējā ģeodēziskā ordināta punkta P_1 sistēmā;
 $\underline{z}_3 = \underline{z}_{312}$ - punkta P_2 vietējā ģeodēziskā aplikāta punkta P_1 sistēmā;
 $\underline{ga} = \underline{ga}_{12}$ - ģeodēziskās līnijas azimuts punktā P_1 [sk. Heck 1995, 186., $\underline{\alpha}_1$];
 $\underline{gs} = \underline{gs}_{12}$ - ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;
 $\underline{ns} = \underline{ns}_{12}$ - tiešā normālšķēluma nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;

Šeit un turpmāk, noklusējot stāvpunktu (s.a. topocentru) P_1 , ir pieņemts, ka punkta P_2 sfēriskās koordinātas $\underline{cs}_3$ ir jālasa kā

- $\underline{cs}_{12} = (\underline{\alpha}_{12}, \underline{v}_{12}, \underline{d}_{12})^T$, kur
 $\underline{\alpha}_{12}$ - ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{v}_{12}$ - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{d}_{12}$ - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Ģeodēziskās līnijas punkta taisnleņķa koordinātas punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā $\underline{C}_3 \underline{x}_3 \underline{y}_3 \underline{z}_3$ [Heck 1995, (6.48)], [Großmann 1933], [J.Weingarten 1862], [sk.arī Мопозов 1979., (II.27)]

$$\underline{x}_3 = \underline{gs} \cdot \cos \underline{\alpha}_3 - (1 / 6) \cdot \cos \underline{\alpha}_3 \cdot (\underline{gs}^3 / (R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) \cdot M(\underline{\varphi}_{21}))) + (1 / 24) \cdot (\underline{eta} \underline{\varphi}_{21})^2 \cdot \tan \underline{\varphi}_{21} \cdot ((9 / M(\underline{\varphi}_{21})) \cdot (\cos \underline{\alpha}_3)^2 + (1 / N(\underline{\varphi}_{21})) \cdot (\sin \underline{\alpha}_3)^2) \cdot (\underline{gs}^4 / (R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) \cdot N(\underline{\varphi}_{21}))) + \dots \quad (14.1)$$

$$\underline{y}_3 = \underline{gs} \cdot \sin \underline{\alpha}_3 - (1 / 6) \cdot \sin \underline{\alpha}_3 \cdot (\underline{gs}^3 / (R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) \cdot N(\underline{\varphi}_{21}))) + (1 / 3) \cdot (\underline{eta} \underline{\varphi}_{21})^2 \cdot \sin \underline{\alpha}_3 \cdot \cos \underline{\alpha}_3 \cdot (\underline{gs}^4 / (R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) \cdot (N(\underline{\varphi}_{21})^2))) + \dots \quad (14.2)$$

$$\underline{z}_3 = - ((\underline{gs}^2 / (2 \cdot R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3)) + (1 / 2) \cdot (\underline{eta} \underline{\varphi}_{21})^2 \cdot \tan \underline{\varphi}_{21} \cdot \cos \underline{\alpha}_3 \cdot (\underline{gs}^3 / (R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) \cdot N(\underline{\varphi}_{21}))) + \dots \quad (14.3)$$

Ģeodēziskās līnijas ($\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3 = \text{const}$) koordinātu $\underline{x}_3, \underline{y}_3, \underline{z}_3$ izteiksmēs lietotas šādas funkcijas

- $R(\underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_3) = 1 / (\cos^2 \underline{\alpha}_3 / M(\underline{\varphi}_{21}) + \sin^2 \underline{\alpha}_3 / N(\underline{\varphi}_{21}))$
 - elipsoīda liekuma rādiuss pēc Eilera punktā P_1 ar platumu $\underline{\varphi}_{21}$ virzienā $\underline{\alpha}_3$ [sk. (4.25)];
 $M(\underline{\varphi}_{21}) = a \cdot (1 - e^2) / W(\underline{\varphi}_{21})^3$ - meridiāna liekuma rādiuss platumā $\underline{\varphi}_{21}$ [sk. (4.17)];
 $N(\underline{\varphi}_{21}) = a / W(\underline{\varphi}_{21})$ - meridiāna šķērslietuma rādiuss platumā $\underline{\varphi}_{21}$ [sk. (4.18)];
 $W(\underline{\varphi}_{21}) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi}_{21}}$ - elipsoidālā platumā 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)];
 $\underline{eta} \underline{\varphi}_{21} = e' \cdot \cos \underline{\varphi}_{21}$ - eta funkcija [sk. (2.26)];

Ģeodēzisko līniju var arī aprakstīt kvaziģeocentriskā telpā. Ar to saistītā koordinātu pārveidošanas vispārīgā sakarība ir šāda [sk. (11.13)]

$$\underline{cr}_{22} = r_{32}(\underline{cr}_{21}, \underline{cr}_{312}), \quad (14.4)$$

kur

$\underline{r}_{32}$ izteic ar taisnleņķa koordinātām nepieciešamās darbības, kas realizē pāreju no vietējās ģeodēziskās telpas $\underline{C}_3 \underline{x}_3 \underline{y}_3 \underline{z}_3$ uz kvaziģeocentrisko telpu $\underline{C}_2 \underline{x}_2 \underline{y}_2 \underline{z}_2$.

Vienu no darbības $\underline{r}_{32}$ izvērsumiem sk. [Heck 1995, 173], [Heck 1995, (2.20)], [sk. 11.lek.].

Pāreju no sfēriskām koordinātām $\underline{cs}_{12} = (\underline{\alpha}_{12}, \underline{v}_{12}, \underline{d}_{12})^T$ uz taisnleņķa koordinātām $\underline{cr}_{312} = (\underline{x}_{312}, \underline{y}_{312}, \underline{z}_{312})^T$ punkta $P_1 = \underline{C}_3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpā $\underline{C}_3 \underline{x}_3 \underline{y}_3 \underline{z}_3$ vispārēji apraksta sakarība (sk. (11.11))

$$\underline{cr3}_{12} = \underline{sr3} (\underline{cs3}_{12}), \quad (14.5)$$

kur

$\underline{sr3}$ izteic šādas ar sfēriskām koordinātām nepieciešamās darbības:

$$\begin{aligned} \underline{x3}_{12} &= \underline{d3}_{12} \cdot \underline{\cos} \underline{v3}_{12} \cdot \underline{\cos} \underline{\alpha3}_{12} \\ \underline{y3}_{12} &= \underline{d3}_{12} \cdot \underline{\cos} \underline{v3}_{12} \cdot \underline{\sin} \underline{\alpha3}_{12} \\ \underline{z3}_{12} &= - \underline{d3}_{12} \cdot \underline{\sin} \underline{v3}_{12} \end{aligned} \quad (14.6)$$

[Heck 1995., (6.13), (6.49)]

Pārejai (14.5) pretēju pāreju, kas paredz no taisnleņķa koordinātām $\underline{cr3}_{12} = (\underline{x3}_{12}, \underline{y3}_{12}, \underline{z3}_{12})^T$ iegūt sfēriskās koordinātas $\underline{cs3}_{12} = (\underline{\alpha3}_{12}, \underline{v3}_{12}, \underline{d3}_{12})^T$ punkta $P_1 = C3$ vietējā ģeodēziskā koordinātu telpā $C3 \underline{x3} \underline{y3} \underline{z3}$ vispārēji apraksta sakarība

$$\underline{cs3}_{12} = \underline{rs3} (\underline{cr3}_{12}), \quad (14.7)$$

kur

$\underline{sr3}$ izteic šādas ar taisnleņķa koordinātām nepieciešamās darbības:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha3}_{12} &= \underline{\tan}^{-1} (\underline{y3}_{12} / \underline{x3}_{12}), \text{ kur } \underline{\alpha3}_{12} \text{ ir jānoteic intervālā } [0, 2 \cdot \pi [; \\ \underline{v3}_{12} &= \underline{\tan}^{-1} (- \underline{z3}_{12} / \underline{\sqrt{(\underline{x3}_{12})^2 + (\underline{y3}_{12})^2}}); \\ \underline{d3}_{12} &= \underline{\sqrt{(\underline{x3}_{12})^2 + (\underline{y3}_{12})^2 + (\underline{z3}_{12})^2}}; \end{aligned} \quad \begin{aligned} (14.8) \\ (14.9) \\ (14.10) \end{aligned}$$

[Heck 1995., 187].

Ģeodēziskās līnijas vienādojumi (14.1), (14.2), (14.3) kopā ar sfēriskām koordinātām pēc (14.8), (14.9) un (14.10) sagādā iespēju pētīt tās sakarību ar normālšķēlumiem.

Liekot ģeodēziskās līnijas vietējo ģeodēzisko taisnleņķa koordinātu $\underline{x3}_{12}, \underline{y3}_{12}, \underline{z3}_{12}$ izteiksmes izteiksmē (14.9), iegūst, ka ģeodēziskās līnijas hordas garums starp punktiem P_1 un P_2 ir

$$\begin{aligned} \underline{d3}_{12} &= \underline{\sqrt{(\underline{x3}_{12})^2 + (\underline{y3}_{12})^2 + (\underline{z3}_{12})^2}} = \\ &= \underline{gs} \cdot (1 - (1 / 24) \cdot (\underline{gs} / R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))^2 \cdot (1 - \dots)), \end{aligned} \quad (14.11)$$

kur $\underline{gs} = \underline{gs}_{12}$ - ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;

Salīdzinot izteiksmi (14.11) ar normālšķēluma hordas garuma izteiksmi (11.7), redzama to galveno daļu līdzība [Heck 1995., (6.50)].

Tiešā normālšķēluma un ģeodēziskās līnijas nogriežņu garumu izteiksmes atšķiras tikai ar saskaitāmiem, sākot ar argumentu $\underline{gs}^5$ [Heck 1995., (6.51)]. Tādēļ abu līniju nogriežņu garumu starpība ir

$$\underline{ns} - \underline{gs} = (\underline{gs}^5 / (360 \cdot N^4(\varphi_{21}))) \cdot \underline{\eta}^4 \varphi_{21} \cdot \underline{\sin}^2 (2 \cdot \underline{\alpha3}) + \dots \quad (14.12)$$

Jāatzīmē, ka pat valsts ģeodēziskos darbos šo starpību drīkst neievērot, jo ģeodēziskās līnijas nogriežnim ar garumu $\underline{gs} = 1000 \text{ km}$ tā ir $\underline{\max} (\underline{ns} - \underline{gs}) < 0.1 \text{ mm}$ [Heck 1995., 187]

Ģeodēziskās līnijas slīpuma (s.a. depresijas) leņķis, sekojot izteiksmei (14.9) un veidojot izvirzījumu virknē pēc Teilora, ir

$$\begin{aligned} \underline{v3}_{12} &= \underline{\tan}^{-1} (- \underline{z3}_{12} / \underline{\sqrt{(\underline{x3}_{12})^2 + (\underline{y3}_{12})^2}}) = \\ &= (\underline{gs} / (2 \cdot R(\varphi_{21}, \underline{\alpha3}))) \cdot (1 - (\underline{gs} / N(\varphi_{21})) \cdot (\underline{\eta}^2 \varphi_{21})^2 \cdot \underline{\tan} \varphi_{21} \cdot \underline{\cos} \underline{\alpha3} + \dots) \end{aligned} \quad (14.13)$$

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Arī šeit, salīdzinot izteiksmi (14.13) ar normālšķēluma hordas slīpuma leņķa izteiksmi (11.9), redzama to galveno daļu līdzība [Heck 1995., (6.33)].

Tiešā normālšķēluma un ģeodēziskās līnijas azimutu starpība punktā P_1

$$\alpha_{312} - g\alpha_{12} = (1 / 12) \cdot \eta^2 \varphi_{21} \cdot \sin (2 \cdot \alpha_3) \cdot (g_s / N(\varphi_{21}))^2 + \dots \quad (14.14.)$$

Jāatzīmē, ka ģeodēziskās līnijas nogrieznim ar garumu $g_s = 100$ km tā ir $\max (\alpha_{312} - g\alpha_{12}) < 0.028''$ [Heck 1995., (6.55)].

Attālums starp normālšķēlumu un ģeodēzisko līniju tās viduspunktā [14.2. zīm.]

$$s' = s'' = (1 / 32) \cdot \eta^2 \varphi_{21} \cdot \sin (2 \cdot \alpha_3) \cdot (g_s^3 / N^2 (\varphi_{21})) \quad (14.15.)$$

Ja ģeodēziskās līnijas nogrieznim garums $g_s = 100$ km, tad $\max (s') = 0.0052$ m.

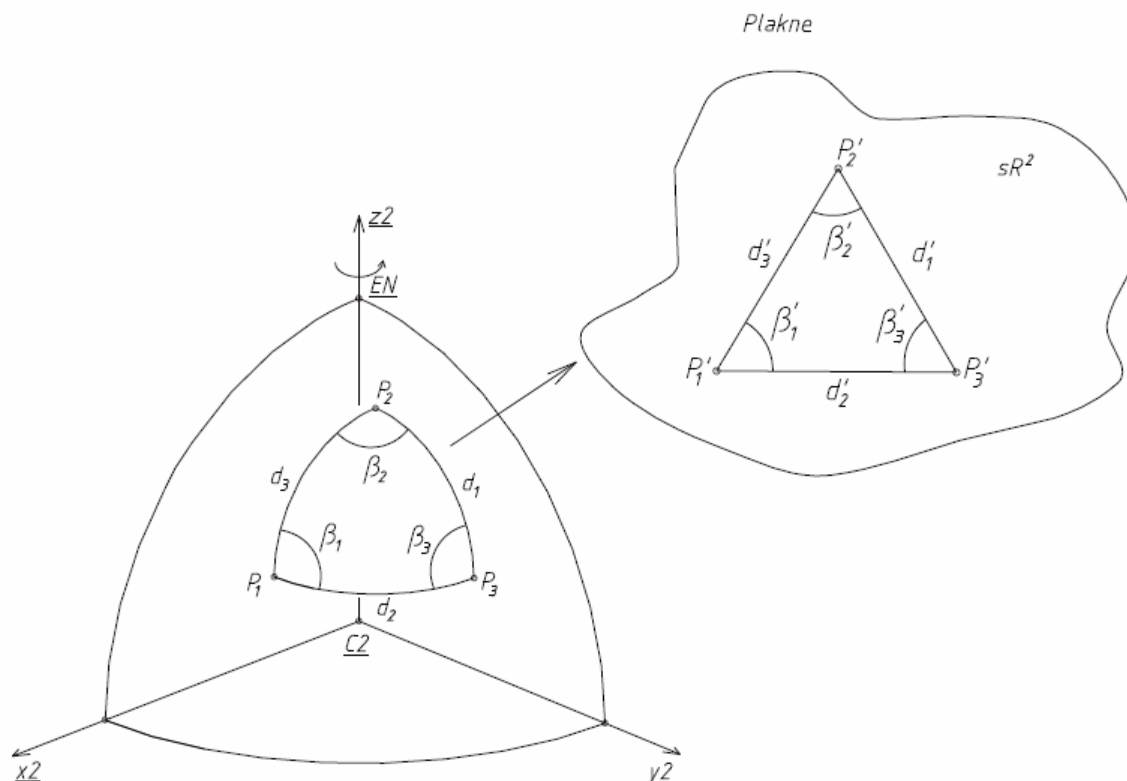
15. Zemes elipsoīda trijstūri.

Zemes elipsoīda trijstūri veido ģeodēzisko līniju nogriežņi $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, kas vilkti starp elipsoīda punktiem P_1, P_2, P_3 . Elipsoīda trijstūra elementi ir ģeodēzisko līniju nogriežņu garumi d_1, d_2, d_3 un elipsoidālie leņķi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ starp tā virsotnēm.

Parasti trijstūrī tikai 3 elementi no vajadzīgiem 6 elementiem ir iegūti kā ģeodēziskās mērīšanas vai ģeodēziskās konstrukcijas aprēķināšanas rezultāts. Ja ne mazāk kā 3 elementi ir doti, tad pārējos 3 iegūst veicot darbības, kuras sauc par **trijstūra aprēķināšanu**.

Elipsoidālo trijstūru malu garumi 1.klases ģeodēziskā tīklā sasniedz 20 - 60 km. Risinot navigācijas, satelīģeodēzijas un starpvalstu ģeodēziskos uzdevumus, elipsoidālo trijstūru malu garumi var vairākkārt pārsniegt 60 km robežu.

Ja elipsoidālo trijstūri nepieciešams aprēķināt ar relatīvo kļūdu vismaz 10^{-8} , tad trijstūra malu garumi nedrīkst pārsniegt 240 km. Šādā situācijā pieņem, ka trijstūra malas - ģeodēzisko līniju nogriežņi pietiekami labi sakrīt ar atbilstošas sfēras lielo riņķa līniju lokiem. Saka arī, ka elipsoidālais trijstūris tiek aizstāts ar sfērisko trijstūri. Sfērisko trijstūru aprēķināšanu aplūko sfēriskā trigonometrija.



15.1.zīm. Zemes elipsoīda trijstūri.

Šeit:

- | | |
|--------------------|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| e' | - elipsoīda 2.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| <u>C2</u> | - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs); |
| <u>EN</u> | - elipsoīda ziemeļpols; |
| <u>C2 EN</u> | - elipsoīda rotācijas ass; |
| <u>C2 x2 y2</u> | - elipsoīda ekvatora plakne; |
| <u>C2 x2 y2 z2</u> | - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa; |

$\underline{cr2} = (\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas.
$\underline{x2}, \underline{y2}, \underline{z2}$	- punkta P kvaziģeocentriskā abscesa, ordināta un aplikāta no <u>cr2</u> ;
$\underline{ce2} = (\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2})^T$	- punkta P kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda2}, \underline{\varphi2}, \underline{h2}$	- punkta P elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ;
P_1, P_2, P_3	- Zemes elipsoīda punkti;
$P_1 P_2 P_3$	- elipsoīda trijstūris (s.a. sferoidiskais trijstūris, elipsoidālais trijstūris);
$P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$	- elipsoīda ģeodēzisko līniju nogriežņi [sk. 14.lek];
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	- elipsoīda leņķi starp ģeodēziskām līnijām punktos $P_1, \dots$;
d_1, d_2, d_3	- elipsoīda ģeodēzisko līniju nogriežņu $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$ garumi (šeit pieņemts, ka $d_1 = \underline{gs}_{23}$ ir nogriežņa garums pret leņķi β_1 , $d_2 = \underline{gs}_{31}$ ir nogriežņa garums pret leņķi β_2 un $d_3 = \underline{gs}_{12}$ ir nogriežņa garums pret leņķi β_3);
sR^2	- trijstūra aprēķināšanas plakne;
P_1', P_2', P_3'	- elipsoīda trijstūra punktiem P_1, P_2, P_3 piekārtotie plaknes trijstūra punkti;
$\beta_1', \beta_2', \beta_3'$	- elipsoīda trijstūra leņķiem piekārtotie plaknes trijstūra leņķi;
d_1', d_2', d_3'	- elipsoīda ģeodēzisko līniju nogriežņu $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$ garumiem piekārtotie plaknes trijstūra malu garumi pret tā virsotnēm P_1', P_2', P_3' ;
ε	- elipsoīda trijstūra sfēriskais ekscess;

Ležandrs 1787.gadā ieteicis mazus elipsoīda trijstūrus (malu garums nedrīkst pārsniegt 240 km) aprēķināt kā:

- sfērisku trijstūri, ja tas pieder elipsoīda joslai ar platumu līdz 265 km (relatīvā kļūda nepārsniedz 10^{-8});
- plaknes trijstūri, ja katru elipsoīda trijstūra leņķi samazina par sfēriskā ekscesa ε trešdaļu.

Ležandrs (Legendre) Adrēns Marī (1752 1833) – franču matemātiķis. Neatkarīgi no K.Gausa izstrādājis mazāko

kvadrātu metodi. Ieguvis nozīmīgus rezultātus matemātiskajā analīzē un skaitļu teorijā. Atklājis polinomu klasi

(Ležandra polinomi) un pierādījis to svarīgākās īpašības. Atrdis Fermā lielās teorēmas pierādījumu, ja $n = 5$.

[sk. Izcilie matemātiķi]

Par elipsoīda trijstūra $d_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \underline{\varphi2}$ **sfērisko ekscesu** sauc šādu ģeodēziskās sistēmas, trijstūra elementu un vidējā platuma funkciju

$$\varepsilon = f \cdot d_1^2 \cdot \frac{\sin \beta_2 \cdot \sin \beta_3}{\sin \beta_1}, \quad (15.1)$$

kur

$$f = \rho^0 / (2 \cdot M(\underline{\varphi2}) \cdot N(\underline{\varphi2})) \quad (15.2)$$

un

$\rho^0 = 180^0 / \pi = 57.296\dots^0$ - radiāns, izteikts grādos;

$\underline{\varphi2}$ - trijstūra vidējais elipsoidālais platums;

$M(\underline{\varphi2}) = a \cdot (1 - e^2) / W(\underline{\varphi2})^3$ - meridiāna liekuma rādiuss platumā $\underline{\varphi2}$ [sk. (4.17)];

$N(\underline{\varphi2}) = a / W(\underline{\varphi2})$ - meridiāna šķērsliekuma rādiuss platumā $\underline{\varphi2}$ [sk. (4.18)];

$W(\underline{\varphi2}) = \text{sqrt} (1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi2})$ - elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)];

$\underline{\text{eta}} \underline{\varphi2} = e' \cdot \cos \underline{\varphi2}$ - eta funkcija [sk. (2.26)];

Ģeodēzijas praksē parasti lieto otro risinājumu, kas paredz sfēriskā ekscesa aprēķināšanu un sinusa teorēmas lietošanu. Izpildāmo darbību kārtība ir šāda.

Dots: d_1 - elipsoīda trijstūra ģeodēziskās līnijas nogriežņa $P_2 P_3$ garums;
 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - elipsoīda leņķi starp ģeodēziskām līnijām punktos P_1, P_2, P_3 ;
 φ_2 - trijstūra vidējais elipsoidālais platums;

Aprēķināt elipsoīda trijstūra ģeodēziskās līnijas nogriežņu $P_3 P_1$ un $P_1 P_2$ garumus d_2 un d_3 !

1. Aprēķināt trijstūra sfērisko ekscesu: $\varepsilon = f \cdot d_1^2 \cdot \frac{\sin \beta_2 \cdot \sin \beta_3}{\sin \beta_1}$.
2. Aprēķināt trijstūra parametru: $d = d_1 / \sin(\beta_1 - (\varepsilon / 3))$.
3. Aprēķināt trijstūra malas $P_3 P_1$ garumu: $d_2 = d \cdot \sin(\beta_2 - (\varepsilon / 3))$.
4. Aprēķināt trijstūra malas $P_1 P_2$ garumu: $d_3 = d \cdot \sin(\beta_3 - (\varepsilon / 3))$.

[Яковлев Н. В. Практикум по высшей геодезии 1982., 264.],
 [Cīrulis 1990., 102., Sfēriskā trijstūra aprēķināšana],
 [HdV 3.1. 1939., 286., Der Legendrische Satz],
 [Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии 1979., 3.nod.],
 [Torge W. 1991., 218.],
 [Heck 1995, 124.],

Elipsoidālā trijstūra aprēķināšanu datorvidē veic sekojoša procedūra
 [sk. datorvalodu Pascal]

```
{ x. Aprēķināt elipsoidālo trijstūri }
procedure Solve_Ellipsoidal_triangle
{ ----- }
( var d1:TY_rnm; { -trijstūra mala pret leņķi b1 [m] < }
  var d2:TY_rnm; { -trijstūra mala pret leņķi b2 [m] > }
  var d3:TY_rnm; { -trijstūra mala pret leņķi b3 [m] > }
  var b1:TY_rnm; { -trijstūra leņķis pret malu d1 [gr] <> }
  var b2:TY_rnm; { -trijstūra leņķis pret malu d2 [gr] <> }
  var b3:TY_rnm; { -trijstūra leņķis pret malu d3 [gr] <> }
  bl:TY_log; { -trijstūra leņķu izlīdz.slēdzis < }
  gc:TY_xyz; { -trijstūra vid.elips.platums.[gr] < }
  var gdt:TY_gdt { -ģeodēzisko datu pakete <> });
{ ----- }
{ 1996.g.7.decembrī }
{ ===== }
const ro=180/Pi;
var f:TY_rnm; { -palīglielums (Prakt.82,1.pielikums) }
var M,N:TY_rnm; { -elipsoīda galvenie liekuma rādiusi }
var exc:TY_rnm; { -trijstūra sfēriskais ekscess }
var d:TY_rnm; { -trijstūra konstante }
var t:TY_rnm; { -trijstūra leņķu nesaiste }
{ ----- }
{ ...Ležandrs,1787.g.; trijstūriem līdz d<240 km }
{ ----- }
{ ...sk. Яковлев Практикум по высш. геодезии 1982., 264 }
{ ...sk.Morozov 1979,69,76 }
{ ...sk.Adolfs 1949 }
{ ...sk.Torge 1991 Solution of Ellipsoidal Triangles }
{ ----- }
{ ===== }
{ sub}procedure Hlt({<} s:TY_str);
const p='Solve_Ellipsoidal_triangle';
```

```

begin {Hlt}
{ Sig; DspCom(2,p,s+'!'); Rd; Halt; } Rd; Halt; {}
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Solve_Ellipsoidal_triangle}
{ ----- }
with gdt do
begin {with gdt}
{ ----- }
{ ... "gdt.c" -elipsoīda polārais liekuma rādiuss }
{ -polar curvature radius }
{ ... "gdt.a" -elipsoīda lielās pusass garums }
{ -semimajor axis }
{ ... "gdt.e" -elipsoīda 1.ekscentricitāte }
{ -first eccentricity }
{ ... "gc.y" -vidējais elipsoidālais platums }
{ ----- }
{ uzstādīt galveno liekumu rādiusus }
M:=Set_Radius_of_curvature(gc, 0,gdt);
N:=Set_Radius_of_curvature(gc,90,gdt);
{ ----- }
{ aprēķināt palīglielumu } f:=ro/(2*M*N);
{ ----- }
{ aprēķināt trijstūra sfērisko ekscesu }
exc:=f*sqr(d1)*sin(b2/ro)*sin(b3/ro)/sin(b1/ro);
{ Writeln('exc=',Dms(exc,3)); }
{ ----- }
{ izlīdzināt trijstūra leņķus }
if b1 then
begin {if}
{ ----- }
{ aprēķināt trijstūra leņķu nesaisti }
t:=(b1+b2+b3)-(180+exc);
{ ----- }
{ pārbaudīt nesaisti }
if abs(t)>Dgr('0:01:00') then
Hlt('Nepieļaujama trijstūra leņķu nesaiste');
{ ----- }
{ piešķirt leņķiem labojumus }
b1:=b1-(t/3);
b2:=b2-(t/3);
b3:=b3-(t/3);
{ ----- }
end {if};
{ ----- }

{ ----- }
{ aprēķināt trijstūra konstanti }
d:=d1/sin((b1-(exc/3))/ro);
{ ----- }

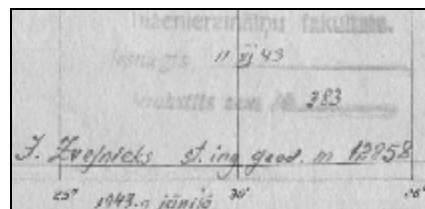
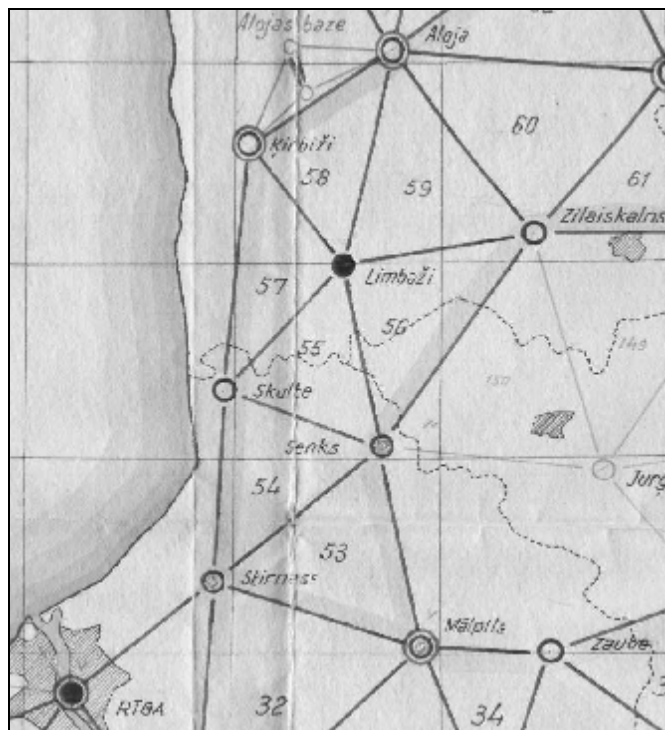
```

```

{ aprēķināt trijstūra malas }
d2:=d*sin((b2-(exc/3))/ro);
d3:=d*sin((b3-(exc/3))/ro);
{ ----- }
end {with gdt};
{ ----- }
end {Solve_Ellipsoidal_triangle};
{ ===== }

```

Procedūras “Solve_Ellipsoidal_triangle” lietošanas piemērs



15.2.zīm. Trijstūris “Senks – Mālpils – Stirnass” Latvijas 1.klases trigonometriskā tīklā

Zemes elipsoīda trijstūri
98.05.02 20h 11m 15s

Uzdevums:10.1

Dots:

1.klases trijstūris "Senks-Mālpils-Stirnas"

[sk.V. Adolfs 1949,stud.ģeod.,matr.26012, Uzdevums augstākajā ģeodēzijā II]

Elipsoīds: Hayford

Elipsoīda trijstūra mala:

"Mālpils-Stirnas" $d_1 = 31388.717 \ 4.49677356$

Piezīme. 31388.717 – malas garums metros, 4.49677356 – malas garuma decimāllogaritms

Elipsoīda trijstūra leņķi:

"Senks" $b_1 = 62:36:04.55$

"Mālpils" $b_2 = 61:19:12.96$

"Stirnas" $b_3 = 56:04:45.12$

Vidējais ģeodēziskais platums $gd.y = 57:01:02$

Iegūts:

Elipsoīda trijstūra malas:

"Mālpils-Stirnas" $d_1 = 31388.717 \ 4.49677356$

"Stirnas-Senks" $d_2 = 31017.151 \ 4.49160191$

"Senks-Mālpils" $d_3 = 29337.573 \ 4.46742418$

Elipsoīda trijstūra izlīdzinātie leņķi:

"Senks" $b_1 = 62:36:04.35$

"Mālpils" $b_2 = 61:19:12.76$

"Stirnas" $b_3 = 56:04:44.92$

98.05.02 20h 11m 15s

Zemes elipsoīda trijstūri

10. _____

16. Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda.

16.1 Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz plaknes.

Elementārajā ģeodēzijā aplūko tiešo ģeodēzisko uzdevumu (s.a. 1.ģeodēzisko pamatu uzdevumu) uz plaknes sR^2 [Biķis 74, 20]. Piešķirsim šai plaknei ģeodēzijā lietojamo koordinātu telpu un plakņu sarakstā 6-to loģisko kārtas numuru. Pieņemsim, ka vienkāršā ģeodēziskā konstrukcijā (P_1, P_2) plaknes punkts P_1 ir dots ar taisnleņķa koordinātām $\underline{cr6}_1 = (\underline{x6}_1, \underline{y6}_1)^T$, bet plaknes punkts P_2 – ar polārām koordinātām $\underline{cp6}_{12} = (\underline{\alpha6}_{12}, \underline{d6}_{12})^T$. Šeit $\underline{x6}_1$ ir punkta P_1 abscisa un $\underline{y6}_1$ ir punkta P_1 ordināta. Punkts P_2 , veicot ģeodēzisko mērīšanu apvidū un ievēdot nepieciešamās korekcijas pārejai no telpas sR^3 uz plakni sR^2 , ir noteikts ar direkcionalo leņķi $\underline{\alpha6}_{12}$ un attālumu $\underline{d6}_{12}$ no punkta P_1 uz punktu P_2 . Pārveidojot polārās koordinātas par taisnleņķa (s.a. Dekarta) koordinātām [Kronbergs 88,1,9], iegūst koordinātu starpības (s.a. pieaugumus)

$$\Delta x_{12} = \underline{d6}_{12} \cdot \cos \underline{\alpha6}_{12} \quad (16.1)$$

$$\Delta y_{12} = \underline{d6}_{12} \cdot \sin \underline{\alpha6}_{12} \quad (16.2)$$

Summas

$$\underline{x6}_2 = \underline{x6}_1 + \Delta x_{12} = \underline{x6}_1 + \underline{d6}_{12} \cdot \cos \underline{\alpha6}_{12} \quad (16.3)$$

$$\underline{y6}_2 = \underline{y6}_1 + \Delta y_{12} = \underline{y6}_1 + \underline{d6}_{12} \cdot \sin \underline{\alpha6}_{12}, \quad (16.4)$$

kur

$\underline{cr6}_2 = (\underline{x6}_2, \underline{y6}_2)^T$ - punkta P_2 taisnleņķa koordinātas,

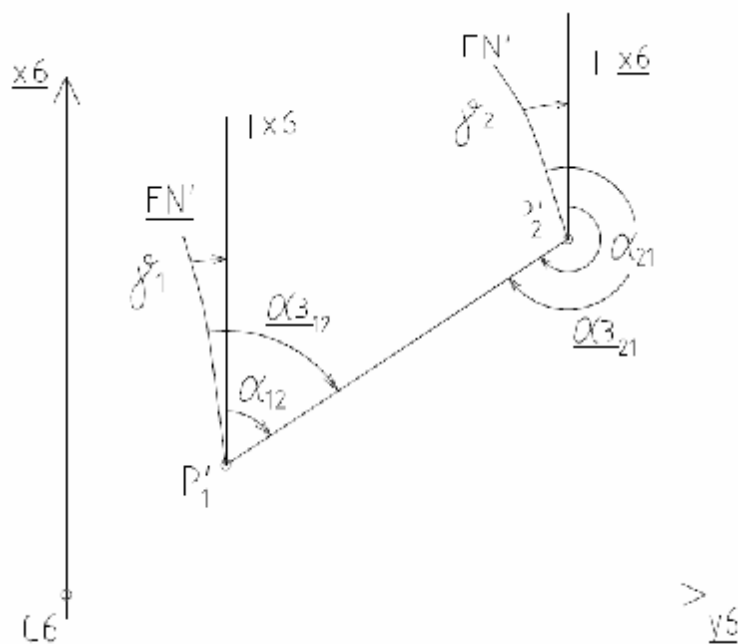
izteic **tiešo ģeodēzisko uzdevumu uz plaknes**. Ievēdot virziena vienības kolonnas vektoru [Kronbergs 88,1,126] $\underline{cu6}_{12} = (\cos \underline{\alpha6}_{12}, \sin \underline{\alpha6}_{12})^T$, izteiksmes (16.3) un (16.4) var uzrakstīt īsāk kā

darbības ar kolonnas matricām

$$\underline{cr6}_2 = \underline{cr6}_1 + \underline{d6}_{12} \cdot \underline{cu6}_{12} \quad (16.5)$$

vai arī kā procedūru $\underline{pr6}$ (polar – rectangular)

$$\underline{cr6}_2 = \underline{pr6} (\underline{cr6}_1, \underline{cp6}_{12}) \quad (16.6)$$



16.1.zīm. Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz plaknes

Šeit:

$\underline{C6} \ \underline{x6} \ \underline{y6}$
 $\underline{C6}$

- koordinātu plakne;
- plaknes koordinātu sākumpunkts; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta attēls;

$\underline{C6} \ \underline{x6}$

- abscisu ass; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta meridiāna (s.a. koordinātu plaknes $\underline{C6} \ \underline{x6} \ \underline{y6}$ ass meridiāna) attēls;

$\underline{C6} \ \underline{y6}$

- ordinātu ass; Zemes elipsoīda ekvatora attēls;

P_1'

- Zemes elipsoīda punkta P_1 attēls;

P_2'

- Zemes elipsoīda punkta P_2 attēls;

$P_1' \ \underline{EN}'$

- Zemes elipsoīda punkta P_1 meridiāna attēls;

$P_2' \ \underline{EN}'$

- Zemes elipsoīda punkta P_2 meridiāna attēls;

$P_1' \parallel \underline{x6}$

- abscisu asij $\underline{C6} \ \underline{x6}$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_1' ;

$P_2' \parallel \underline{x6}$

- abscisu asij $\underline{C6} \ \underline{x6}$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_2' ;

$\underline{y6}_1$

- meridiānu tuvināšanās punktā P_1' ;

$\underline{y6}_2$

- meridiānu tuvināšanās punktā P_2' ;

$P_1' \ P_2'$

- Zemes elipsoīda punktu P_1 un P_2 ģeodēziskās līnijas attēla chorda;

$\underline{\alpha}_{6 \ 2}$

- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_1' uz plaknes punktu P_2' (s.a. tiešais direkcionālais leņķis , r.a. $\underline{\alpha}_{1 \ 2}$);

$\underline{\alpha}_{6 \ 1}$

- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_2' uz plaknes punktu P_1' (s.a. pretējais direkcionālais leņķis , r.a. $\underline{\alpha}_{2 \ 1}$);

$\underline{\alpha}_{3 \ 2}$

- ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam $\underline{cs3}_{1 \ 2} = (\underline{\alpha}_{3 \ 2}, \underline{v}_{3 \ 2}, \underline{d}_{3 \ 2})^T$ punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā (3-ais loģiskais kārtas numurs); s.a. ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.];

$\underline{\alpha}_{3 \ 1}$

- ģeodēziskais azimuts no punkta P_2 uz punktu P_1 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam $\underline{cs3}_{2 \ 1} = (\underline{\alpha}_{3 \ 1}, \underline{v}_{3 \ 1}, \underline{d}_{3 \ 1})^T$ punkta P_2 vietējā ģeodēziskā telpā; (3-ais loģiskais kārtas numurs); s.a. ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.], [Biķis Ģeodēzija 74,

151.].

Pieņemsim, ka plaknes sR^2 punktā P_1' tiešais direkcionālais leņķis uz plaknes punktu P_2' ir α_{612} . Tad plaknes punktā P_2' pretējais direkcionālais leņķis uz plaknes punktu P_1' ir

$$\alpha_{621} = \text{rdh}(\alpha_{612} + 180), \quad (16.7)$$

kur

$\text{rdh}(x) = x$, ja x ir no intervāla $[0; 360[$;

$\text{rdh}(x) = x - 360$, ja x ir lielāks, vai vienāds ar 360;

$\text{rdh}(x) = x + 360$, ja x ir negatīvs.

izteic prasību, lai jebkuru aritmētisku darbību rezultāts ar horizontāliem leņķiem tiktu reducēts intervālā $[0; 360[$; (rdh – **r**eduction **h**orizontal).

Meridiānu tuvināšanos γ_{61} un γ_{62} punktos P_1' un P_2' vienkāršoti izteic sakarības [Biķis Ģeodēzija 93, 107.].

$$\gamma_{61} = (\lambda_{21} - \lambda_{20}^{(6)}) \cdot \sin \varphi_{21} \quad (16.8)$$

$$\gamma_{62} = (\lambda_{22} - \lambda_{20}^{(6)}) \cdot \sin \varphi_{22} \quad (16.9)$$

kur

$\lambda_{21}, \varphi_{21}$ – punkta P_1 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce2}_1 = (\lambda_{21}, \varphi_{21}, h_{21})^T$;

$\lambda_{22}, \varphi_{22}$ – punkta P_2 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce2}_2 = (\lambda_{22}, \varphi_{22}, h_{22})^T$;

$\lambda_{20}^{(6)}$ – 6-tās koordinātu plaknes ass meridiāna elipsoidālais garums.

Piemērs.

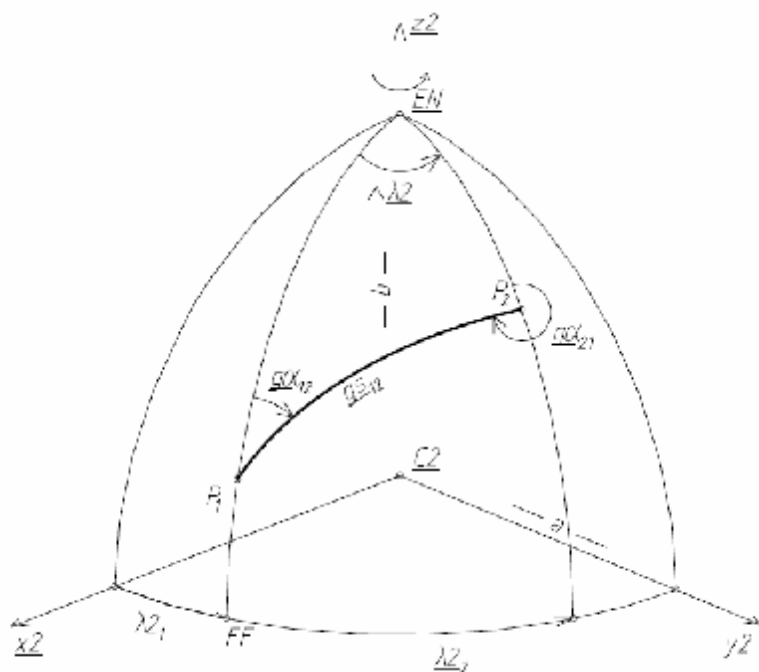
Pieņemsim, ka Latvijā vidējais elipsoidālais platums ir $\varphi_2 = 57^\circ$. Starpībai $(\lambda_{21} - \lambda_{20}^{(6)}) = 1^\circ$ atbilst apmēram 61 km garš paralēles loks. Ievērojot, ka vidējam platumam $\sin \varphi_2 = 0.8387$, paralēles loka galapunktos meridiānu tuvināšanās saniedz 50 minūtes [Biķis Ģeodēzija 93, 107.].

Virzoties plaknē no punkta P_1' uz punktu P_2' , meridiānu tuvināšanās mainās no γ_{61} līdz γ_{62} . Ģeodēziskais azimuts nogriežņa $P_1' - P_2'$ brīvi izvēlētajā punktā P_u' ir

$$\alpha_{312}^{(u)} = \alpha_{612} + \gamma_{6u} \quad (16.10)$$

Jāievēro, ka tiešam un pretējam ģeodēziskam azimutam nav spēkā sakarība (16.7), t.i.

$$\text{not}(\alpha_{321} = \text{rdh}(\alpha_{312} + 180)) \quad (16.11)$$



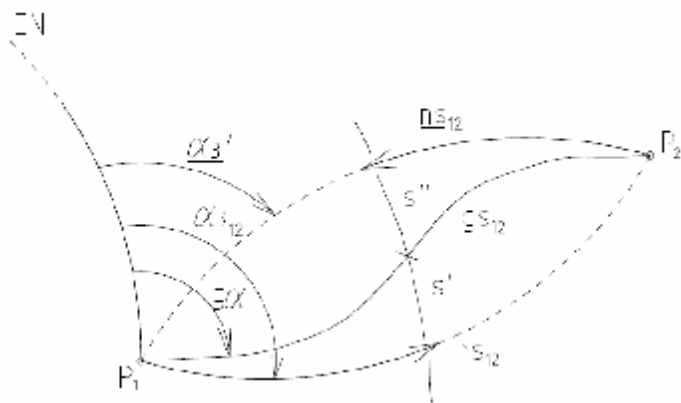
16.2.zīm. Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda.

Šeit:

a	- Zemes elipsoīda lielās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.];
b	- Zemes elipsoīda mazās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.];
e	- elipsoīda 1.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek];
e'	- elipsoīda 2.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek];
$C2$	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziġeocentrs);
EN	- elipsoīda ziemeļpols;
$C2 \ EN$	- elipsoīda rotācijas ass;
$C2 \ x2 \ y2$	- elipsoīda ekvatora plakne;
$C2 \ x2 \ y2 \ z2$	- kvaziġeocentriskā koordinātu telpa;
ga_{12}	- ġeodēziskās līnijas azimuts punktā P_1 [sk. Heck 1995, 186., α_1];
α_{312}	- tiešā normālšķēluma ġeodēziskais azimuts punktā P_1 ;
gs_{12}	- ġeodēziskās līnijas nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;
ns_{12}	- tiešā normālšķēluma nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;
$ce2_1 = (\lambda_{21}, \varphi_{21}, h_{21})^T$	- elipsoīda punkta P_1 kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\lambda_{21}, \varphi_{21}, h_{21}$	- punkta P_1 elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₁ ;
$ce2_2 = (\lambda_{22}, \varphi_{22}, h_{22})^T$	- elipsoīda punkta P_2 kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\lambda_{22}, \varphi_{22}, h_{22}$	- punkta P_2 elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2</u> ₂ ;
$\Delta\lambda_{12} = \lambda_{22} - \lambda_{21}$	- punktu P_1 un P_2 elipsoidālo garumu starpība;
$\Delta\varphi_{12} = \varphi_{22} - \varphi_{21}$	- punktu P_1 un P_2 elipsoidālo platumu starpība;
$\Delta\alpha_{12} = \alpha_{321} - \alpha_{312}$	- punktu P_1 un P_2 ġeodēzisko azimutu starpība;
$cs3_{12} = (\alpha_{312}, \nu_{312}, d_{312})^T$	- punkta P_2 sfēriskās koordinātas punktā P_1 ;
α_{312}	- ġeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
ν_{312}	- ġeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
d_{312}	- ġeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Piezīmes.

- Tā kā uzdevuma risināšana notiek uz Zemes elipsoīda, tad punktu P_1 un P_2 elipsoidālie augstumi ir $h_{21} = 0$ un $h_{22} = 0$.



16.3. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un ġeodēziska līnija [Torge 1975., 231].

- No (14.14) izriet, ka ġeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ tiešo azimutu punktā P_1 drīkst aizstāt ar tiešā normālšķēluma azimutu tajā pašā punktā

$$ga_{12}^{(1)} = \alpha_{312}^{(1)} \quad (16.12)$$
Iespējamā kļūda $(- (1 / 12) \cdot \eta^2 \varphi_{21} \cdot \sin (2 \cdot \alpha_3) \cdot (gs / N(\varphi_{21}))^2 + \dots)$ uz 100 km nepārsniedz 0.028".

- Savkārt izteiksme (14.12) rāda, ka ģeodēziskās līnijas un normālšķēluma nogriežņu garumi sakrīt ar kļūdu, ne lielāku par $((\underline{gs}^5 / (360 \cdot N^4(\underline{\varphi}_{21}))) \cdot \underline{eta}^4 \underline{\varphi}_{21} \cdot \underline{\sin}^2 (2 \cdot \underline{\alpha}_3) + \dots)$, kas nepārsniedz 0.1 mm uz 1000 km.

Tādējādi pieņemsim, ka

$$\underline{gs}_{12} = \underline{ns}_{12} \quad (16.13)$$

Dots:

- $\underline{\lambda}_{21}, \underline{\varphi}_{21}^{(1)}$ - elipsoīda punkta P_1 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce}_{21}$;
 $\underline{ga}_{12}^{(1)}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ tiešais azimuts punktā P_1 ;
 $\underline{gs}_{12}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ nogriežņa garums ;

Aprēķināt:

- $\underline{\lambda}_{22}, \underline{\varphi}_{22}^{(2)}$ - elipsoīda punkta P_2 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce}_{22}$;
 $\underline{ga}_{21}^{(2)}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ pretējais azimuts punktā P_2 ;

Risinājuma shēma.

- Aizstāt , ka norādīts iepriekš, azimutu $\underline{ga}_{12}^{(1)}$ ar $\underline{\alpha}_{12}^{(1)}$ un ģeodēziskās līnijas nogriežņa garumu $\underline{gs}_{12}$ ar $\underline{ns}_{12}$.

- Aprēķināt koordinātu un azimutu starpības no punkta P_1 uz P_2

$$\Delta \underline{\lambda}_{12} = \underline{\lambda}_{22} - \underline{\lambda}_{21} = \underline{f}_{\lambda} (\underline{\lambda}_{21}, \underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_{12}^{(1)}, \underline{ns}_{12}), \quad (16.14)$$

$$\Delta \underline{\varphi}_{12} = \underline{\varphi}_{22} - \underline{\varphi}_{21} = \underline{f}_{\varphi} (\underline{\lambda}_{21}, \underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_{12}^{(1)}, \underline{ns}_{12}), \quad (16.15)$$

$$\Delta \underline{\alpha}_{12} = \underline{\alpha}_{21} - \underline{\alpha}_{12} = \underline{f}_{\alpha} (\underline{\lambda}_{21}, \underline{\varphi}_{21}, \underline{\alpha}_{12}^{(1)}, \underline{ns}_{12}), \quad (16.16)$$

kur

$\underline{f}_{\lambda}$, $\underline{f}_{\varphi}$, $\underline{f}_{\alpha}$ – starpību aprēķināšanas funkcijas (matemātiskie paņēmieni)

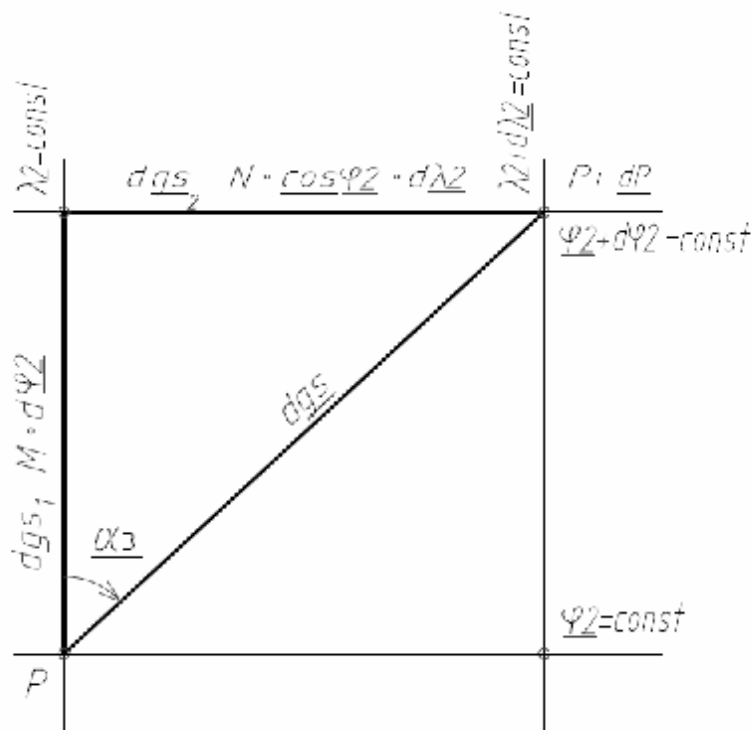
- Aprēķināt punkta P_2 elipsoidālās koordinātas un pretējo ģeodēzisko azimutu no P_2 uz P_1

$$\underline{\lambda}_{22} = \underline{\lambda}_{21} + \Delta \underline{\lambda}_{12} \quad (16.17)$$

$$\underline{\varphi}_{22} = \underline{\varphi}_{21} + \Delta \underline{\varphi}_{12} \quad (16.18)$$

$$\underline{\alpha}_{21}^{(2)} = \underline{\alpha}_{12}^{(1)} + \Delta \underline{\alpha}_{12} \quad (16.19)$$

Starpību aprēķināšanas matemātiskais paņēmieni paredz sastādīt ģeodēziskās līnijas 1.kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu un atrisināt to.



16.3.zīm. Ģeodēziskās līnijas elementāro pieaugumu trijstūris

No 16.3.zīm. seko, ka

$$dgs_2 / dgs = \sin \alpha_3 \quad (16.20)$$

$$\underline{\text{dgs}}_1 / \underline{\text{dgs}} = \underline{\cos \alpha_3} \quad (16.21)$$

$$\frac{d\alpha_3}{d\mathbf{g}_S} = \left(\frac{d\lambda_2}{d\mathbf{g}_S} \right) / \sin \varphi_2, \quad (16.22)$$

kur elementārā trijstūra malas ir

$$dgs_1 = M(\varphi^2) \cdot d\varphi^2 \quad (16.23)$$

$$dgs_2 = N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2 \cdot d\lambda_2$$

$$d\lambda_2 / d\theta_2 = \sin \alpha_3 / (N(\theta_2) \cdot \cos \theta_2) \quad (16.24)$$

$$d\phi_2 / d\theta_3 = \cos \alpha_3 / M(\phi_2) \quad (16.25)$$

$$d\alpha_3 / d\phi_2 = (\sin \alpha_3 \cdot \tan \phi_2) / (N(\phi_2)) \quad (16.26)$$

Šeit

$$M(\varphi_{21}) = a \cdot (1 - e^2) / W(\varphi_{21})^3 \quad - \text{meridiāna liekuma rādiuss platumā } \varphi_{21} [\text{sk. (4.17)}];$$

- meridiāna šķērsliekuma rādiuss platumā ϕ_{21} [sk. (4.18)],

$$W(\varphi_{21}) = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_{21}} \quad \text{- elipsoidālā platuma 1.sferoidiskā funkcija [sk. (2.20)]};$$

Integrējot (16.24) – (16.26) pa ģeodēzisko līniju no punkta P_1 līdz P_2 , iegūst

$$\Delta\lambda_{12}|_2 = p_1 \int^{p_2} (\sin \alpha_3 / (N(\varphi_2) \cdot \cos \varphi_2)) \cdot dgs \quad (16.27)$$

$$\Delta\phi_{12} = \phi_1 \int^{\phi_2} (\cos \alpha / M(\phi)) \cdot d\phi \quad (16.28)$$

$$\Delta\alpha_{12} = p_1 \int^{p_2} ((\sin \alpha_3 \cdot \tan \phi_2) / (N(\phi_2))) \cdot dgs \quad (16.29)$$

Praktiski integrēšanu veic pēc Runge – Kutta – Inglanda metodes [sk.Pascal procedūru]

Rediģēt!

[Яковлев Н. В. Практикум по высшей геодезии 1982., 264.],
 [Cīrulis 1990., 102., Sfēriskā trijstūra aprēķināšana],
 [HdV 3.1. 1939., 286., Der Legendrische Satz],
 [Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии 1979., 3.nod.],
 [Torge W. 1991., 218.],
 [Heck 1995, 124.]

Tiešā ģeodēziskā uzdevuma risināšanu datorvidē veic sekojoša procedūra
 [sk. datorvalodu Pascal]

```
{ x. Aprēķināt punkta ģeodēziskās koordinātas pēc ģeodēziskā
  azimuta un ģeodēziskā attāluma }
procedure Problem_direct_geodetic
{ ----- }
(   gd1:TY_xyz; { -1.punkta ģeodēziskās koord. < }
  al3_1_2:TY_rnm; { -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu < }
  gl3_1_2:TY_rnm; { -ģeod.attālums no 1.uz 2.punktu < }
  var   gd2:TY_xyz; { -2.punkta ģeodēziskās koord. > }
  var al3_2_1:TY_rnm; { -ģeod.azimuts no 2.uz 1.punktu > }
  var   gdt:TY_gdt { -ģeodēzisko datu pakete < } );
{ ----- }
{ 1991.g.1.jūnijā -pirmais variants }
{ ----- }
{ 1996.g.19.oktobrī }
{ ===== }

const ro=180/Pi;
var So:TY_rnm; { -palīgattālums }
var fi:TY_rnm;
var al:TY_rnm;
var dfi:array[1..6] of TY_rnm; { -platuma pieaugums }
var dL:array[1..6] of TY_rnm; { -garuma pieaugums }
var dA:array[1..6] of TY_rnm; { -azimuta pieaugums }
{ ----- }
{ sk. Praktikum po vissxei geodezii (vicxislyitelynie
  raboti.- M.:Nedra,1982.-368 s.",280.lpp. Tiesxa~
  gyeodehziska~ uzdevuma risinahsxana pehc Runge-
  Kuta-Inglada }
{ ...sk.Morozov 79,180 }
{ ...sk.Zakatov 76,141 }
{ ----- }
{ ...Ģeodēziskais attālums = }
{ ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums }
{ ----- }
{sub}function V(fi:TY_rnm){return}:TY_rnm;
{ ...Prakt.82,(17.22) }
var g:TY_rnm; { -palīgliebums gamma }
begin {V}
  g:=1.25*Sqr(gdt.e1)*Sqr(Cos(fi/ro));
  V:=(1+0.6*g)/(1+0.2*g);
end {V};
{ ----- }
{sub}function deltaB(fi,al:TY_rnm){return}:TY_rnm;
```

```

{ ...Prakt.82,(17.22) }
{ ... "So" -palīgattālums }
begin {deltaB}
  deltaB:=So*Sqr(V(fi))*V(fi)*Cos(al/ro);
end {deltaB};
{ ----- }
{sub} function deltaL(fi,al:TY_rnm){return}:TY_rnm;
{ ...Prakt.82,(17.22) }
{ ... "So" -palīgattālums }
begin {deltaL}
  deltaL:=So*V(fi)*Sin(al/ro)/Cos(fi/ro);
end {deltaL};
{ ----- }
{sub} function deltaA(fi,al:TY_rnm){return}:TY_rnm;
{ ...Prakt.82,(17.22) }
{ ... "So" -palīgattālums }
begin {deltaA}
  deltaA:=deltaL(fi,al)*Sin(fi/ro);
end {deltaA};
{ ----- }
{sub} procedure delta(i:TY_crd;fi,al:TY_rnm);
begin {delta}
  dfi[i]:=deltaB(fi,al); { -platuma pieaugums }
  dL[i]:=deltaL(fi,al); { -garuma pieaugums }
  dA[i]:=deltaA(fi,al); { -azimuta pieaugums }
end {delta};
{ ----- }
begin {Problem_direct_geodetic}
{ ----- }
with gdt do
begin {with gdt}
{ ----- }
{ ...sk.Prakt.82,281 }
{ ----- }
{ ... "gdt.c" -elipsoīda polārais liekuma rādiuss }
{ -polar curvature radius }
{ ... "gdt.e1" -elipsoīda 2.ekscentricitāte }
{ -second eccentricity }
{ ----- }
{ ... "gd1.y" -1.punkta ģeodēziskais platums < }
{ ... "al3_1_2" -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu < }
{ ... "gl3_1_2" -ģeod.attālums no 1.uz 2.punktu < }
{ ----- }
{ aprēķināt palīgattālumu sk.c.281 (17.22) }
So:=(gl3_1_2/c)*ro;
{ ----- }
{ ...sk.c.282,tab.153 }
{ ----- }
{ izpildīt 1.soli }
al:=al3_1_2;
fi:=gd1.y;
delta(1,fi,al);
{ ----- }

```

```

{ izpildīt 2.soli }
al:=al3_1_2+0.5*dA[1];
fi:=gd1.y +0.5*dfi[1];
delta(2,fi,al);
{ ----- }
{ izpildīt 3.soli }
al:=al3_1_2+0.25*(dA[1]+dA[2]);
fi:=gd1.y +0.25*(dfi[1]+dfi[2]);
delta(3,fi,al);
{ ----- }
{ izpildīt 4.soli }
al:=al3_1_2-dA[2]+2*dA[3];
fi:=gd1.y -dfi[2]+2*dfi[3];
delta(4,fi,al);
{ ----- }
{ izpildīt 5.soli }
al:=al3_1_2+(7*dA[1]+10*dA[2]+dA[3])/27;
fi:=gd1.y +(7*dfi[1]+10*dfi[2]+dfi[3])/27;
delta(5,fi,al);
{ ----- }
{ izpildīt 6.soli }
al:=al3_1_2+(28*dA[1]-125*dA[2]+546*dA[3]+54*dA[4]
-378*dA[5])/625;
fi:=gd1.y +(28*dfi[1]-125*dfi[2]+546*dfi[3]+54*dfi[4]
-378*dfi[5])/625;;
delta(6,fi,al);
{ ----- }
{ ... "gd2.x" -2.punkta ģeodēziskais garums > }
{ ... "gd2.y" -2.punkta ģeodēziskais platums > }
{ ----- }
{ aprēķināt 2.punkta ģeodēziskās koordinātas (17.21) }
gd2.x:=gd1.x+(dL[1]+4*dL[3]+dL[4])/6;
gd2.y:=gd1.y+(dfi[1]+4*dfi[3]+dfi[4])/6;
{ ----- }
{ ... "al3_1_2" -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu > }
{ ... "al3_2_1" -ģeod.azimuts no 2.uz 1.punktu > }
{ ----- }
{ aprēķināt azimutu no 2.punkta uz 1.punktu }
al3_2_1:=al3_1_2+(dA[1]+4*dA[3]+dA[4])/6;
al3_2_1:=Rdh(al3_2_1+180);
{ ----- }
end {with gdt};
{ ----- }
end {Problem_direct_geodetic};
{ ===== }

```

```

{ x.Aprēķināt 2.punkta elipsoidālās koordinātas pēc 1.punkta
  elipsoidālām koordinātām un elipsoidālām polārām
  koordinātām no 1.uz 2.punktu }
procedure Problem_direct_geodetic_
{ ----- }

```

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

```
(
  nm_u:TY_crd; { -u-punkta loģiskais nosaukums < }
  nm_v:TY_crd; { -v-punkta loģiskais nosaukums < }
  var gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete < }
  var er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ 1997.g. 5.decembrī }
{ 1999.g. 2.aprīlī }
{ 2000.g. 1.aprīlī }
{ ----- }
{ PRC_XXX }
{ ----- }
{ ... mdf -darbību modifikācija }
{ mdf=1 - }
{ ----- }
label Ex;
var u,v:TY_crd; { -punktu loģiskie numuri }
{ ===== }
sub}procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Problem_direct_geodetic_';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Problem_direct_geodetic_}
{ ===== }

  { uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
  { ===== }
  { ...gdt -ģeodēzisko datu pakete }
  { ----- }
  { ...gdt._e2[3].x -3.punkta ģeodēziskais garums < }
  { ...gdt._e2[3].y -3.punkta ģeodēziskais platums < }
  { ----- }
  { ...gdt._e2[4].x -4.punkta ģeodēziskais garums > }
  { ...gdt._e2[4].y -4.punkta ģeodēziskais platums > }
  { ----- }
  { ...gdt._p2[3,4].x -elips.azimuts no 3.uz 4.punktu < }
  { ...gdt._p2[3,4].y -elips.attālums no 3.uz 4.punktu < }
  { ----- }
  { ...gdt._p2[4,3].x -elips.azimuts no 4.uz 3.punktu < }
  { ...gdt._p2[4,3].y -elips.attālums no 4.uz 3.punktu < }
  { ===== }
  { sk. Praktikum 82.-368 s.",280.lpp. }
  { Tiešā ģeodēziskā uzdevuma risināšana pēc Runge-Kuta- }
  { Inlanda }
  { ...sk.Morozov 79,180 }
  { ...sk.Zakatov 76,141 }
  { ----- }
with gdt do
begin {with gdt}
```

```

{ ----- }
{ uzstādīt punkta numurus } u:=nm_u; v:=nm_v;
{ pārbaudīt punkta numurus }
if (u>np) or (v>np) then
  Hlt('Nepieļaujams punkta loģiskais numurs');
if er.f then goto Ex;
{ ----- }
{ aprēķināt elipsoidālās koordinātas }
Problem_direct_geodetic(_e2[u],_p2[u,v].x,_p2[u,v].y,
                        _e2[v],_p2[v,u].x,gdt);
if er.f then goto Ex;
{ ----- }
end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Problem_direct_geodetic_};

```

17. Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda.

17.1. Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz plaknes.

Elementārajā ģeodēzijā aplūko pretējo ģeodēzisko uzdevumu (s.a. 2.ģeodēzisko pamatzdevumu) uz plaknes sR^2 [Biķis 74, 20]. Piešķirsim šai plaknei ģeodēzijā lietojamo koordinātu telpu un plakņu sarakstā 6-to loģisko kārtas numuru. Pieņemsim, ka vienkāršā ģeodēziskā konstrukcijā (P_1, P_2) plaknes punkti P_1 un P_2 ir doti ar taisnleņķa koordinātām $\underline{cr6}_1 = (\underline{x6}_1, \underline{y6}_1)^T$ un $\underline{cr6}_2 = (\underline{x6}_2, \underline{y6}_2)^T$. Šeit $\underline{x6}_u$ ir punkta P_u ($u = 1, 2$) abscisa un $\underline{y6}_u$ ir punkta P_u ordināta. Pretējais ģeodēziskais uzdevums paredz polāro koordinātu $\underline{cp6}_{12} = (\underline{\alpha6}_{12}, \underline{d6}_{12})^T$ noteikšanu no punkta P_1 uz punktu P_2 pēc to taisnleņķa koordinātām $\underline{cr6}_1$ un $\underline{cr6}_2$. Mācību grāmatās, piemēram, [Biķis 74, 21]. direkcionalo leņķi $\underline{\alpha6}_{12}$ izteic kā

$$\underline{\alpha6}_{12} = \tan^{-1} (\underline{\Delta y6}_{12} / \underline{\Delta x6}_{12}), \quad (17.1)$$

kur

$$\underline{\Delta x6}_{12} = \underline{x6}_2 - \underline{x6}_1 \quad (17.2)$$

$$\underline{\Delta y6}_{12} = \underline{y6}_2 - \underline{y6}_1 \quad (17.3)$$

un attālumu $\underline{d6}_{12}$ kā

$$\underline{d6}_{12} = \sqrt{ \underline{\Delta x6}_{12}^2 + \underline{\Delta y6}_{12}^2 } \quad (17.4)$$

vai arī no (16.1.) un (16.2.) kā

$$\underline{d6}_{12} = \underline{\Delta x6}_{12} / \cos \underline{\alpha6}_{12} \quad (17.5)$$

$$\underline{d6}_{12} = \underline{\Delta y6}_{12} / \sin \underline{\alpha6}_{12} \quad (17.6)$$

Jāatzīmē, ka izteiksmē (17.1) funkcija $\tan^{-1}$ ir pārtraukta ģeodēzijā lietojamo direkcionalo leņķu $\underline{\alpha6}_{12}$ intervālā $[0^\circ, 360^\circ$ [Buiķis 97, 32]. Bez tam, uzticot direkcionalo leņķu aprēķināšanu datoram, jā rūpējas par situāciju ,kad koordinātu starpība $\underline{\Delta x6}_{12}$ ir nulle vai arī tuva tai.

Tādēļ polāro koordinātu $\underline{cp6}_{12} = (\underline{\alpha6}_{12}, \underline{d6}_{12})^T$ aprēķināšanai datorvidē ieteicams lietot sekojošas Pascal funkcijas

```
{ x.Aprēķināt direkcionalo leņķi pēc plaknes koordinātām }
function Drc { DiReCtion }
({ 1.punkta plaknes koordinātu pieraksts...} c1:TY_xyz;
 { 2.punkta plaknes koordinātu pieraksts...} c2:TY_xyz):
{return} TY_rnm;
{ 1992.g.14.septembrī }
{ ----- }
{ 1997.g.19.aprīlī }
{ ...šī procedūra dod pareizus rezultātus arī matemātikā }
{   pieņemtai koordinātu plaknei   }
{ ----- }
{ 1.Ja drc(<)<0.0,tad atrisinājuma nav }
{ 2.Direkcionalais leņķis 0<=drc(<)<360 }
{ ----- }
const ro=180/3.141592653589793;
var xd,yd,a,b,r:TY_rnm;
{ ----- }
```

```

begin {Drc}
{ ----- }
xd:=c2.x-c1.x; { -x Difference }
yd:=c2.y-c1.y; { -y Difference }
{ ----- }
if (xd=0.0) and (yd=0.0) then
begin {if}
drc:=-1; exit;
end {if};
{ ----- }
a:=abs(xd); b:=abs(yd);
{ ----- }
if a>b then
r:=arctan(b/a)*ro
{end if}
else
r:=90-arctan(a/b)*ro
{end else};
{ ----- }
if (xd> 0) and (yd>=0) then Drc:=r;
if (xd<=0) and (yd> 0) then Drc:=180-r;
if (xd< 0) and (yd<=0) then Drc:=180+r;
if (xd>=0) and (yd< 0) then Drc:=360-r;
{ ----- }
end {Drc};

{ x.Aprēķināt attālumu pēc koordinātām }
function Dst { DiSTance }
( { 1.punkta plaknes koordinātu pieraksts...} c1:TY_xyz;
  { 2.punkta plaknes koordinātu pieraksts...} c2:TY_xyz):
{return} TY_rnm;
{ 1992.g.14.septembrī }
var xd,yd:TY_rnm;
begin {Dst}
xd:=c2.x-c1.x; { -x Difference }
yd:=c2.y-c1.y; { -y Difference }
dst:=Sqrt(xd*xd+yd*yd);
end {Dst};

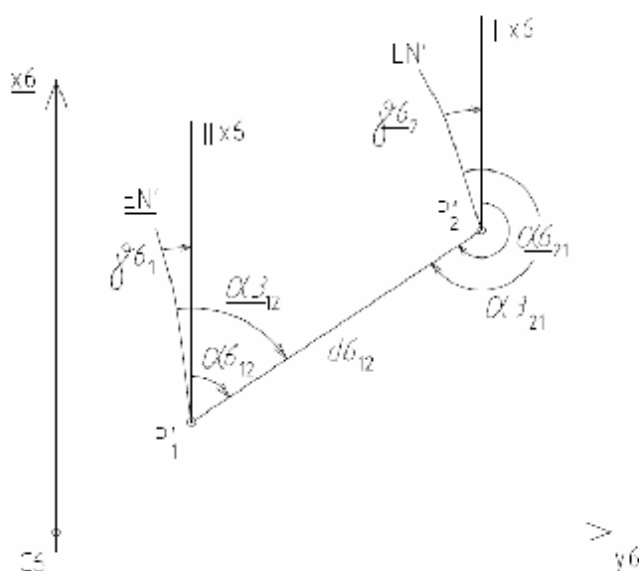
```

Izteiksmē

$\mathbf{cp6}_{12} = \mathbf{rp6}(\mathbf{cr6}_1, \mathbf{cr6}_2),$

(17.7)

kas ir funkciju Drc un Dst apvienots pieraksts, rp6 (rectangular – polar) izteic **pretējo ģeodēzisko uzdevumu uz plaknes.**



17.1.zīm. Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz plaknes

Šeit:

$\underline{C6} \ \underline{x6} \ \underline{y6}$

$\underline{C6}$

$\underline{C6} \ \underline{x6}$

$\underline{C6} \ \underline{y6}$

P_1'

P_2'

$P_1' \ \underline{EN}'$

$P_2' \ \underline{EN}'$

$P_1' \parallel \underline{x6}$

$P_2' \parallel \underline{x6}$

$\underline{\gamma 6}_1$

$\underline{\gamma 6}_2$

$P_1' \ P_2'$

$\underline{\alpha 6}_{1 \ 2}$

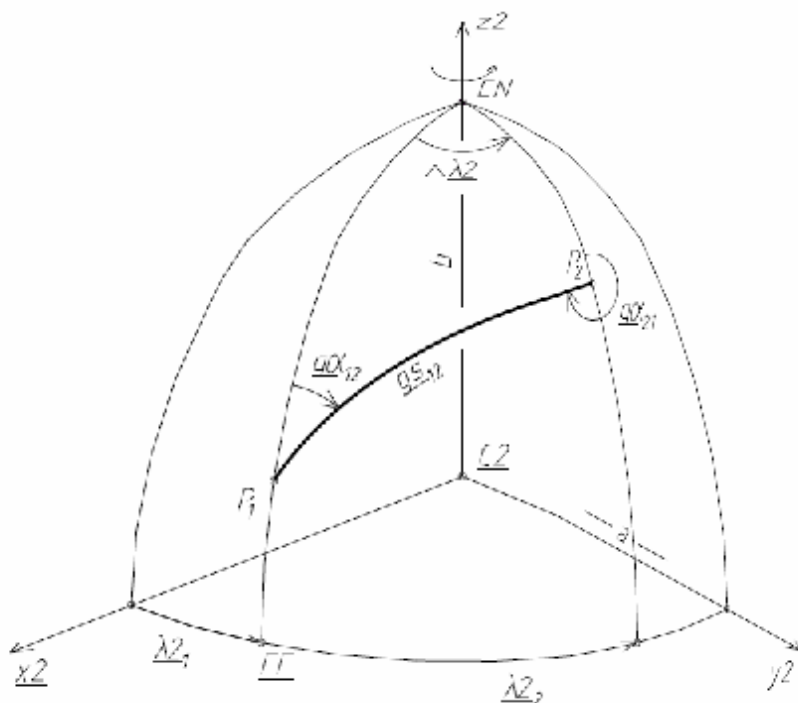
$\underline{\alpha 6}_2 \ 1$

$\underline{\alpha 3}_{1 \ 2}$

$\underline{\alpha 3}_2 \ 1$

$\underline{d6}_{12}$

- koordinātu plakne;
- plaknes koordinātu sākumpunkts; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta attēls;
- abscisu ass; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta meridiāna (s.a. koordinātu plaknes $\underline{C6} \ \underline{x6} \ \underline{y6}$ ass meridiāna) attēls;
- ordinātu ass; Zemes elipsoīda ekvatora attēls;
- Zemes elipsoīda punkta P_1 attēls;
- Zemes elipsoīda punkta P_2 attēls;
- Zemes elipsoīda punkta P_1 meridiāna attēls;
- Zemes elipsoīda punkta P_2 meridiāna attēls;
- abscisu asij $\underline{C6} \ \underline{x6}$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_1' ;
- abscisu asij $\underline{C6} \ \underline{x6}$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_2' ;
- meridiānu tuvināšanās punktā P_1' ;
- meridiānu tuvināšanās punktā P_2' ;
- Zemes elipsoīda punktu P_1 un P_2 ģeodēziskās līnijas attēla chorda;
- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_1' uz plaknes punktu P_2' (s.a tiešais direkcionālais leņķis , r.a. $\underline{\alpha}_{1 \ 2}$);
- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_2' uz plaknes punktu P_1' (s.a pretējais direkcionālais leņķis , r.a. $\underline{\alpha}_{2 \ 1}$);
- ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam $\underline{cs3}_{1 \ 2} = (\underline{\alpha}_{3 \ 1 \ 2}, \underline{v}_{3 \ 1 \ 2}, \underline{d}_{3 \ 1 \ 2})^T$ punkta P_1 vietējā ģeodēziskā telpā (3-ais loģiskais kārtas numurs); s.a. ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.];
- ģeodēziskais azimuts no punkta P_2 uz punktu P_1 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam $\underline{cs3}_{2 \ 1} = (\underline{\alpha}_{3 \ 2 \ 1}, \underline{v}_{3 \ 2 \ 1}, \underline{d}_{3 \ 2 \ 1})^T$ punkta P_2 vietējā ģeodēziskā telpā; (3-ais loģiskais kārtas numurs); s.a. ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.], [Biķis Ģeodēzija 74, 151.].
- attālums starp plaknes punktiem P_1' un P_2'



17.2.zīm. Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda.

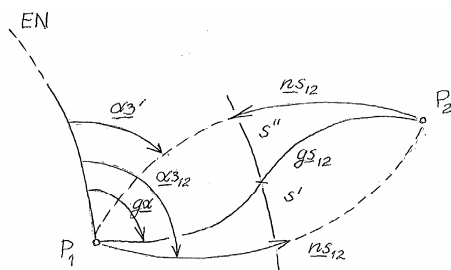
Šeit:

- a - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.];
- b - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no gds [sk. 1.lek.];
- e - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek];
- e' - elipsoīda 2.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek];
- C2 - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
- EN - elipsoīda ziemeļpols;
- C2 EN - elipsoīda rotācijas ass;
- C2 x2 y2 - elipsoīda ekvatora plakne;
- C2 x2 y2 z2 - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa;
- P1 , P2 - ģeodēziskās līnijas P1 , P2 sākuma un beigu punkts;
- P3 - ģeodēziskās līnijas P1 , P2 viduspunkts
- ga12 - ģeodēziskās līnijas azimuts punktā P1 [sk. Heck 1995, 186., a1];
- a312 - tiešā normālšķeluma ģeodēziskais azimuts punktā P1 ;
- gs12 - ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums starp punktiem P1 un P2;
- ns12 - tiešā normālšķeluma nogriežņa garums starp punktiem P1 un P2;
- ce21 = (λ21, φ21, h21)^T - elipsoīda punkta P1 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- λ21, φ21, h21 - punkta P1 elipsoidālais garums, platums un augstums no ce21 ;
- ce22 = (λ22, φ22, h22)^T - elipsoīda punkta P2 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- λ22, φ22, h22 - punkta P2 elipsoidālais garums, platums un augstums no ce22 ;
- ce23 = (λ23, φ23, h23)^T - elipsoīda punkta P3 kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
- λ23, φ23, h23 - punkta P3 elipsoidālais garums, platums un augstums no ce23 ;
- λ23 = λm; - ģeodēziskās līnijas P1 , P2 viduspunkta elipsoidālais platums;
- φ23 = φm; - ģeodēziskās līnijas P1 , P2 viduspunkta elipsoidālais garums;
- Δλ212 = λ22 - λ21 - punktu P1 un P2 elipsoidālo garumu starpība;
- Δφ212 = φ22 - φ21 - punktu P1 un P2 elipsoidālo platumu starpība;
- Δα312 = α312 - α312 - punktu P1 un P2 ģeodēzisko azimutu starpība;
- cs312 = (α312, u312, d312)^T - punkta P2 sfēriskās koordinātas punktā P1 ;
- α312 - ģeodēziskais azimuts no punkta P1 uz punktu P2 ;

- $\underline{v}_{12}$ - ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
 $\underline{d}_{12}$ - ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;

Piezīmes.

- Tā kā uzdevuma risināšana notiek uz Zemes elipsoīda, tad punktu P_1 , P_2 un P_3 elipsoidālie augstumi ir $\underline{h}_{21} = 0$, $\underline{h}_{22} = 0$ un $\underline{h}_{23} = 0$.



16.3. zīm. Zemes elipsoīda normālšķēlumi un ģeodēziska līnija [Torge 1975., 231].

- No (14.14) izriet, ka ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ tiešo azimutu punktā P_1 drīkst aizstāt ar tiešā normālšķēluma azimutu tajā pašā punktā
 $\underline{g}_{12}^{(1)} = \underline{\alpha}_{12}^{(1)}$. (17.8)
 Iespējamā kļūda $(- (1 / 12) \cdot \underline{\eta}^2 \varphi_{21} \cdot \underline{\sin} (2 \cdot \underline{\alpha}_3) \cdot (\underline{g}_s / N(\varphi_{21}))^2 + \dots)$ uz 100 km nepārsniedz 0.028".
- Savkārt izteiksme (14.12) rāda, ka ģeodēziskās līnijas un normālšķēluma nogriežņu garumi sakrīt ar kļūdu, ne lielāku par $((\underline{g}_s^5 / (360 \cdot N^4(\varphi_{21}))) \cdot \underline{\eta}^4 \varphi_{21} \cdot \underline{\sin}^2 (2 \cdot \underline{\alpha}_3) + \dots)$, kas nepārsniedz 0.1 mm uz 1000 km.
 Tādējādi pieņemsim, ka
 $\underline{g}_{12} = \underline{n}_{12}$ (17.9)

Dots:

- $\underline{\lambda}_{21}, \varphi_{21}$ - elipsoīda punkta P_1 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce}_{21}$;
 $\underline{\lambda}_{22}, \varphi_{22}$ - elipsoīda punkta P_2 elipsoidālās koordinātas no $\underline{ce}_{22}$;

Aprēķināt:

- $\underline{g}_{12}^{(1)}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ tiešais azimuts punktā P_1 ;
 $\underline{g}_{12}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ nogriežņa garums (s.a. ģeodēzisko attālumu);
 $\underline{g}_{21}^{(2)}$ - ģeodēziskās līnijas $P_1 - P_2$ pretējais azimuts punktā P_2 ;

Risinājuma shēma

(“maziem” (< 60 km) attālumiem, lietojot vidējos argumentus).

4. Aprēķināt elipsoidālo koordinātu starpības (radiānos)

$$\underline{d\lambda} = (\underline{\lambda}_{22} - \underline{\lambda}_{21}) / \rho \quad (17.10)$$

$$\underline{d\varphi} = (\varphi_{22} - \varphi_{21}) / \rho , \quad (17.11)$$

kur $\rho = 180^\circ / \pi$.

5. Aprēķināt ģeodēziskās līnijas P_1 , P_2 viduspunkta P_3 elipsoidālās koordinātas

$$\underline{\lambda}_m = (\underline{\lambda}_{21} + \underline{\lambda}_{22}) / 2 \quad (17.12.)$$

$$\underline{\varphi}_m = (\varphi_{21} + \varphi_{22}) / 2 \quad (17.13.)$$

6. Aprēķināt elipsoidālo koordinātu pieaugumu meridiāna virzienā

$$q = \underline{d\varphi} \cdot M(\underline{\varphi}_m) \cdot (1 - ((e')^2 - 2 \cdot \underline{\eta}^2 \underline{\varphi}_m) \cdot (\underline{d\varphi}^2 / 8) - (1 + \underline{\eta}^2 \underline{\varphi}_m) \cdot (\underline{d\lambda} \cdot \underline{\cos} \underline{\varphi}_m)^2 / 12 -$$

$$- (\underline{d\lambda} \cdot \underline{\sin \varphi_m})^2 / 8) \quad (17.14.)$$

[eta funkciju sk.izteiksmi (2.26.)]

7. Aprēķināt elipsoidālo koordinātu pieaugumu paralēles virzienā

$$p = \underline{d\lambda} \cdot \underline{\cos \varphi_m} \cdot N(\varphi_m) \cdot (1 + (1 - 9 \cdot (e')^2 + 8 \cdot \underline{\eta^2 \varphi_m}) \cdot \underline{d\varphi^2} / 24 - (\underline{d\lambda} \cdot \underline{\sin \varphi_m})^2 / 24) \quad (17.15.)$$

8. Aprēķināt elipsoidālā azimuta pieaugumu

$$\alpha = \underline{d\lambda} \cdot \underline{\sin \varphi_m} \cdot (1 + (3 + 2 \cdot \underline{\eta^2 \varphi_m}) \cdot \underline{d\varphi^2} / 24 + (1 + \underline{\eta^2 \varphi_m}) \cdot (\underline{d\lambda} \cdot \underline{\cos \varphi_m})^2 / 12) \cdot \rho \quad (17.16.)$$

9. Aprēķināt elipsoidālo azimutu ģeodēziskās līnijas viduspunktā P_3

$$\underline{\alpha_m} = \underline{drc}((0; 0), (q; p)); \quad (17.17.)$$

10. Aprēķināt azimutus punktos P_1 un P_2

$$\underline{\alpha_{312}} = \underline{rdh}(\underline{\alpha_m} - (\alpha / 2)) \quad (17.18.)$$

$$\underline{\alpha_{321}} = \underline{rdh}(\underline{\alpha_m} + (\alpha / 2) + 180^\circ) \quad (17.19.)$$

11. Aprēķināt elipsoidālo attālumu no punkta P_1 uz P_2

$$\underline{n_{S12}} = \underline{dst}((0; 0), (q; p)); \quad (17.20.)$$

Pretējā ģeodēziskā uzdevuma risināšanu datorvidē veic sekojoša procedūra
[sk. datorvalodu Pascal]

```
{ x. Aprēķināt ģeodēziskos azimutus un ģeodēzisko attālumu
pēc punkta ģeodēziskām koordinātām }
procedure Problem_inverse_geodetic
{ ----- }
(   gd1:TY_xyz; { -1.punkta ģeodēziskās koord.  < }
    gd2:TY_xyz; { -2.punkta ģeodēziskās koord.  < }
    var al3_1_2:TY_rnm; { -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu > }
    var gl3_1_2:TY_rnm; { -ģeod.attālums no 1.uz 2.punktu > }
    var al3_2_1:TY_rnm; { -ģeod.azimuts no 2.uz 1.punktu > }
    var gdt:TY_gdt { -ģeodēzisko datu pakete    < });
{ ----- }
{ 1996.g.25.oktobrī }
{ ===== }
const ro=180/Pi;
var dl:TY_rnm; { -ģeod.garumu starpība radiānos }
var dfi:TY_rnm; { -ģeod.platumu starpība radiānos }
var lm:TY_rnm; { -vidējais ģeodēziskais garums }
var bm:TY_rnm; { -vidējais ģeodēziskais platums }
var gc:TY_xyz; { -vidējās ģeodēziskās koordinātas }
var em2:TY_rnm; { -vid.plat.3.sferoid.funkc.vērt.kvadr. }
var Nm:TY_rnm; { -normālšķēluma liekuma rādiuss vid.plat.}
var Mm:TY_rnm; { -normālšķēluma liekuma rādiuss vid.plat.}
var Qg:TY_rnm; { -1.starpība }
var Pg:TY_rnm; { -2.starpība }
var Ag:TY_rnm; { -3.starpība }
var QP1:TY_xyz; { -1.palīgpunkts }
var QP2:TY_xyz; { -2.palīgpunkts }
```

```

var Am:TY_rnm; { -vidējais azimuts }
{ ----- }
{ sk. Morozov 79,178 }
{ sk. Borre 90,45 }
{ ...pēc Gausa ar vidējiem argumentiem }
{ ----- }
{ ...Ģeodēziskais attālums = }
{ ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums }
{ ----- }
begin {Problem_inverse_geodetic}
{ ----- }
with gdt do
begin {with gdt}
{ ----- }
{ ...sk.Morozov 79,178 }
{ ----- }
{ ..."gdt.c" -elipsoīda polārais liekuma rādiuss }
{ -polar curvature radius }
{ ..."gdt.e1" -elipsoīda 2.ekscentricitāte }
{ -second eccentricity }
{ ----- }
{ ..."gd1.x" -1.punkta ģeodēziskais garums < }
{ ..."gd1.y" -1.punkta ģeodēziskais platums < }
{ ----- }
{ ..."gd2.x" -2.punkta ģeodēziskais garums < }
{ ..."gd2.y" -2.punkta ģeodēziskais platums < }
{ ----- }
{ ..."al3_1_2" -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu > }
{ ..."gl3_1_2" -ģeod.attālums no 1.uz 2.punktu > }
{ ..."al3_2_1" -ģeod.azimuts no 2.uz 1.punktu > }
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko koordinātu starpības radiānos }
dfi:=(gd2.y-gd1.y)/ro;
dl:=(gd2.x-gd1.x)/ro;
{ ...sk.Morozov 79,(IV.177) }
{ ----- }
{ ..."dl" -ģeod.garumu starpība radiānos }
{ ..."dfi" -ģeod.platumu starpība radiānos }
{ ----- }
{ aprēķināt vidējo garumu grādos }
lm:=(gd1.x+gd2.x)/2;
{ ----- }
{ aprēķināt vidējo platumu grādos }
bm:=(gd1.y+gd2.y)/2;
{ ----- }
{ iegūt vidējās ģeodēziskās koordinātas }
SetCrd(lm,bm,gc);
{ ----- }
{ uzstādīt platuma 3.sferoid.funkcijas vērt.kvadrātu }
em2:=Sqr(Eta(bm,gdt));
{ ...sk.Morozov 79,(IV.177) }
{ ----- }

```

```

{ ----- }
{ ... "dl" -ģeod.garumu starpība radiānos }
{ ... "dfi" -ģeod.platumu starpība radiānos }
{ ... "lm" -vidējais ģeodēziskais garums grādos }
{ ... "bm" -vidējais ģeodēziskais platums grādos }
{ ... "gc" -vidējās ģeodēziskās koordinātas }
{ ... "em2" -platuma 3.sferoid.funkcijas vērt.kvadrāts }
{ ----- }
{ uzstādīt normālšķeluma liekuma rādiusus pēc vid.plat. }
Mm:=Set_Radius_of_curvature(gc, 0,gdt);
Nm:=Set_Radius_of_curvature(gc,90,gdt);
{ ...sk.Morozov 79,(IV.177) }
{ ----- }
{ ... "Mm" -meridiāna liekuma rādiuss vidējā platumā }
{ ... "Nm" -1.vertikāla liek. rādiuss vidējā platumā }
{ ----- }
{ aprēķināt starpības }
{ ----- }
Qg:=dfi*Mm*(1
    -(Sqr(e1)-2*em2)*(Sqr(df)/8)
    -(1+em2)*Sqr(dl*cos(bm/ro))/12
    -Sqr(dl*sin(bm/ro))/8);
{ ----- }
Pg:=dl*cos(bm/ro)*Nm*(1
    +(1-9*Sqr(e1)+8*em2)*Sqr(df)/24
    -Sqr(dl*sin(bm/ro))/24);
{ ----- }
Ag:=dl*sin(bm/ro)*(1
    +(3+2*em2)*Sqr(df)/24
    +(1+em2)*Sqr(dl*cos(bm/ro))/12)*ro;
{ ...grādos }
{ ----- }
{ ievest palīgpunktus }
SetCrd(0,0,QP1);
SetCrd(Qg,Pg,QP2);
{ ----- }
{ aprēķināt vidējo azimutu }
Am:=Drc(QP1,QP2);
{ ----- }
{ ... "al3_1_2" -ģeod.azimuts no 1.uz 2.punktu > }
{ ... "gl3_1_2" -ģeod.attālums no 1.uz 2.punktu > }
{ ... "al3_2_1" -ģeod.azimuts no 2.uz 1.punktu > }
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēziskos azimutus }
al3_1_2:=Rdh(Am-Ag/2);
al3_2_1:=Rdh(Am+Ag/2+180);
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēziskās līnijas garumu }
gl3_1_2:=Dst(QP1,QP2);
{ ----- }
end {with gdt};
{ ----- }

```

```
end {Problem_inverse_geodetic};
{ ===== }
```

Skaitlisks piemērs (datorprogramma "gds_hgh_")

11. _____

Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda

01.02.13 15h 42m 15s

Uzdevums: 11.1

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92

Elipsoīds: GRS_80

Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[1] Burtnieki 25:15:38.0296 57:41:22.8839 83.606

Elipsoīda punkts "Burtnieki"

Polārās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: cp2

Koordinātu katalogs: GD94

[4] Mālaini 147:57:20.5450 10241.614

Iegūts:

Elipsoīda punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] Burtnieki 25:15:38.0296 57:41:22.8839 0.000

Elipsoīda punkts "Mālaini"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[4] Mālaini 25:21:05.3120 57:36:42.1534 0.000

01.02.13 15h 42m 15s

Tiešais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda

11. _____

12. _____

Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda

01.02.13 15h 39m 03s

Uzdevums: 12.1

Dots:

Ģeodēziskā sistēma: LGS_92

Elipsoīds: GRS_80

Aizpildošā tīkla punkts "Burtnieki"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[1] Burtnieki 25:15:38.0296 57:41:22.8839 83.606

Aizpildošā tīkla punkts "Mālaini"

Elipsoidālās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: ce2

Koordinātu katalogs: GD94

[3] Mālaini 25:21:05.3120 57:36:42.1534 90.554

Iegūts:

Elipsoīda punkts "Burtnieki"

Polārās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: cp2

Koordinātu katalogs: GD94

[4] Mālaini 147:57:20.5446 10241.614

Elipsoīda punkts "Mālaini"

Polārās koordinātas kvaziģeocentriskā telpā: cp2

Koordinātu katalogs: GD94

[2] Burtnieki 328:01:57.0334 10241.614

01.02.13 15h 39m 03s

Pretējais ģeodēziskais uzdevums uz Zemes elipsoīda

12. _____

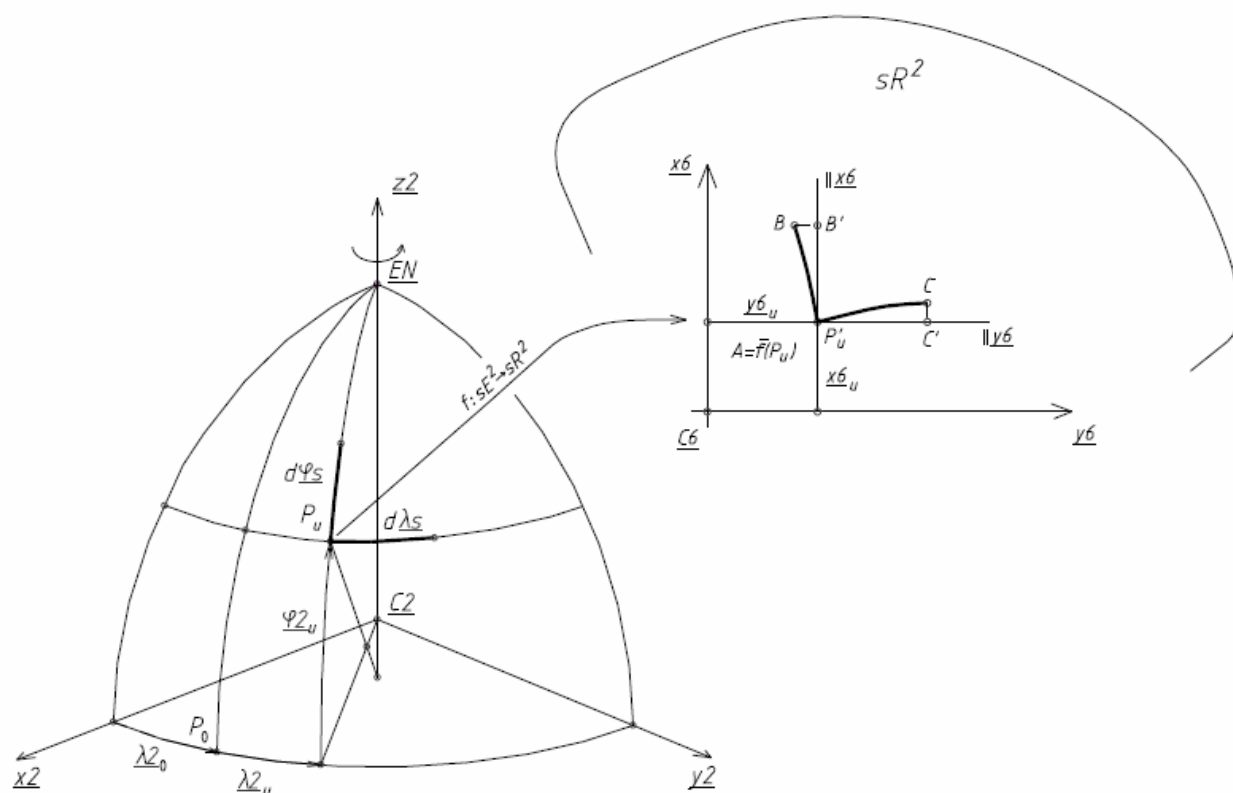
18. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē

Līdz šim aplūkotās elipsoīda punkta P_u kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas - elipsoidālais garums λ_{2u} un elipsoidālais platumu φ_{2u} no $\underline{ce}_{2u} = (\lambda_{2u}, \varphi_{2u}, h_{2u})^T$, kur $h_{2u} = 0$, praktiskām vajadzībām, piemēram, kartogrāfijā nav piemērotas. Parasti visu Zemes elipsoīdu vai arī tā gabalu attēlo uz plaknes, lietojot dažādas matemātiskās izteiksmes. Apzīmēsim ar sR^3 iepriekš aplūkoto trīsdimensiju kvaziģeocentrisko koordinātu telpu $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2} \ \underline{z2}$. Blakus tai ieviešim taisnleņķa koordinātu plakni sR^2 (r.a. $\underline{C6} \ \underline{x6} \ \underline{y6}$).

Likumu, ar kuru katram patvaļīgas kopas sM elementam m tiek piekārtots citas kopas sG elements g sauc par **attēlojumu**.

Vispārīgā formā attēlojumu pieraksta kā $f: sM \rightarrow sG$ vai arī kā $f(m) = g$.

Saka, ka elements m no sM ir elementa g no sG **pirmtēls**, bet $f(m) = g$ ir elementa m no sM attēls. [REM 82, 377].



18.1.zīm. Zemes elipsoīda attēlošana uz plaknes

Šeit:

- | | |
|--|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| e' | - elipsoīda 2.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| $\underline{C2}$ | - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs); |
| $\underline{EN}$ | - elipsoīda ziemeļpols; |
| $\underline{C2} \ \underline{EN}$ | - elipsoīda rotācijas ass; |
| $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2}$ | - elipsoīda ekvatora plakne; |
| $\underline{C2} \ \underline{x2} \ \underline{y2} \ \underline{z2}$ | - kvaziģeocentriskā koordinātu telpa; |
| P_u | - brīvi izvēlēts elipsoīda punkts; |
| $\underline{cr}_{2u} = (\underline{x}_{2u}, \underline{y}_{2u}, \underline{z}_{2u})^T$ | - punkta P_u kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas; |

$\underline{x}_u, \underline{y}_u, \underline{z}_u$ - punkta P_u kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{ce}_u$;
 $\underline{ce}_u = (\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u, \underline{h}_u)^T$ - elipsoīda punkta P_u kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
 $\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u, \underline{h}_u = 0$ - punkta P_u elipsoidālais garums, platums un augstums no $\underline{ce}_u$;
 $\underline{\lambda}_0$ - brīvi izvēlēts valstī vai valstu grupā atzīta ass meridiāna elipsoidālais garums;
 $\underline{d\varphi_s}$ - meridiāna loka elements;
 $\underline{d\lambda_s}$ - paralēles loka elements;
 $\underline{cr}_u = (\underline{x}_u, \underline{y}_u)^T$ - punkta P_u attēla taisnleņķa koordinātas plaknē sR^2 ;

Pieņemsim, ka attēlošanai ir izvēlēts Zemes elipsoīda [sk.5.4.]

$$\underline{x}^2 + \underline{y}^2 + (1 + \sqrt{e'}) \cdot \underline{z}^2 = a^2 \quad (18.1.)$$

gabals - elipsoidālo koordinātu plakne

$$sE^2 =] - \pi / 2 ; + \pi / 2 [\times [0 ; 2 \pi [\quad (18.2.)$$

Tā attēlojumu koordinātu plaknē sR^2 uzrakstīsim kā vektorfunkciju

$$\underline{f} : sE^2 \rightarrow sR^2, \quad (18.3)$$

vai arī izvērsti elipsoīda punktam P_u kā

$$\underline{x}_u = f_1(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (18.4)$$

$$\underline{y}_u = f_2(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (18.5)$$

Apvienojot (18.4) ar (18.5), raksta arī, ka elipsoīda punkta P_u attēls plaknē sR^2 ir

$$\underline{P}_u' = \underline{f}(\underline{P}_u) \quad (18.6)$$

Vienkāršāko attēlojumu (s.a. kartogrāfisko attēlojumu) $\underline{f}$ iegūst, pielīdzinot punkta $\underline{P}_u'$ abscisu $\underline{x}_u$ punkta P_u elipsoidālam platumam $\underline{\varphi}_u$ un, savkārt, ordinātu $\underline{y}_u$ - elipsoidālam garumam $\underline{\lambda}_u$, t.i. pieņem, ka izteiksmes (18.4.) un (18.5.) ir

$$\underline{x}_u = \underline{\varphi}_u \quad (18.7)$$

$$\underline{y}_u = \underline{\lambda}_u \quad (18.8)$$

Nākošo vienkāršo attēlojumu $\underline{f}$ iegūst, iepriekšējās izteiksmēs $\underline{\varphi}_u$ un $\underline{\lambda}_u$ aizstājot ar meridiāna un paralēles loku garumiem pēc (8.18.) un (9.5.), t.i.

$$\underline{x}_u = \underline{\varphi_s}(\underline{\varphi}_u) \quad (18.9)$$

$$\underline{y}_u = \underline{\lambda_s}(\underline{\lambda}_u) \quad (18.10)$$

Ja

1. Leņķi uz plaknes un uz elipsoīda sakrīt,
2. Attēla mērogs plaknes punktā $\underline{P}_u'$ nav atkarīgs no virziena, tad $\underline{f}$ sauc par **konformu** kartogrāfisko attēlojumu.

Attēlojumi (18.7.) – (18.10.) nav konformi.

Iepriekš meridiāna un paralēles loku elementi ir izteikti kā

$$\underline{d\varphi_s} = M(\underline{\varphi}_u) \cdot \underline{d\varphi}_u \quad (18.11)$$

$$\underline{d\lambda_s} = N(\underline{\varphi}_u) \cdot \cos(\underline{\varphi}_u) \cdot \underline{d\lambda}_u \quad (18.12)$$

To attēli plaknē sR^2 ir [sk.18.1.zīm.]

$$\underline{AB} = \underline{f}(\underline{d\varphi_s}) \quad (18.13)$$

$$\underline{AC} = \underline{f}(\underline{d\lambda_s}) \quad (18.14)$$

Konformā attēla pagriezienu [sk.18.1.zīm.]

γ_u = leņķis $\underline{BAB}'$ = leņķis $\underline{CAC}'$ sauc par **meridiānu tuvināšanos** punktā $\underline{P}_u'$.

Meridiānu tuvināšanos noteic sekojošas sakarības

$$\cos(\gamma_u) = \underline{AB}' / \underline{AB}; \quad (18.15)$$

$$\sin(\gamma_u) = \underline{BB}' / \underline{AB}; \quad (18.16)$$

vai arī

$$\cos(\gamma_u) = \underline{AC}' / \underline{AC}; \quad (18.17)$$

$$\sin(\gamma_u) = \underline{CC}' / \underline{AC}; \quad (18.18)$$

Līdz ar to meridiānu tuvināšanās punktā P_u' ir

$$\gamma_u = \tan^{-1}(\sin(\gamma_u) / \cos(\gamma_u)) = \tan^{-1}(\underline{BB}' / \underline{AB}') \quad (18.19)$$

Konforma attēla mērogu punktā P_u' iegūst kā

$$m_u = \underline{AB} / d\varphi_2 = \underline{AB} / (M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2) \quad (18.20)$$

vai arī kā

$$m_u = \underline{AC} / d\lambda_2 = \underline{AC} / (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot d\lambda_2). \quad (18.21)$$

Plaknē sR^2 nogriežņu garumi ir

$$\underline{AB} = m \cdot (M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2) \quad (18.22)$$

$$\underline{AC} = m \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot d\lambda_2) \quad (18.23)$$

Plaknes koordinātu pilnie pieaugumi

$$dx = (\partial x / \partial \varphi_2) \cdot d\varphi_2 + (\partial x / \partial \lambda_2) \cdot d\lambda_2 \quad (18.24)$$

$$dy = (\partial y / \partial \varphi_2) \cdot d\varphi_2 + (\partial y / \partial \lambda_2) \cdot d\lambda_2 \quad (18.25)$$

Seko, ka

1. $\lambda_2 = \text{const}$

$$\underline{AB}' = (\partial x / \partial \varphi_2) \cdot d\varphi_2 \quad (18.26)$$

$$\underline{BB}' = (\partial y / \partial \varphi_2) \cdot d\varphi_2 \quad (18.27)$$

2. $\lambda_2 = \text{const}$

$$\underline{CC}' = (\partial x / \partial \lambda_2) \cdot d\lambda_2 \quad (18.28)$$

$$\underline{AC}' = (\partial y / \partial \lambda_2) \cdot d\lambda_2 \quad (18.29)$$

Tālāk

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_u) &= \underline{AB}' / \underline{AB} = ((\partial x / \partial \varphi_2) \cdot d\varphi_2) / (m \cdot (M(\varphi_2) \cdot d\varphi_2)) = \\ &= (m \cdot M(\varphi_2))^{-1} \cdot (\partial x / \partial \varphi_2) \end{aligned} \quad (18.30)$$

un arī

$$\begin{aligned} \cos(\gamma_u) &= \underline{AC}' / \underline{AC} = ((\partial y / \partial \lambda_2) \cdot d\lambda_2) / (m \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2) \cdot d\lambda_2)) = \\ &= (m \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2)))^{-1} \cdot (\partial y / \partial \lambda_2) \end{aligned} \quad (18.31)$$

Pielīdzinot labās puses, iegūst, ka

$$(\partial x / \partial \varphi_2) = M(\varphi_2) \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2))^{-1} \cdot (\partial y / \partial \lambda_2) \quad (18.32)$$

$$(\partial y / \partial \varphi_2) = M(\varphi_2) \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2))^{-1} \cdot (\partial x / \partial \lambda_2) \quad (18.33)$$

Piezīmes.

1. Šeit 2.izteiksmi iegūst pēc līdzības ar 1.izteiksmi.

2. Šie diferenciālvienādojumi izteiks konformā attēla $f(P_u)$ iegūšanas noteikumus

Meridiānu tuvināšanās punktā P_u'

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \tan^{-1}(\underline{BB}' / \underline{AB}') = \\ &= \tan^{-1}((\partial y / \partial \varphi_2) / (\partial x / \partial \varphi_2)) = \\ &= \tan^{-1}((\partial x / \partial \lambda_2) / (\partial y / \partial \lambda_2)) \end{aligned} \quad (18.34)$$

Attēla mērogs punktā P_u' ($\sin()$ un $\cos()$ ceļ kvadrātā un summē)

$$m_u = (M(\varphi_2))^{-1} \cdot \sqrt{(\partial x / \partial \varphi_2)^2 + (\partial y / \partial \varphi_2)^2} = \\ = (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2))^{-1} \cdot \sqrt{(\partial x / \partial \lambda_2)^2 + (\partial y / \partial \lambda_2)^2}$$

Konformo attēlojumu invertējot, iegūst

$$\mathbf{f}^1: s\mathbf{R}^2 \rightarrow s\mathbf{E}^2, \quad (18.35)$$

vai arī izvērsti plaknes punktam P_u' kā

$$\lambda_{2u} = f_1^{-1}(x_{6u}, y_{6u}) \quad (18.36)$$

$$\varphi_{2u} = f_2^{-1}(x_{6u}, y_{6u}) \quad (18.37)$$

Tā diferenciālvienādojumi ir

$$(\partial \varphi_2 / \partial x) = (M(\varphi_2))^{-1} \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2)) \cdot (\partial \lambda_2 / \partial y) \quad (18.40)$$

$$(\partial \varphi_2 / \partial y) = (M(\varphi_2))^{-1} \cdot (N(\varphi_2) \cdot \cos(\varphi_2)) \cdot (\partial \lambda_2 / \partial x) \quad (18.41)$$

19. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē. Tiešais uzdevums pēc Gausa – Krīgera.

Zemes elipsoīda gabala sE^2 attēlošanu koordinātu plaknē sR^2 izteic vektorfunkcija [sk.18.lekc.]

$$f : sE^2 \rightarrow sR^2, \quad (19.1)$$

Elipsoīda punktam P_u to uzraksta arī kā

$$\underline{x}_u = f_1(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (19.2)$$

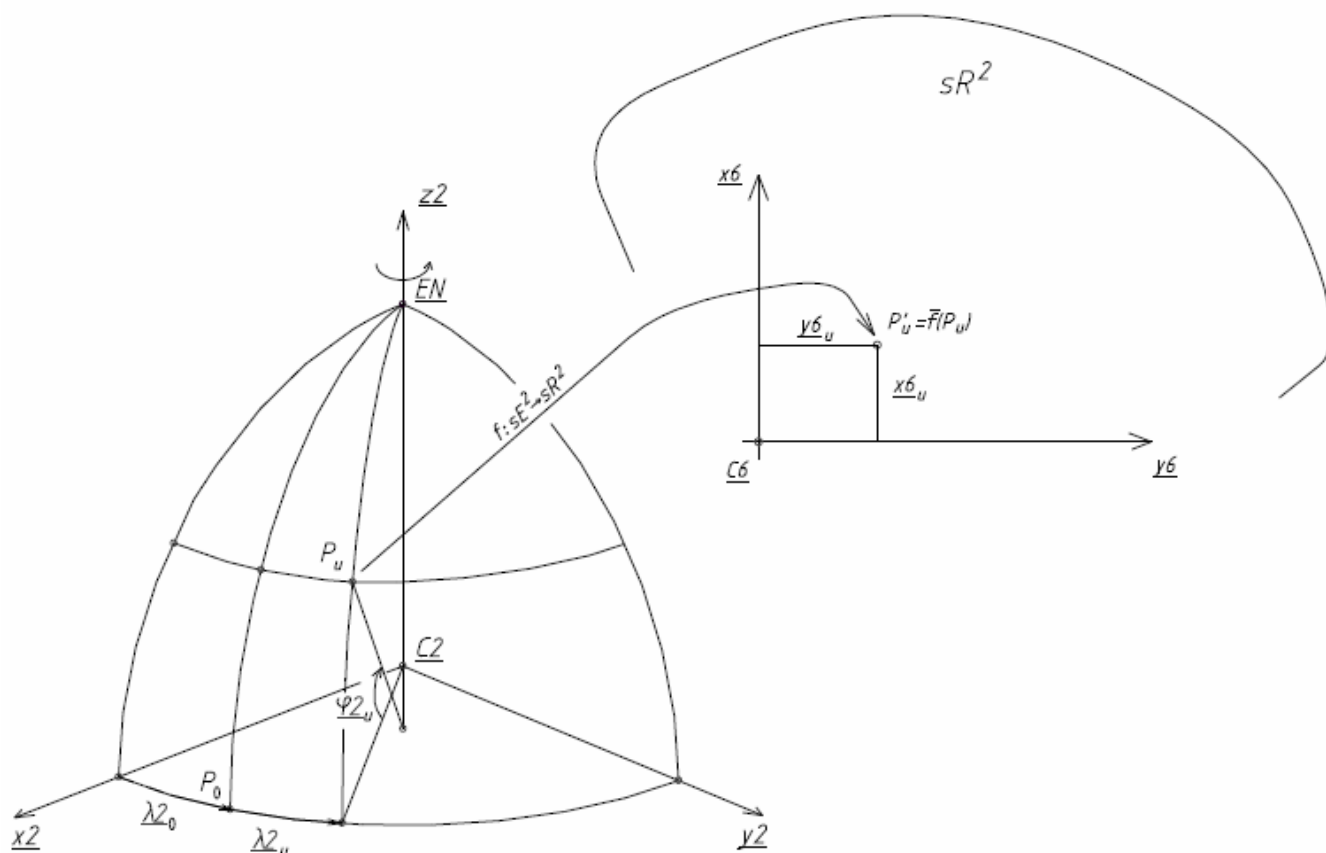
$$\underline{y}_u = f_2(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (19.3)$$

Topogrāfiskām vajadzībām praktiski visbiežāk attēlojumu $f : sE^2 \rightarrow sR^2$ izvēlas tā, lai tas būtu konforms.

To raksturo divas pazīmes:

- leņķi uz plaknes un uz elipsoīda sakrīt;
- attēla mērogs plaknes punktā P_u' nav atkarīgs no virziena.

Pazīstamākais ir konformais attēlojums pēc Gausa-Krīgera (īsāk GK). To pamatojis ir .F.Gauss [C.F.Gauss (1777 – 1855)] un praktiskai darbībai piemērojis L.Krīgers [L.Krüger (1857-1923)].



19.1.zīm. Elipsoīda attēlošana plaknē. Tiešais uzdevums pēc Gausa – Krīgera.

Šeit:

- | | |
|-----------|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| e' | - elipsoīda 2.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |
| <u>C2</u> | - elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs); |

$\underline{EN}$	- elipsoīda ziemeļpols;
$\underline{C2} \underline{EN}$	- elipsoīda rotācijas ass;
$\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$	- elipsoīda ekvatora plakne;
$\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2} \underline{z2}$	- kvaziģeocentriskā koordinātu telpa;
P_0	- elipsoīda ekvatora punkts;
$\underline{\lambda 2_0}$	- punkta P_0 elipsoidālais garums; parasti $\underline{\lambda 2_0} = 0^\circ, 3^\circ, \dots, 21^\circ, \dots, 24^\circ, 27^\circ, \dots$;
$P_0 \underline{EN}$	- ass (s.a. centrālais) meridiāns;
sE^2	- ar $\underline{\lambda 2_0}$ norādītais elipsoīda gabals;
P_u	- brīvi izvēlēts elipsoīda punkts;
$P_u \underline{EN}$	- punkta P_u meridiāns;
$\underline{cr2_u} = (\underline{x2_u}, \underline{y2_u}, \underline{z2_u})^T$	- punkta P_u kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x2_u}, \underline{y2_u}, \underline{z2_u}$	- punkta P_u kvaziģeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no $\underline{cr2_u}$;
$\underline{ce2_u} = (\underline{\lambda 2_u}, \underline{\varphi 2_u}, \underline{h2_u})^T$	- elipsoīda punkta P_u kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda 2_u}, \underline{\varphi 2_u}, \underline{h2_u} = 0$	- punkta P_u elipsoidālais garums, platums un augstums no $\underline{ce2_u}$;
sR^2	- sE^2 attēla koordinātu plakne, kuru noteic attēlojums f ;
$P_u' = f(P_u)$	- elipsoīda punkta P_u attēls koordinātu plaknē $sR^2 = f(sE^2)$;
$\underline{C6} \underline{x6} \underline{y6}$	- sE^2 attēla koordinātu plakne;
$\underline{cr6_u} = (\underline{x6_u}, \underline{y6_u})^T$	- punkta P_u attēla taisnleņķa koordinātas plaknē sR^2 ;
$\underline{x6_u}, \underline{y6_u}$	- punkta P_u attēla abscisa un ordināta koordinātu plaknē sR^2 ;

Pieņemsim, ka dots ar ass meridiānu $\underline{\lambda 2_0}$ norādīta elipsoīda gabala sE^2 punkts P_u , kura elipsoidālās koordinātas ir $(\underline{\lambda 2_u}, \underline{\varphi 2_u})$.

Punkta P_u attēla $P_u' = f(P_u)$ noteikšanu koordinātu plaknē sR^2 pēc izteiksmēm

$$\underline{x6_u} = \varphi s(\underline{\varphi 2_u}) + \underline{a2} \cdot l^2 + \underline{a4} \cdot l^4 + \underline{a6} \cdot l^6 + \underline{a8} \cdot l^8 + \dots \quad (19.4)$$

$$\underline{y6_u} = \dots + \underline{a1} \cdot l + \underline{a3} \cdot l^3 + \underline{a5} \cdot l^5 + \underline{a7} \cdot l^7 + \dots \quad (19.5)$$

sauc par **tiešo uzdevumu pēc Gausa – Krīģera**.

Izteiksmes (19.4) un (19.5) uzrakstītas saīsināti, ievēdot sekojošus apzīmējumus

$\varphi s(\underline{\varphi 2_u})$ – elipsoīda punkta P_u meridiāna loka garums no ekvatora līdz platumam $\underline{\varphi 2_u}$ [sk.8.25];

$l = (\underline{\lambda 2_u} - \underline{\lambda 2_0}) / \rho^\circ$, $\rho^\circ = 180^\circ / \pi$ – elipsoidālo garumu starpība radiānos;

$\underline{a1} = N \cdot c$;

$\underline{a2} = (1 / 2) \cdot N \cdot c^2 \cdot t$;

$\underline{a3} = (1 / 6) \cdot N \cdot c^3 \cdot (1 - t^2 + \eta^2)$;

$\underline{a4} = (1 / 24) \cdot N \cdot c^4 \cdot t \cdot (5 - t^2 + 9 \cdot \eta^2 + 4 \cdot \eta^4)$;

$\underline{a5} = (1 / 120) \cdot N \cdot c^5 \cdot (5 - 18 \cdot t^2 + t^4 + 14 \cdot \eta^2 - 58 \cdot \eta^2 \cdot t^2)$;

$\underline{a6} = (1 / 720) \cdot N \cdot c^6 \cdot t \cdot (61 - 58 \cdot t^2 + t^4 + 270 \cdot \eta^2 - 330 \cdot \eta^2 \cdot t^2)$;

$\underline{a7} = (1 / 5040) \cdot N \cdot c^7 \cdot (61 - 479 \cdot t^2 + 179 \cdot t^4 - t^6)$;

$\underline{a8} = (1 / 40320) \cdot N \cdot c^8 \cdot t \cdot (1385 - 3111 \cdot t^2 + 543 \cdot t^4 - t^6)$;

$N = N(\underline{\varphi 2_u})$ –meridiāna šķērsliekuma rādiuss punkta P_u platumā $\underline{\varphi 2_u}$ [sk.4.10.];

$c = \cos \underline{\varphi 2_u}$;

$t = \tan \underline{\varphi 2_u}$;

$\eta = \text{eta } \underline{\varphi 2_u} = e' \cdot \cos \underline{\varphi 2_u}$ - eta funkcija [sk.2.26.];

Sekas:

1. Ja $\underline{\varphi 2_u} = 0$, tad $\underline{a2}, \underline{a4}, \dots = 0$, jo $t = 0$. Līdz ar to redzams, ka elipsoīda ekvatora $f(\{P_u | \underline{\varphi 2_u} = 0\})$ attēls uz plaknes sR^2 ir ordinātu ass $\underline{C6} \underline{y6}$.
2. Ja $\underline{\lambda 2_u} = \underline{\lambda 2_0}$, tad garumu starpību pakāpes $l = l^2 = l^3 = \dots = 0$, abscisa $\underline{x6} = \varphi s(\underline{\varphi 2_u})$ un ordināta $\underline{y6} = 0$. Līdz ar to redzams, ka ass meridiāna $f(\{P_u | \underline{\lambda 2_u} = \underline{\lambda 2_0}\})$ attēls uz plaknes sR^2 ir abscisu ass $\underline{C6} \underline{x6}$.

{ x. Aprēķināt punkta taisnleņķa koordinātas pēc punkta

```

ģeodēziskām koordinātām un plaknes koordinātu sākuma      }
procedure Direct_Gauss_conformal_mapping
{ ----- }
(      ce2:TY_xyz; { -punkta ģeodēziskās koord.    < }
  var   cr6:TY_xyz; { -punkta taisnleņķa koord.    > }
      ce2_0:TY_xyz; { -ģeodēziskais sākums        < }
  var   gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete     < }
  var   er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ 1997.g. 8.februārī }
{ 2000.g.19.februārī }
{ ===== }
{ ..."ce2" -kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ..."cr6" -Gausa-Krīgera plaknes taisnleņķa koordinātas }
{ ----- }
{ ----- }
label Ex;
{ ----- }
const ro=180/Pi;
var ce2_2:TY_xyz; { -palīgunkts uz ekvatora          }
var   x:TY_rnm; { -meridiāna loka garums              }
var   l:TY_rnm; { -ģeodēzisko garumu starpība radiānos }
var   N:TY_rnm; { -pirmā vertikāla liekuma rādiuss    }
{ ----- }
var t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9:TY_rnm; { -tan pakāpes  }
var c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9:TY_rnm; { -cos pakāpes  }
var l1,l2,l3,l4,l5,l6,l7,l8,l9:TY_rnm; { -l pakāpes    }
var f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9:TY_rnm; { -eta pakāpes  }
var a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9:TY_rnm; { -koeficienti  }
{ ----- }
{ sk.Morozov 79,224 }
{ sk.Hristov 57,117 }
{ ----- }
{ ===== }
{ sub}procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Direct_Gauss_conformal_mapping';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Direct_Gauss_conformal_mapping}
{ ===== }
{ uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
{ ----- }
  with gdt do
  begin {with gdt}
    { ----- }
    { ..."ce2.x" -punkta ģeodēziskais garums grādos < }
    { ..."ce2.y" -punkta ģeodēziskais platums grādos < }
    { ..."cr6.x" -punkta abscisa [m] > }
    { ..."cr6.y" -punkta ordināta [m] > }
    { ..."ce2_0.x" -sākuma ģeodēziskais garums grādos < }
    { ..."ce2_0.y" -sākuma ģeodēziskais platums grādos < }
    { ----- }
    { noteikt palīgpunktu uz ekvatora }
  end
end

```

```

SetCrd(ce2.x,ce2_0.y,ce2_2);
{ ----- }
{ aprēķināt meridiāna loka garumu }
{ x:=Set_Bs(ce2_2,ce2,gdt); }
x:=Set_Bs(ce2,gdt,er);
if er.f then goto Ex;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko garumu starpību radiānos }
l:=(ce2.x-ce2_0.x)/ro;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēziskā platuma cos pakāpes }
c1:=Cos(ce2.y/ro);
c2:=c1*c1; c3:=c2*c1; c4:=c3*c1; c5:=c4*c1;
c6:=c5*c1; c7:=c6*c1; c8:=c7*c1; c9:=c8*c1;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēziskā platuma tan pakāpes }
t1:=Tan(ce2.y/ro);
t2:=t1*t1; t3:=t2*t1; t4:=t3*t1; t5:=t4*t1;
t6:=t5*t1; t7:=t6*t1; t8:=t7*t1; t9:=t8*t1;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko garumu starpības pakāpes }
l1:=l;
l2:=l1*l1; l3:=l2*l1; l4:=l3*l1; l5:=l4*l1;
l6:=l5*l1; l7:=l6*l1; l8:=l7*l1; l9:=l8*l1;
{ ----- }
{ aprēķināt platuma 3.sferoid.funkc.vērtības pakāpes }
f1:=Eta(ce2.y,gdt);
f2:=f1*f1; f3:=f2*f1; f4:=f3*f1; f5:=f4*f1;
f6:=f5*f1; f7:=f6*f1; f8:=f7*f1; f9:=f8*f1;
{ ----- }
{ aprēķināt pirmā vertikāla liekuma rādiusu }
N:=Set_Radius_of_curvature(ce2,90,gdt);
{ ----- }
{ aprēķināt koeficientus }
a1:= N*c1;
a2:=(1/ 2)*N*c2*t1;
a3:=(1/ 6)*N*c3*(1-t2+f2);
a4:=(1/ 24)*N*c4*t1*(5-t2+9*f2+4*f4);
a5:=(1/ 120)*N*c5*(5-18*t2+t4+14*f2-58*f2*t2);
a6:=(1/ 720)*N*c6*t1*(61-58*t2+t4+270*f2-330*f2*t2);
a7:=(1/ 5040)*N*c7*(61-479*t2+179*t4-t6);
a8:=(1/40320)*N*c8*t1*(1385-3111*t2+543*t4-t6);
{ ----- }
{ aprēķināt punkta abscisu un ordinātu }
cr6.x:=x+a2*l2+a4*l4+a6*l6+a8*l8;
cr6.y:= a1*l1+a3*l3+a5*l5+a7*l7;
{ ----- }
end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Direct_Gauss_conformal_mapping};

```

{ x. Aprēķināt punkta taisnleņķa koordinātas pēc punkta
ģeodēziskām koordinātām un plaknes koordinātu sākuma }
procedure Direct_Transverse_Mercator_mapping

```

{ ----- }
(   ce2:TY_xyz; { -punkta ģeodēziskās koord.   < }
var   cr6:TY_xyz; { -punkta taisnleņķa koord.   > }
      ce2_0:TY_xyz; { -ģeodēziskais sākums      < }
var   gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete    < }
var   er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ 1997.g.18.maijā }
{ ===== }
{ ..."ce2" -kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ..."cr6" -transversālās Merkatora plaknes taisn.koord. }
{ ----- }
{ sk.Hristov 57,117.lpp. }
{ sk.Borre 90,65.lpp. }
{ ----- }
label Ex;
{ ----- }
{ ===== }
sub} procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Direct_Transverse_Mercator_mapping';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Direct_Transverse_Mercator_mapping}
{ ===== }
{ uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
{ ----- }
  with gdt do
  begin {with gdt}
    { ----- }
    { ..."ce2.x" -punkta ģeodēziskais garums grādos < }
    { ..."ce2.y" -punkta ģeodēziskais platums grādos < }
    { ..."cr6.x" -punkta abscisa [m] > }
    { ..."cr6.y" -punkta ordināta [m] > }
    { ..."ce2_0.x" -sākuma ģeodēziskais garums grādos < }
    { ..."ce2_0.y" -sākuma ģeodēziskais platums grādos < }
    { ----- }
    { aprēķināt punkta taisnleņķa koordinātas }
    Direct_Gauss_conformal_mapping(ce2,cr6,ce2_0,gdt,er);
    if er.f then goto Ex;
    { ----- }
    { pāriet no Gausa plaknes uz TM plakni }
    { izmainīt abscisu } cr6.x:=0.9996 * cr6.x;
    { izmainīt ordinātu } cr6.y:=0.9996 * cr6.y;
    { ----- }
  end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Direct_Transverse_Mercator_mapping};

```

20. Zemes elipsoīda attēlošana plaknē. Pretējais uzdevums pēc Gausa – Krīgera.

Zemes elipsoīda gabala sE^2 attēlošanu uz koordinātu plaknes sR^2 izteic vektorfunkcija [sk.18.lekc.]

$$\mathbf{f} : sE^2 \rightarrow sR^2, \quad (20.1)$$

Topogrāfiskām vajadzībām praktiski visbiežāk attēlojumu $\mathbf{f} : sE^2 \rightarrow sR^2$ izvēlas tā, lai tas būtu konforms.

To raksturo divas pazīmes:

- leņķi uz plaknes un uz elipsoīda sakrīt;
- attēla mērogs plaknes punktā P_u' nav atkarīgs no virziena.

Pazīstamākais ir konformais attēlojums pēc Gausa-Krīgera (īsāk GK). To pamatojis ir F.Gauss [C.F.Gauss (1777 – 1855)] un praktiskai darbībai piemērojis L.Krīgers [L.Kröger (1857-1923)].

Izteiksmes [sk.19.lekc.]

$$\underline{x6}_u = f_1(\underline{\lambda2}_u, \underline{\varphi2}_u) \quad (20.2)$$

$$\underline{y6}_u = f_2(\underline{\lambda2}_u, \underline{\varphi2}_u) \quad (20.3)$$

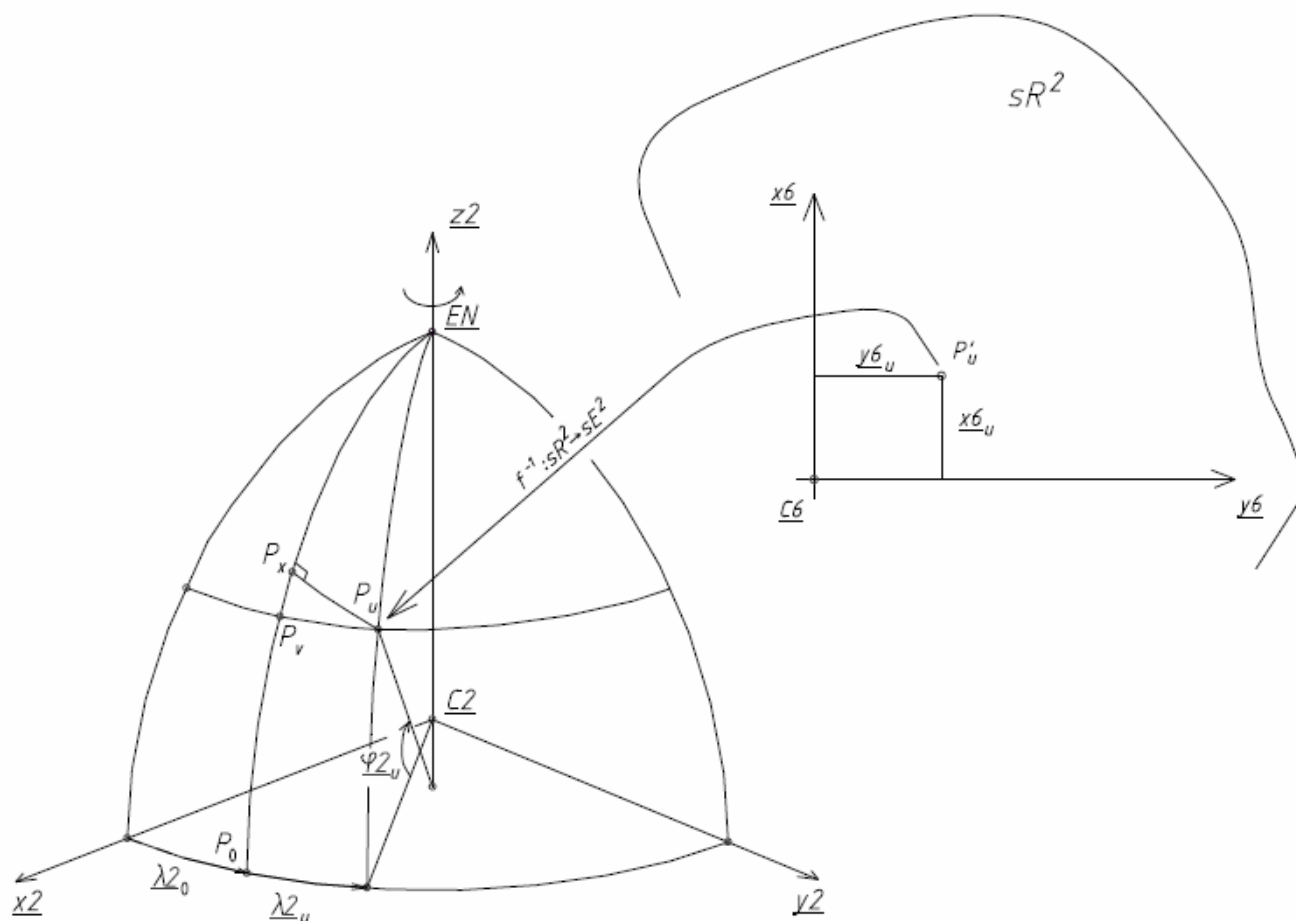
apraksta tiešo uzdevumu pēc Gausa – Krīgera.

Šeit aplūkosim inverso vektorfunkciju $\mathbf{f}^{-1} : sR^2 \rightarrow sE^2$ un tās izteiksmes

$$\underline{\lambda2}_u = f_1^{-1}(\underline{x6}_u, \underline{y6}_u) \quad (20.4)$$

$$\underline{\varphi2}_u = f_2^{-1}(\underline{x6}_u, \underline{y6}_u) \quad (20.5)$$

Tās apraksta pretējo uzdevumu pēc Gausa – Krīgera.



20.1.zīm. Elipsoīda attēlošana uz plaknes. Pretējais uzdevums pēc Gausa – Krīgera.

Šeit:

a	- Zemes elipsoīda lielās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.];
b	- Zemes elipsoīda mazās pusass garums no <u>gds</u> [sk. 1.lek.];
e	- elipsoīda 1.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek];
e'	- elipsoīda 2.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek];
$\underline{C2}$	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziġeocentrs);
$\underline{EN}$	- elipsoīda ziemeļpols;
$\underline{C2} \underline{EN}$	- elipsoīda rotācijas ass;
$\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2}$	- elipsoīda ekvatora plakne;
$\underline{C2} \underline{x2} \underline{y2} \underline{z2}$	- kvaziġeocentriskā koordinātu telpa;
P_0	- elipsoīda ekvatora punkts;
$\underline{\lambda 2_0}$	- punkta P_0 elipsoidālais garums; parasti $\underline{\lambda 2_0} = 0^\circ, 3^\circ, \dots, 21^\circ, \dots, 24^\circ, 27^\circ, \dots$;
$P_0 \underline{EN}$	- ass (s.a. centrālais) meridiāns;
sE^2	- ar $\underline{\lambda 2_0}$ norādītais elipsoīda gabals;
P_u	- brīvi izvēlēts elipsoīda punkts;
$P_u \underline{EN}$	- punkta P_u meridiāns;
$\underline{cr2_u} = (\underline{x2_u}, \underline{y2_u}, \underline{z2_u})^T$	- punkta P_u kvaziġeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x2_u}, \underline{y2_u}, \underline{z2_u}$	- punkta P_u kvaziġeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2_u</u> ;
$\underline{ce2_u} = (\underline{\lambda 2_u}, \underline{\varphi 2_u}, \underline{h2_u})^T$	- elipsoīda punkta P_u kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda 2_u}, \underline{\varphi 2_u}, \underline{h2_u} = 0$	- punkta P_u elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2_u</u> ;
P_v	- punkta P_u paralēles un ass meridiāna $P_0 \underline{EN}$ krustpunkts;
$\underline{cr2_v} = (\underline{x2_v}, \underline{y2_v}, \underline{z2_v})^T$	- punkta P_v kvaziġeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x2_v}, \underline{y2_v}, \underline{z2_v}$	- punkta P_v kvaziġeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2_v</u> ;
$\underline{ce2_v} = (\underline{\lambda 2_v}, \underline{\varphi 2_v}, \underline{h2_v})^T$	- elipsoīda punkta P_v kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda 2_v}, \underline{\varphi 2_v}, \underline{h2_v} = 0$	- punkta P_v elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2_v</u>
P_x	- palīgpunkts P_x uz ass meridiāna $P_0 \underline{EN}$;
$\underline{cr2_x} = (\underline{x2_x}, \underline{y2_x}, \underline{z2_x})^T$	- punkta P_v kvaziġeocentriskās taisnleņķa koordinātas;
$\underline{x2_x}, \underline{y2_x}, \underline{z2_x}$	- punkta P_v kvaziġeocentriskā abscisa, ordināta un aplikāta no <u>cr2_x</u> ;
$\underline{ce2_x} = (\underline{\lambda 2_x}, \underline{\varphi 2_x}, \underline{h2_x})^T$	- elipsoīda punkta P_v kvaziġeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
$\underline{\lambda 2_x}, \underline{\varphi 2_x}, \underline{h2_x} = 0$	- punkta P_x elipsoidālais garums, platums un augstums no <u>ce2_x</u>
sR^2	- sE^2 attēla koordinātu plakne, kuru noteic attēlojums <u>f</u> ;
$P_u' = f (P_u)$	- elipsoīda punkta P_u attēls koordinātu plaknē $sR^2 = f (sE^2)$;
$\underline{C6} \underline{x6} \underline{y6}$	- sE^2 attēla koordinātu plakne;
$\underline{cr6_u} = (\underline{x6_u}, \underline{y6_u})^T$	- punkta P_u attēla taisnleņķa koordinātas plaknē sR^2 ;
$\underline{x6_u}, \underline{y6_u}$	- punkta P_u attēla abscisa un ordināta koordinātu plaknē sR^2 ;

Pieņemsim, ka dots ar ass meridiānu $\underline{\lambda 2_0}$ norādīta elipsoīda gabala sE^2 punkta P_u attēls $P_u' = f (P_u)$ Gausa – Krīģera koordinātu plaknē un tā taisnleņķa koordinātas ir $\underline{x6_u}, \underline{y6_u}$.Punkta P_u' pirmtēla $P_u = f^{-1} (P_u')$ elipsoidālo koordinātu $\underline{\lambda 2_u}$ un $\underline{\varphi 2_u}$ atrašanu uz virsmas sE^2 pēc izteiksmēm

$$\underline{\lambda 2_u} = \underline{\lambda 2_0} + (\underline{\Delta \lambda x_u} / \rho^0) \cdot (1 - (\underline{y6_u}^2 / (6 \cdot \underline{N x_u}^2)) \cdot (1 + 2 \cdot \underline{t x_u}^2 + \underline{\eta x_u}^2) + (\underline{y6_u}^4 / (120 \cdot \underline{N x_u}^4)) \cdot (5 + 28 \cdot \underline{t x_u}^2 + 24 \cdot \underline{t x_u}^4 + 6 \cdot \underline{\eta x_u}^2 + 8 \cdot \underline{\eta x_u}^2 \cdot \underline{t x_u}^2)) \cdot \rho^0 \quad (20.6)$$

$$\underline{\varphi 2_u} = \underline{\varphi 2_x} - ((\underline{y6_u}^2 / (2 \cdot \underline{M x_u} \cdot \underline{N x_u})) \cdot \underline{t x_u} \cdot (1 - (\underline{y6_u}^2 / (12 \cdot \underline{N x_u}^2)) \cdot (5 + 3 \cdot \underline{t x_u}^2 + \underline{\eta x_u}^2 - 9 \cdot \underline{\eta x_u}^2 \cdot \underline{t x_u}^2) + (\underline{y6_u}^4 / (360 \cdot \underline{N x_u}^4)) \cdot (61 + 90 \cdot \underline{t x_u}^2 + 45 \cdot \underline{t x_u}^4))) \cdot \rho^0 \quad (20.7)$$

sauc par **pretējo uzdevumu pēc Gausa – Krīģera**.

Izteiksmes (20.6) un (20.7) uzrakstītas saīsināti, ievēdot sekojošus apzīmējumus
 $\rho^{\circ} = 180^{\circ} / \pi$;

$\Delta\lambda_{xu} = (\underline{x6_u} / (\underline{Nx_u} \cdot \cos \varphi_{2_x})) \cdot \rho^{\circ}$ - elipsoidālo garumu starpības prognoze platumā φ_{2_x} ;
 φ_{2_x} - attēla $P_u' = f(P_u)$ abscisai $\underline{x6_u} = \varphi s(\varphi_{2_x})$ atbilstošais palīgpunkta P_x elipsoidālais platumš;
 $\varphi s(\varphi_{2_x})$ – elipsoīda punkta P_x meridiāna loka garums no ekvatora līdz platumam φ_{2_x} ;
 $\underline{Mx_u} = a \cdot (1 - e^2) / W^3 (\varphi_{2_x})$ - meridiāna liekuma rādiuss platumā φ_{2_x} [sk.4.8];
 $\underline{Nx_u} = a / W(\varphi_{2_x})$ - meridiāna šķērslietuma rādiuss platumā φ_{2_x} [sk.4.10];
 $W(\varphi_{2_x}) = \sqrt{ 1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_{2_x} }$ - punkta P elipsoidālā platuma φ_{2_x} 1.sferoidiskā funkcija;
 $\underline{tx_u} = \tan(\varphi_{2_x})$ - punkta P_u palīgpunkta P_x elipsoidālā platuma φ_{2_x} tangensa funkcija;
 $\underline{nx_u} = \eta \varphi_{2_x} = e' \cdot \cos \varphi_{2_x}$ - palīgpunkta P_x elipsoidālā platuma φ_{2_x} eta funkcija [sk.2.26.];

Abscisai $\underline{x6_u}$ atbilstošo elipsoidālo platumu φ_{2_x} atrod ar pakāpeniskiem tuvinājumiem.

1. Uzstāda elipsoidālā platuma sākuma prognozi grādos $\varphi_{2_x}^{\sim} = (\underline{x6_u} / M(0)) \cdot \rho^{\circ}$, kur $M(0)$ – meridiāna lietuma rādiuss platumā 0° (uz ekvatora);
2. Aprēķina punkta P_u' abscisas $\underline{x6_u}$ un meridiāna loka garuma $\varphi s(\varphi_{2_x}^{\sim})$ starpību
 $\underline{\Delta x} = \underline{x6_u} - \varphi s(\varphi_{2_x}^{\sim})$
3. Prognozi pakāpeniski uzlabo:
while $\text{abs}(\underline{\Delta x}) > \varepsilon$ **do**
begin { **while** }
{ ...uzlabot platuma prognozi } $\varphi_{2_x}^{\sim} := \varphi_{2_x}^{\sim} + (\underline{\Delta x} / M(\varphi_{2_x}^{\sim})) \cdot \rho^{\circ}$;
{ ...aprēķināt abscisas un meridiāna loka garuma starpību } $\underline{\Delta x} = \underline{x6_u} - \varphi s(\varphi_{2_x}^{\sim})$;
end { **while** } ;
4. Ja, izpildot 3.darbību, $\text{abs}(\underline{\Delta x})$ kļūst mazāks par iepriekš izvēlētu ε , piemēram, $\varepsilon = 0.0001$ m, tad pieņem, ka $\varphi_{2_x} = \varphi_{2_x}^{\sim}$
5. Aprēķina elipsoidālo garumu starpības prognozi platumā φ_{2_x}
 $\Delta\lambda_{xu} = (\underline{x6_u} / (\underline{Nx_u} \cdot \cos \varphi_{2_x})) \cdot \rho^{\circ}$ -
6. Aprēķina punkta $P_u = f^{-1}(P_u')$ elipsoidālās koordinātas $\underline{\lambda}_{2_u}$ un $\underline{\varphi}_{2_u}$ pēc izteiksmēm (20.6) un (20.7).

Pretējā uzdevuma risināšanu pēc Gausa – Krīģera realizē sekojoša Pascal procedūra.

```
{ x. Aprēķināt punkta ģeodēziskās koordinātas pēc punkta
  taisnleņķa koordinātām un plaknes koordinātu sākuma      }
procedure Inverse_Gauss_conformal_mapping
{ ----- }
(      cr6:TY_xyz; { -punkta taisnleņķa koord.      < }
  var   ce2:TY_xyz; { -punkta ģeodēziskās koord.    > }
      ce2_0:TY_xyz; { -ģeodēziskais sākums          < }
  var   gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete      < }
  var   er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ 1997.g.15.februārī }
{ ===== }
{ ... "cr6" -Gausa-Krīģera plaknes taisnleņķa koordinātas }
{ ... "ce2" -kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ----- }
```

```
{ ----- }
  label Ex;
{ ----- }
  const ro=180/Pi;
```

```

const eps=0.0001;
var ce2_2:TY_xyz; { -palīgunkts uz ekvatora }
var x:TY_rnm; { -meridiāna loka garums }
var l:TY_rnm; { -ģeodēzisko garumu starpība radiānos }
var N:TY_rnm; { -pirmā vertikāla liekuma rādiuss }
var M:TY_rnm; { -meridiāna liekuma rādiuss }
var ce2_x:TY_xyz; { -ģeodēzisko koordinātu prognoze }
var delta:TY_rnm; { -abscisas un loka garuma starpība }
var Nx:TY_rnm; { -pirmā vertikāla liekuma rādiuss }
var Mx:TY_rnm; { -meridiāna liekuma rādiuss }
{ ----- }
var t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9:TY_rnm; { -tan pakāpes }
var N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9:TY_rnm; { -N pakāpes }
var f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9:TY_rnm; { -eta pakāpes }
var y1,y2,y3,y4,y5,y6,y7,y8,y9:TY_rnm; { -ordin.pakāpes }
{ ----- }
{ sk.Morozov 79,224 }
{ sk.Hristov 57,117 }
{ ----- }
{ ===== }
{ sub}procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Inverse_Gauss_conformal_mapping';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Inverse_Gauss_conformal_mapping}
{ ===== }
{ uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
{ ----- }
  with gdt do
  begin {with gdt}
    { ----- }
    { ... "cr6.x" -punkta abscisa [m] < }
    { ... "cr6.y" -punkta ordināta [m] < }
    { ... "ce2.x" -punkta ģeodēziskais garums grādos > }
    { ... "ce2.y" -punkta ģeodēziskais platums grādos > }
    { ... "ce2_0.x" -sākuma ģeodēziskais garums grādos < }
    { ... "ce2_0.y" -sākuma ģeodēziskais platums grādos < }
    { ... "ce2_x.y" -ģeodēziskā platuma prognoze grādos }
    { ----- }
    { noteikt palīgpunktu uz ekvatora } SetCrd(0,0,ce2_2);
    { ----- }

    { noteikt meridiāna liekuma rādiusu uz ekvatora }
    M:=Set_Radius_of_curvature(ce2_2,0,gdt);
    { ----- }
    { ... "ce2_x.y" -ģeodēziskā platuma prognoze grādos }
    { ----- }
    { iegūt platuma sākuma prognozi } ce2_x.y:=(cr6.x/M)*ro;
    { ----- }

```

```

{ ..."delta" -abscisas un loka garuma starpība }
{ ----- }
{ iegūt starpību }
delta:=cr6.x-Set_Bs_Simpson(ce2_x,0.001,gdt,er);
if er.f then goto Ex;
{ ...vai arī Set_Bs (ce2_2,ce2_x,gdt); }
{ ----- }
{ uzlabot ģeodēziskā platuma prognozi }
while abs(delta)>eps do
{ ----- }
begin {while}
{ ----- }
{ ..."ce2_x.y" -ģeodēziskā platuma prognoze grādos }
{ ----- }
{ noteikt merid.liekuma rādiusu prognozētā platumā }
M:=Set_Radius_of_curvature(ce2_x,0,gdt);
{ ----- }
{ uzlabot ģeodēziskā platuma prognozi }
ce2_x.y:=ce2_x.y+(delta/M)*ro;
{ ----- }
{ ..."delta" -abscisas un loka garuma starpība }
{ ----- }
{ iegūt starpību }
{ delta:=cr6.x-Set_Bs_Simpson(ce2_2,ce2_x,0.001,gdt); }
delta:=cr6.x-Set_Bs_Simpson(ce2_x,0.001,gdt,er);
if er.f then goto Ex;
{ ----- }
{ ...vai arī Set_Bs(ce2_2,ce2_x,gdt); }
{ ----- }
end {while};
{ ----- }
{ ..."ce2_x.y" -ģeodēziskā platuma prognoze grādos }
{ ----- }
{ aprēķināt galv.liekuma rādiusus prognozētā platumā }
Mx:=Set_Radius_of_curvature(ce2_x, 0,gdt);
Nx:=Set_Radius_of_curvature(ce2_x,90,gdt);
{ ----- }
{ aprēķināt pirmā vertikāla liek.rādiusa pakāpes }
N1:=Nx;
N2:=N1*N1; N3:=N2*N1; N4:=N3*N1; N5:=N4*N1;
{ ----- }

{ aprēķināt prognozētā ģeodēziskā platuma tan pakāpes }
t1:=Tan(ce2_x.y/ro);
t2:=t1*t1; t3:=t2*t1; t4:=t3*t1; t5:=t4*t1;
{ ----- }
{ aprēķināt platuma 3.sferoid.funkc.vērtības pakāpes }
f1:=Eta(ce2_x.y,gdt);
f2:=f1*f1; f3:=f2*f1; f4:=f3*f1; f5:=f4*f1;
{ ----- }
{ aprēķināt dotās ordinātas pakāpes }
y1:=cr6.y;

```

```

y2:=y1*y1; y3:=y2*y1; y4:=y3*y1; y5:=y4*y1;
{ ----- }
{ iegūt ģeodēzisko garumu starpības prognozi grādos }
ce2_x.x:=(cr6.y/(Nx*Cos(ce2_x.y/ro)))*ro;
{ ----- }
{ ... "ce2_x" -ģeodēzisko koordinātu prognoze grādos }
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko garumu grādos }
ce2_x:=ce2_0.x+
    (ce2_x.x/ro)*
    (1-
    (y2/( 6*N2))*(1+2*t2+f2)+
    (y4/(120*N4))*(5+28*t2+24*t4+6*f2+8*f2*t2))*ro;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko platumu grādos }
ce2.y:=ce2_x.y-
    ((y2/(2*Mx*Nx))*t1*
    (1-
    (y2/(12*N2))*(5+3*t2+f2-9*f2*t2)+
    (y4/(360*N4))*(61+90*t2+45*t4)))*ro;
{ ----- }
end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Inverse_Gauss_conformal_mapping};

```

21. Zemes elipsoīda konformā attēlošana plaknē.

Meridiānu tuvināšanās, mēroga koeficients un izlieces redukcija pēc Gausa- Krīgera.

Zemes elipsoīda gabala sE^2 attēlošanu uz koordinātu plaknes sR^2 pēc Gausa-Krīgera izteic vektorfunkcija [sk.18.lekc.]

$$f: sE^2 \rightarrow sR^2, \quad (21.1)$$

To raksturo divas pazīmes:

- leņķi uz plaknes un uz elipsoīda sakrīt;
 - attēla mērogs plaknes punktā P_u' nav atkarīgs no virziena.
- Izteiksmes (21.1) izvērsta pieraksts ir

$$\underline{x}_u = f_1(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (21.2)$$

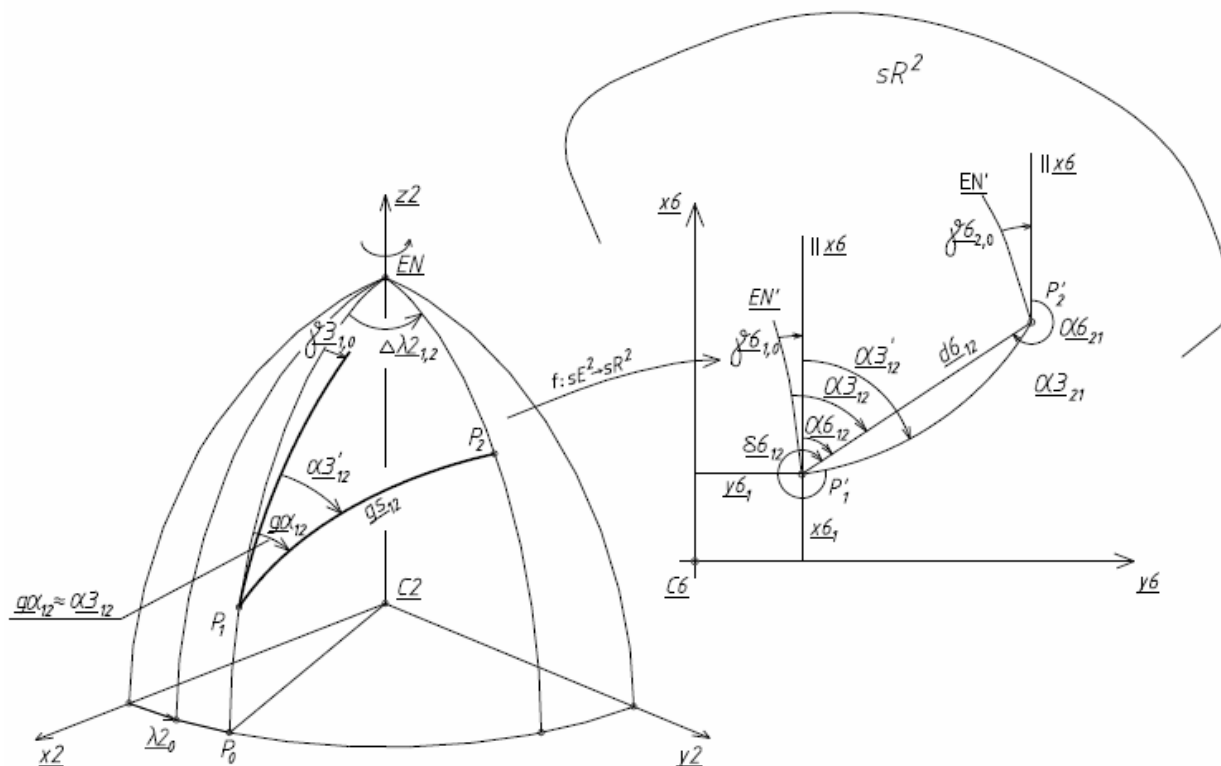
$$\underline{y}_u = f_2(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u) \quad (21.3)$$

Šeit

$(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u)$ - elipsoīda gabala sE^2 punkta P_u elipsoidālās koordinātas uz virsmas sE^2 ;

$(\underline{x}_u, \underline{y}_u)$ - elipsoīda gabala sE^2 punkta P_u attēla P_u' taisnleņķa koordinātas uz plaknes sR^2 .

P_u - patvaļīgi izvēlēts elipsoīda gabala sE^2 punkts (šeit $u = 1,2$)



21.1.zīm. Elipsoīda attēlošana uz plaknes. Meridiānu tuvināšanās, mēroga koeficients un izlieces redukcija pēc Gausa-Krīgera.

Šeit [sk.arī 16.lekc.]:

- | | |
|---|--|
| a | - Zemes elipsoīda lielās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| b | - Zemes elipsoīda mazās pusass garums no gds [sk. 1.lek.]; |
| e | - elipsoīda 1.ekscentricitāte no gds [sk.1.lek]; |

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

e'	- elipsoīda 2.ekscentricitāte no <u>gds</u> [sk.1.lek];
<u>C2</u>	- elipsoīda centrs(.s.a. kvaziģeocentrs);
<u>EN</u>	- elipsoīda ziemeļpols;
<u>C2</u> <u>EN</u>	- elipsoīda rotācijas ass;
<u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u>	- elipsoīda ekvatora plakne;
<u>C2</u> <u>x2</u> <u>y2</u> <u>z2</u>	- kvaziģeocentriskā koordinātu telpa;
P_0	- elipsoīda ekvatora punkts (tā izvēle noteic elipsoīda gabalu sE^2);
<u>λ_{20}</u>	- punkta P_0 elipsoidālais garums; parasti $\lambda_{20} = 0^\circ, 3^\circ, \dots, 21^\circ, \dots, 24^\circ, 27^\circ, \dots$ (s.a. koordinātu plaknes sR^2 ass meridiāna elipsoidālais garums);
P_0 <u>EN</u>	- ass (s.a. centrālais) meridiāns;
sE^2	- ar <u>λ_{20}</u> norādītais elipsoīda gabals;
P_u	- brīvi izvēlēts elipsoīda punkts ($u=1,2$);
P_1 P_2	- elipsoīda ģeodēziskās līnijas nogrieznis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
P_u <u>EN</u>	- punkta P_u meridiāns;
<u>$ce_{2u} = (\lambda_{2u}, \varphi_{2u}, h_{2u})^T$</u>	- elipsoīda punkta P_u kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas;
<u>$\lambda_{2u}, \varphi_{2u}$</u>	- punkta P_u elipsoidālais garums, platums un augstums (<u>$h_{2u} = 0$</u>);
<u>$\Delta\lambda_{212} = \lambda_{22} - \lambda_{21}$</u>	- punkta P_2 un punkta P_1 elipsoidālo garumu starpība;
<u>$cs_{312} = (\alpha_{312}, \underline{v}_{312}, \underline{d}_{312})^T$</u>	- punkta P_2 sfēriskās koordinātas punktā P_1 ;
<u>α_{312}</u>	- ģeodēziskais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam <u>$cs_{312} = (\alpha_{312}, \underline{v}_{312}, \underline{d}_{312})^T$</u> punkta P_1
vietējā	ģeodēziskā telpā (3-ais loģiskais kārtas numurs); s.a. ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.]; s.a. tiešā normālšķēluma
	elipsoidālais azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
<u>$\underline{v}_{312}$</u>	- ģeodēziskais slīpuma leņķis no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
<u>$\underline{d}_{312}$</u>	- ģeodēziskais slīpais attālums no punkta P_1 uz punktu P_2 ;
<u>γ_{310}</u>	- meridiānu tuvināšanās elipsoīda punktā P_1 attiecībā pret izvēlēto ass_meridiānu
<u>α_{321}</u>	- ģeodēziskais azimuts no punkta P_2 uz punktu P_1 ; tas pieder sfērisko koordinātu trijniekam <u>$cs_{321} = (\alpha_{321}, \underline{v}_{321}, \underline{d}_{321})^T$</u> punkta P_2
vietējā	ģeodēziskā telpā; (3-ais loģiskais kārtas numurs);s.a.ģeogrāfiskais (īstais) azimuts [Biķis Ģeodēzija 93, 104.], [Biķis Ģeodēzija 74,
151.].	
<u>ga_{12}</u>	- ģeodēziskās līnijas azimuts no punkta P_1 uz punktu P_2 [sk. Heck 1995, 186., <u>α_1</u>]; (praktiski <u>$ga_{12} = \alpha_{312}$</u>)
<u>gs_{12}</u>	- ģeodēziskās līnijas nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ; (jāievēro, ka <u>not($gs_{12} = \underline{d}_{312}$)</u>);
<u>ns_{12}</u>	- tiešā normālšķēluma nogriežņa garums starp punktiem P_1 un P_2 ;
sR^2	- sE^2 attēla koordinātu plakne, kuru noteic attēlojums $f : sE^2 \rightarrow sR^2$;
$P_u' = f(P_u)$	- Zemes elipsoīda punkta P_u attēls koordinātu plaknē $sR^2 = f(sE^2)$;
P_1'	- Zemes elipsoīda punkta P_1 attēls;
P_2'	- Zemes elipsoīda punkta P_2 attēls;
P_1' <u>EN</u>	- Zemes elipsoīda punkta P_1 meridiāna attēls;
P_2' <u>EN</u>	- Zemes elipsoīda punkta P_2 meridiāna attēls;
<u>C6</u> <u>x6</u> <u>y6</u>	- sE^2 attēla koordinātu plakne;
<u>C6</u>	- plaknes koordinātu sākumpunkts; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta P_0 attēls;
<u>C6</u> <u>x6</u>	- abscisu ass; uz Zemes elipsoīda ekvatora izvēlēta punkta P_0 meridiāna (s.a. koordinātu plaknes <u>C6</u> <u>x6</u> <u>y6</u> ass meridiāna) attēls;

$C6 \ y6$	- ordinātu ass; Zemes elipsoīda ekvatora attēls;
$\underline{cr6}_u = (\underline{x6}_u, \underline{y6}_u)^T$	- punkta P_u attēla taisnleņķa koordinātas plaknē sR^2 ;
$\underline{x6}_u, \underline{y6}_u$	- punkta P_u attēla abscisa un ordināta koordinātu plaknē sR^2 ;
$P_1' \parallel \underline{x6}$	- abscisu asij $C6 \ x6$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_1' ;
$P_2' \parallel \underline{x6}$	- abscisu asij $C6 \ x6$ paralēla taisne, kas vilkta caur punktu P_2' ;
$\underline{y6}_{10}$	- meridiānu tuvināšanās punktā P_1' ;
$\underline{y6}_{20}$	- meridiānu tuvināšanās punktā P_2' ;
$P_1' P_2'$	- Zemes elipsoīda punktu P_1 un P_2 ģeodēziskās līnijas attēla chorda;
$\underline{\alpha6}_{12}$	- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_1' uz plaknes punktu P_2' (s.a. tiešais direkcionālais leņķis, r.a. $\underline{\alpha}_{12}$);
$\underline{\alpha6}_{21}$	- direkcionālais leņķis plaknes punktā P_2' uz plaknes punktu P_1' (s.a. pretējais direkcionālais leņķis, r.a. $\underline{\alpha}_{21}$);

Attēlojot Zemes elipsoīda gabalu sE^2 uz plaknes sR^2 pēc Gausa-Krīgera izveidotām sakarībām [sk.arī 19.un 20.lekc.], jāaprēķina un jāņem vērā meridiānu tuvināšanās leņķi, mēroga koeficienti (s.a.attālumu sagrozījumi) un elipsoīda nogriežņa attēla izlieces labojumi (s.a. redukcijas).

Šo lielumu vērtību noteikšanai jālieto sekojošas izteiksmes [Христов,57,126],[Яковлев,89,387], [Морозов,79,219].

Tā kā attēlojums pēc Gausa-Krīgera ir **konforms**, tad leņķu vērtības uz elipsoīda un plaknes sakrīt.

No elipsoīda gabala sE^2 punkta P_1 vilksim elipsoīda loku $P_1 P_3$ tā, ka visi loka punkti ir vienādā attālumā no punkta P_1 meridiāna $P_1 \underline{EN}$.

Iegūtais leņķis $\underline{EN} P_1 P_3$ izteic izvēlēta punkta P_0 meridiāna $P_0 \underline{EN}$ (s.a. ass meridiāna) un punkta P_1 meridiāna $P_1 \underline{EN}$ tuvināšanos ($\underline{\gamma3}_{10}$).

Starpību $\underline{\alpha3}_{12} = \underline{\alpha3}_{12} - \underline{\gamma3}_{10}$ sauc par **ģeodēzisko direkcionālo leņķi** no punkta P_1 uz punktu P_2

To uz attēla koordinātu plaknes sR^2 aizstāj ar **direkcionālo leņķi**

$$\underline{\alpha6}_{12} = \underline{\alpha3}_{12} + \underline{\delta6}_{12} = \underline{\alpha3}_{12} - \underline{\gamma3}_{10} + \underline{\delta6}_{12}, \quad (21.4)$$

kur $\underline{\delta6}_{12}$ ir t.s. **izlieces redukcija**. Tā ir nepieciešama elipsoīda nogriežņa $P_1 P_2$ attēla - loka $P_1' P_2'$ aizstāšanai ar taisnes nogriezni $P_1' P_2'$.

Konformā attēlojumā meridiānu tuvināšanās $\underline{\gamma6}_{10}$ uz attēla koordinātu plaknes sR^2 sakrīt ar leņķi $\underline{\gamma3}_{10}$ uz elipsoīda gabala sE^2 .

Meridiānu tuvināšanās attēla punktā P_1' ir sekojoša elipsoīda parametru un punktu P_0, P_1 elipsoidālo koordinātu funkcija [Христов,57,123]

$$\begin{aligned} \underline{\gamma6}_{10} = \underline{\gamma3}_{10} = & (t \cdot c \cdot l + \\ & + (1/3) \cdot t \cdot (1 + 3 \cdot f^2 + 2 \cdot f^4) \cdot c^3 \cdot l^3 + \\ & + (1/15) \cdot t \cdot (2 - t^2 + 15 \cdot f^2 - 15 \cdot t^2 \cdot f^2) \cdot c^5 \cdot f^5 + \\ & + (1/315) \cdot t \cdot (17 - 26 \cdot t^2 + 2 \cdot t^4) \cdot c^7 \cdot l^7) \cdot \rho^0, \end{aligned} \quad (21.5)$$

kur

$$t^i = \tan^i(\varphi2); \quad t = t^1; \quad \varphi2 = \varphi2_u; \quad (21.6)$$

$$f^i = \eta^i(\varphi2); \quad \eta(\varphi2) = e' \cdot \cos(\varphi2); \quad [Христов,57,123 : f^i = \eta^i] \quad (21.7)$$

$$c^i = \cos^i(\varphi2); \quad c = c^1 \quad (21.8)$$

$$l^i = ((\lambda2_1 - \lambda2_0) / \rho^0)^i; \quad l = l^1 \quad (21.9)$$

$$\rho^0 = 180^0 / \pi \quad (21.10)$$

Mēroga koeficients attēla punktā P_1' ir sekojoša elipsoīda parametru un punktu P_0, P_1 elipsoidālo koordinātu funkcija [Христов,57,128]

$$m_1 = 1 + \begin{aligned} &+ (1/2) \cdot (1 + f^2) \cdot c^2 \cdot l^2 + \\ &+ (1/24) \cdot (5 - 4 \cdot t^2 + 14 \cdot f^2 - 28 \cdot t^2 \cdot f^2) \cdot c^4 \cdot l^4 + \\ &+ (1/720) \cdot (61 - 148 \cdot t^2 + 16 \cdot t^4) \cdot c^6 \cdot l^6 \end{aligned} \quad (21.11)$$

Mēroga koeficients nogriežnim attēla nogriežnim $P_1' P_2'$ ir sekojoša elipsoīda parametru un punktu P_0, P_1, P_2 elipsoidālo koordinātu funkcija [Морозов,79,242].

$$m_{12} = (m_1 + 4 \cdot m_3 + m_2) / 6, \quad (21.12)$$

kur

m_1, m_2 - mēroga koeficienti attēla nogriežņa galapunktos P_1' un P_2' ;

m_3 , - mēroga koeficients nogriežņa viduspunktā;

Izlieces redukcija no attēla punkta P_1' uz punktu P_2' ir sekojoša elipsoīda parametru un nogriežņa viduspunkta P_3 koordinātu funkcija [Христов,57,175]

$$\delta \underline{g}_{12}' = - \left(\left(\frac{1}{2 \cdot N^2} \right) \cdot (1 + f^2) - \left(\frac{1}{6 \cdot N^4} \right) \cdot \underline{y6}^2 \right) \cdot \underline{y6} \cdot \underline{\Delta x} + \begin{aligned} &+ \left(\frac{1}{N^3} \right) \cdot t \cdot f^2 \cdot \underline{y6}^2 \cdot \underline{\Delta y} - \\ &- \left(\frac{1}{12 \cdot N^2} \right) \cdot (1 + f^2) \cdot \underline{\Delta x} \cdot \underline{\Delta y} \right) \cdot \rho^0, \end{aligned} \quad (21.13)$$

kur

$$\underline{\Delta x} = \underline{x6}_2 - \underline{x6}_1;$$

$$\underline{\Delta y} = \underline{y6}_2 - \underline{y6}_1;$$

$$\underline{x6}_3 = (\underline{x6}_1 + \underline{x6}_2) / 2;$$

$$\underline{y6}_3 = (\underline{y6}_1 + \underline{y6}_2) / 2;$$

Piezīmes.

1. N ir pirmā vertikāla liekuma (s.a. šķērslienkuma) rādiuss platumā φ_3
2. Lielumu N^i, f^i, t^i (sk. (21.6) – (21.10)) noteikšanai pēc viduspunkta taisnleņķa koordinātām $\underline{x6}_3, \underline{y6}_3$ uz attēla plaknes R^2 , jāaprēķina arī viduspunkta P_3 elipsoidālās koordinātas $\underline{\lambda}_3, \underline{\varphi}_3$;

22. Koordinātu plaknes Latvijā (1921.- 1945.g.)

Koordinātu plakne ir sakārtotu skaitļu pāru – koordinātu (x, y) kopa

$$sR^2 = \{ (x, y) \mid x \text{ un } y \text{ ir no } sR \}, \quad (22.1)$$

kurā novilkta divas savstarpēji perpendikulāras koordinātu taisnes ar kopīgu sākumpunktu C un kongruentiem vienības nogriežņiem [REM 82,23]. Ģeodēzijā pieņemts, ka koordinātu taisni Cx, kas vērsta uz augšu (Ziemeļu virzienā), sauc par abscisu asi, bet taisni Cy, kas vērsta pa labi (Austrumu virzienā), - par ordinātu asi.

Jāievēro, ka

- par koordinātu plakni saka arī, ka uz tās (s.a.tajā) ir dota [Dekarta taisnleņķa] koordinātu sistēma;
- dažādās valstīs, kā arī dažādās koordinātu plaknēs asu virzienu izvēle var būt atšķirīga.

Kartogrāfiskām vajadzībām koordinātu plakni sR^2 iegūst kā Zemes elipsoīda gabala sE^2 iepriekš aplūkoto vektorfunkciju [sk.18.lekc.]

$$sR^2 = f(sE^2), \quad (22.2)$$

kur sE^2 - noteiktā kārtībā izvēlēts Zemes elipsoīda gabals.

Zemes elipsoīda gabals sE^2 matemātiski ir Zemes elipsoīda sE^3 apakškopa

$$sE^2 = \{ (\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u, \underline{h}_u) \mid \underline{\lambda}_u \text{ un } \underline{\varphi}_u \text{ ir no } sE^3, \underline{h}_u = 0 \}, \quad (22.3)$$

vai arī

$$sE^2 = \{ (\underline{x}_u, \underline{y}_u, \underline{z}_u) \mid \underline{x}_u \text{ un } \underline{y}_u \text{ un } \underline{z}_u \text{ ir no } sE^3, \}, \quad (22.4)$$

kur

$$(\underline{\lambda}_u, \underline{\varphi}_u, \underline{h}_u)^T = \underline{ce2}_u - \text{elipsoīda punkta } P_u \text{ kvaziģeocentriskās elipsoidālās koordinātas};$$

$$(\underline{x}_u, \underline{y}_u, \underline{z}_u)^T = \underline{cr2}_u - \text{elipsoīda punkta } P_u \text{ kvaziģeocentriskās taisnleņķa koordinātas}.$$

Kā zināms (sk.1.lek.), ģeodēziskie mērījumi tiek iegūti starp dažādiem iezīmētiem (s.a. fiziskiem) punktiem uz Zemes fiziskās virsmas vai arī tai tuvā, cilvēkiem piejamā telpā (virs un zem fiziskās virsmas).

Lai veiktu ģeodēzisko mērījumu kopīgu matemātisku apstrādi, tos vispirms jāpārnes uz matemātiskas (s.a. abstraktas) virsmas.

Tas nozīmē, ka jāizveido Zemes vienkāršots apraksts (s.a. modelis). Gadsimtu gaitā, uzkrājot ģeodēzisko un fizikālo pieredzi, cilvēce ir pārliecinājusies, ka Zemi matemātiski vislabāk apraksta divasu (s.a. rotācijas) elipsoīds sE^3 .

Šīs virsmas lietošanai ģeodēziskām vajadzībām, cilvēcei bija jāatrisina vismaz divi pamatuzdevumi

- jānovērtē Zemei vispiemērotākā elipsoīda sE^3 pamatparametri (s.a. dotie ģeometriskie parametri); parasti tie ir (sk.1.lek.):
a - elipsoīda lielās pusass garums (s.a. elipsoīda ekvatoriālais rādiuss);
f - elipsoīda polārais saplakums;

- jāvienojas par izvēlēto elipsoīda sE^3 sasaisti ar Zemi atsevišķās valstīs, valstu grupās vai arī visai Zemei kopumā (s.a. globālu sasaisti).

Pamatuzdevumu risinājumus izteic **ģeodēzisko sistēmu** veidā. Kā norādīts iepriekš (sk.1.lek.), ar ģeodēzisko sistēmu saprot sakārtotus datus par **Zemes ģeodēzisko modeli**.

Jāatzīmē, ka ģeodēzisko sistēmu

$$\mathbf{gds} = \mathbf{ref}(\mathbf{Zeme}), \quad (22.5.)$$

sauc arī par **ģeodēzisko sākumu** vai **ģeodēziskiem sākumdatiem** (angl. Geodetic Datum).

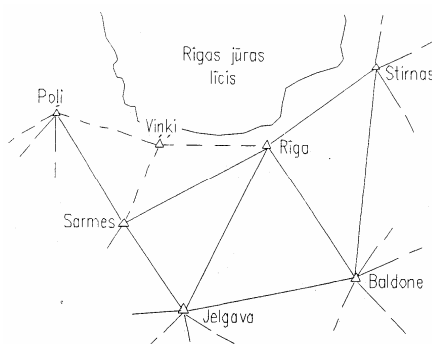
Līdz globālās pozicionēšanas sistēmu (GPS, ГЛОНАСС) ieviešanai Pasaules valstu ģeodēziskos darbos izvēlēto elipsoīdu sasaisti ar Zemi uzdeva tradicionāli. t.i.

- kādu no valsts ģeodēziskiem punktiem izvēlējās par sākuma punktu P_u ;
- sākuma punktā P_u astronomiski noteica garumu λ_{0u} , un platumu φ_{0u} ;
- no sākuma punkta P_u noteica astronomisko azimutu $\alpha_{0u v}$ uz izvēlēto blakuspunktu P_v ;
- pieņēma, ka $\lambda_{2u} = \lambda_{0u}$, $\varphi_{2u} = \varphi_{0u}$ un $\alpha_{3u v} = \alpha_{0u v}$,
kur
 λ_{2u} , φ_{2u} - punkta P_u elipsoidālais garums un platums (elipsoidālais augstums $h_{2u} = 0$);
 $\alpha_{3u v}$ - ģeodēziskais azimuts no punkta P_u uz punktu P_v ;

Koordinātu plaknes Latvijā no 1921.gada līdz 1945.gadam ir noteiktas **Latvijas 1921.gada ģeodēziskā sistēmā**. (LGS-21).

LGS-21 ģeodēziskie sākumdati ir

- Besēļa (Bessel F.R. 1784.-1846.) [AK84, Hamel,84] 1841.g. publicētie elipsoīda parametri:
- ekvatoriālais rādiuss (sk.1.lek.) $a = 6377397.155$ m
- polārais saplakums $f = 0.0033427731536$ [Jäger,Wtrans], [Balodis, Kartogrāfija,13];
- sākuma punkta P_u - Sv.Pētera baznīcas torņa smailes lodes ass elipsoidālās koordinātas
 $\lambda_{2u} = \lambda_{0u} = 24^{\circ} 06' 31.8980''$ un $\varphi_{2u} = \varphi_{0u} = 56^{\circ} 56' 53.9190''$ [LVTT,I – IX], [Jansons 41,5];
- ģeodēziskais azimuts no punkta P_u (Sv.Pētera baznīcas Rīgā) uz punktu P_v (sv. Trīsvienības baznīcas smaili Jelgavā)
 $\alpha_{3u v} = \alpha_{0u v} = 215^{\circ} 24' 05.72''$.



22.1.zīm. Latvijas 1921.gada ģeodēziskās sistēmas sākuma mala Rīga – Jelgava valsts 1.klases ģeodēziskā tīkla segmentā

Atzīmējot Rīgas 800 gadu jubileju, Latvijas Republikas 83.gadadienas priekšvakarā Sv. Pētera baznīcas ieejas hallē Rīgā ir uzstādīta Latvijas 1921.gada ģeodēziskai sistēmai veltīta piemiņas plāksne. Tās centrs ir savietots ar 1973.gadā atjaunotā torņa ģeometrisko asi.



22.1.zīm. Latvijas 1921.gada ģeodēziskās sistēmas (LGS-21) sākuma punkta piemiņas plāksne Rīgā, Sv. Pētera baznīcas halles grīdā

Koordinātu plaknes Latvijā no 1921. – 1945. gadam ir noteiktas tā, ka izteiksmē $s\mathbf{R}^2 = \mathbf{f}(s\mathbf{E}^2)$ matemātiskā sakarība $\mathbf{f}$ izteic **kartogrāfisko attēlojumu pēc Zoldnera** (Soldner J.G.(1776. 1833.)) [Ģeodēzija 93,10.-11.lpp.].

Šajā attēlojumā attālumu sagrozījums ir ģeodēziskā azimuta funkcija. Tas nozīmē, ka bezgalīgi maza riņķa līnija, kas ņemta no elipsoīda gabala $s\mathbf{E}^2$, koordinātu plaknē $s\mathbf{R}^2$ attēlosies kā bezgalīgi maza elipse.

Tādēļ, veidojot koordinātu plaknes pēc Zoldnera, rīkojas sekojoši

- norāda elipsoīda gabalu $s\mathbf{E}^2$, izsludinot koordinātu sistēmas sākuma punkta P_z elipsoidālās koordinātas $\lambda_{2z}, \varphi_{2z}$;
- pieņem, ka sākuma punkta P_z attēla koordinātas (sk.19.lekc.) ir

$$x_{6z} = f_1(\lambda_{2z}, \varphi_{2z}) = 0 \quad (22.6)$$

$$y_{6z} = f_2(\lambda_{2z}, \varphi_{2z}) = 0 \quad (22.7)$$
- pieļauj, ka šī sistēma ir lietojama tikai tiem elipsoīda punktiem, kuru attālums līdz sākuma punktam ir mazāks par 50 km, t.i.

$$s\mathbf{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \text{ no } s\mathbf{R} \text{ ir tādi, ka } \text{dst}(0, 0, x, y) < 50 \text{ km} \}, \quad (22.8)$$
- praktiskā darbībā ievēro, ka noteikums (22.8) nodrošina attālumu sagrozījumus ne lielākus par 1 / 33 000.

1921.gadā tika pieņemts, ka, lietojot attēlojumu pēc Zoldnera, Latvijā ir nepieciešamas septiņas koordinātu plaknes.

To sākumpunkti izvēlēti sekojoši [Jansons 41,5]:

- Vītoliņi, 2.klases ģeodēziskais punkts (vēlāk 1.klases punkts [Menzins 35?]);
- Gaiziņkalns, 1.klases ģeodēziskais punkts;
- Senks, 1.klases ģeodēziskais punkts;
- Rīga (Sv. Pētera baznīca), 1.klases ģeodēziskais punkts;
- Puči, 1.klases ģeodēziskais punkts;
- Kuldīga, Latviešu draudzes Lutera baznīca, K.Tennera ģeodēziskais punkts;
- Liepāja, Vācu draudzes Lutera baznīca, 2.klases ģeodēziskais punkts;

Vēlāk, veicot triangulācijas darbus, sākuma punktu sarakstu izmainīja

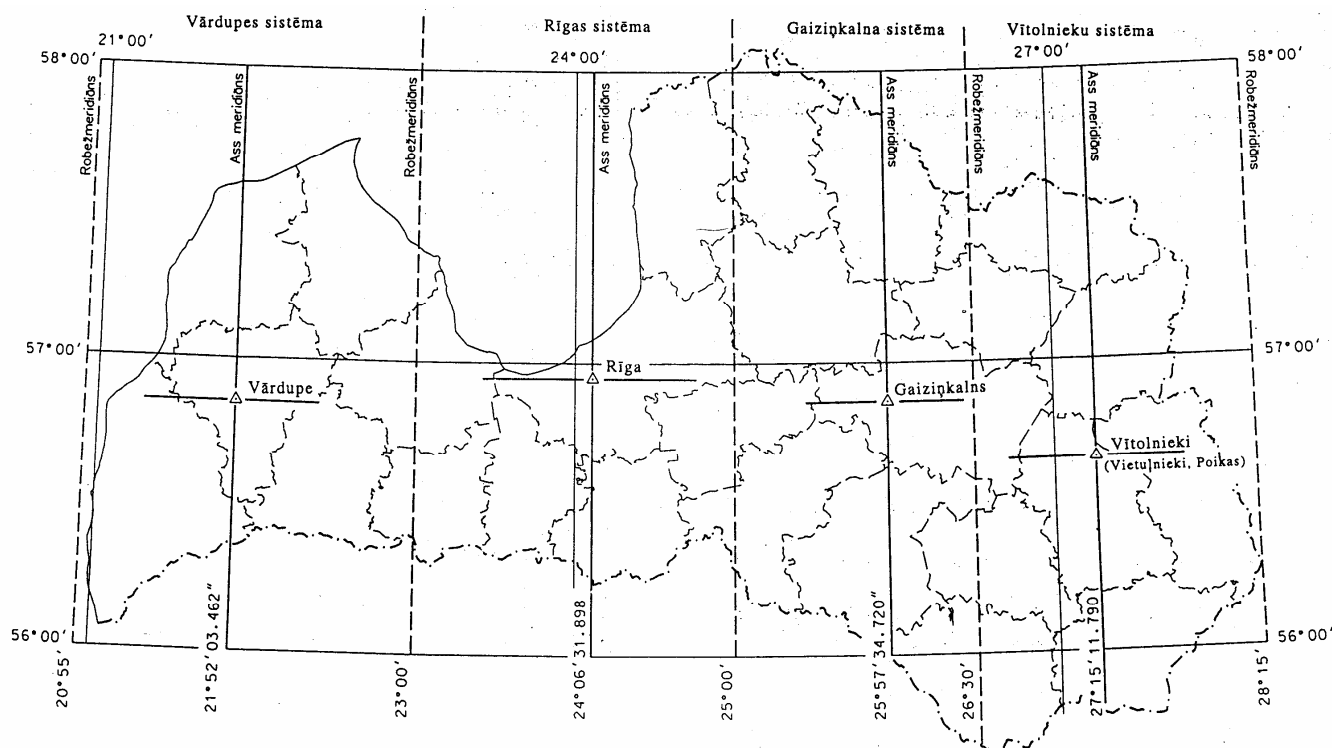
AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

- | | | |
|--------------------------------|---|---|
| ▪ Vārdupe, | $\lambda_{2_z} = 21^\circ 52' 03.462''$ | $\varphi_{2_z} = 56^\circ 51' 32.961''$ |
| ▪ Rīga (Sv. Pētera baznīca), | $\lambda_{2_z} = 24^\circ 06' 31.898''$ | $\varphi_{2_z} = 56^\circ 56' 53.919''$ |
| ▪ Gaiziņkalns | $\lambda_{2_z} = 25^\circ 57' 34.920''$ | $\varphi_{2_z} = 56^\circ 52' 15.031''$ |
| ▪ Vītolnieki | $\lambda_{2_z} = 27^\circ 15' 12.252''$ | $\varphi_{2_z} = 56^\circ 40' 08.447''$ |

[Latvijas valsts trigonometriskais tīkls.1.un 2.daļa; Rīga:ZM Mērniecības daļa,1922.-1927.g]

[Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. 9.daļa;Rīga:ZM Mērniecības daļa,1938.g.]

[Planheft OstEuropa Baltischer Raum,1944]

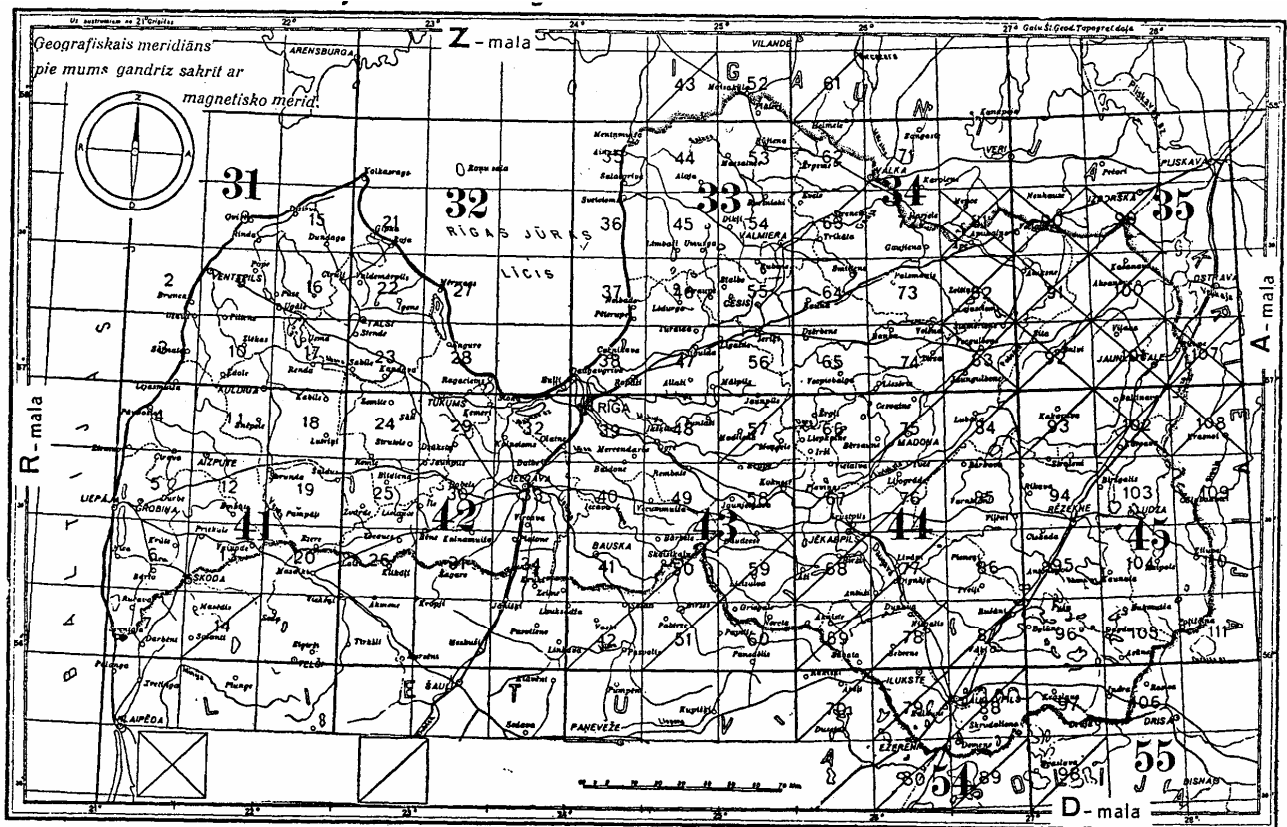


22.2.zīm. Zoldnera koordinātu plaknes Latvijas 1921.gada ģeodēziskās sistēmā (LGS-21)

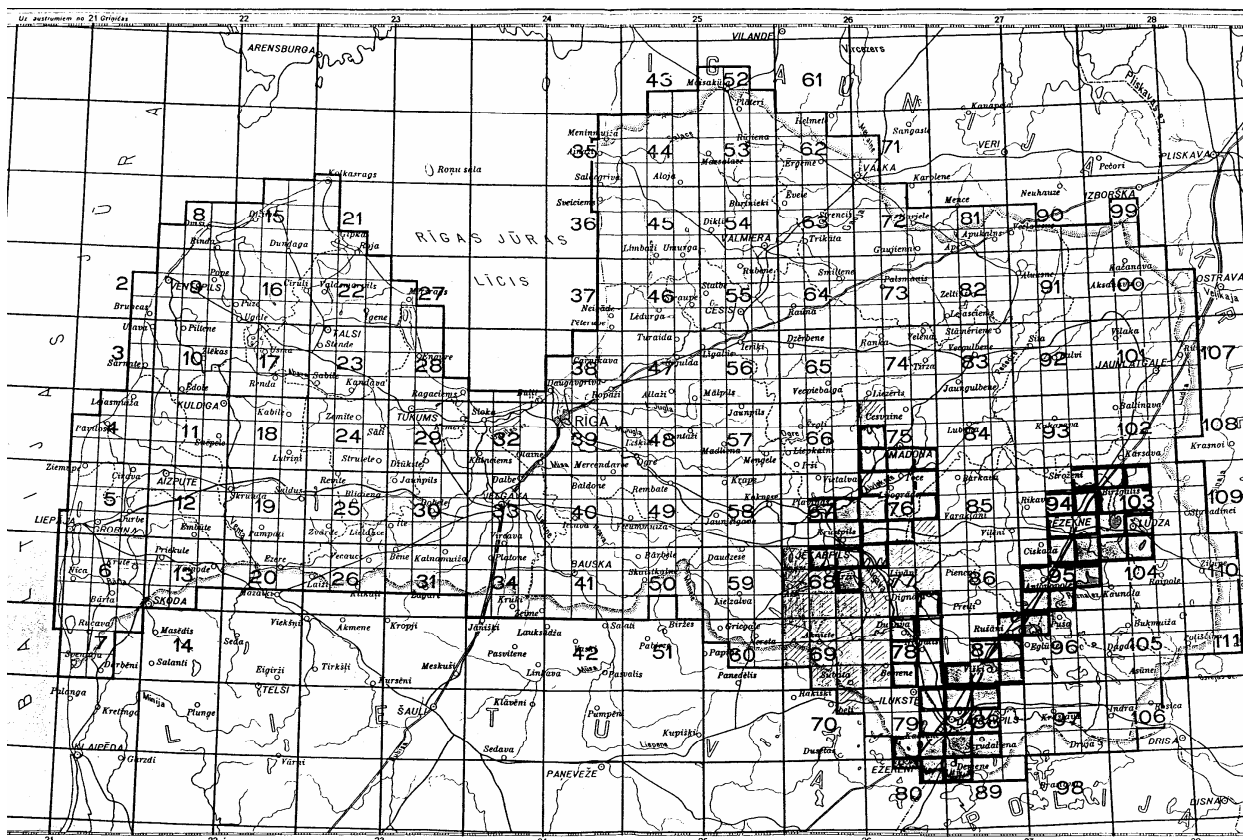
Laikā no 1921.-1945.gadam Latvijā Zoldnera koordinātu plaknēs

- attēloja nekustamo īpašumu robežas,
- sastādīja pilsētu un apdzīvotu vietu topogrāfiskos plānus,
- veidoja Latvijas 1921.gada topogrāfisko karšu sistēmu (TKS-21).

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



22.3.zīm. Latvijas kartes mērogā 1:200 000 un 1:75 000 pārskata lapa



22.4.zīm. Latvijas kartes mērogā 1:75 000 un 1:25 000 pārskata lapa

Latvijas teritorijas koordinātu telpas katalogi (1921.- 1945.g.)

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. I daļa.- /P.Grāvis, E.Cīrulis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, J.Balodis, E.Adsons, D.Vanags, P.Pormals, V.Šlicis, A.Silamiķelis, J.Knohs.-
R.:Zemkopības ministrijas zemju departamenta Mērniecības daļa, 1922.-87.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. II daļa.- /P.Grāvis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, T.Adsons, V.Dombrovskis, A.Meijs.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērniecības daļa, 1927.-246.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. III daļa.- /P.Grāvis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, T.Adsons, V.Dombrovskis, A.Meijs, A.Berkolds.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērniecības daļa, 1930.-127.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. IV daļa.- /P.Grāvis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, T.Adsons, V.Dombrovskis, A.Meijs, A.Berkolds.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērniecības daļa, 1931.-128.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. V daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērniecības daļa, 1932.-100.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VI daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērniecības daļa, 1933.-168.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VII daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības departamenta Mērniecības daļa, 1936.-198.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VIII daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības departamenta Mērniecības daļa, 1937.-206.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. IX daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības departamenta Mērniecības daļa, 1938.-186.lpp.

Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. X daļa.-
R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības departamenta Mērniecības daļa, 1939.-205.lpp.

Latvijas PSR Valsts trigonometriskais tīkls. XI daļa.-
R.:ZTK Zemes ierīcības un meliorācijas pārvaldes Zemes ierīcības daļa, 1941.-148.lpp.

Latvijas trigonometriskais tīkls. XII daļa.
Koordinātu katalogs.-R.:Mērniecības daļa, 1942.-155.lpp.

Menzins K. Tieša pāreja no Latvijas PSR Zoldnera koordinātu sistēmām uz PSRS konformo plaknes sistēmu hidromeliorācijas izmeklēšanas darbos.-Rīga:Latvijas Valsts Universitāte, 1951.-85.lpp.

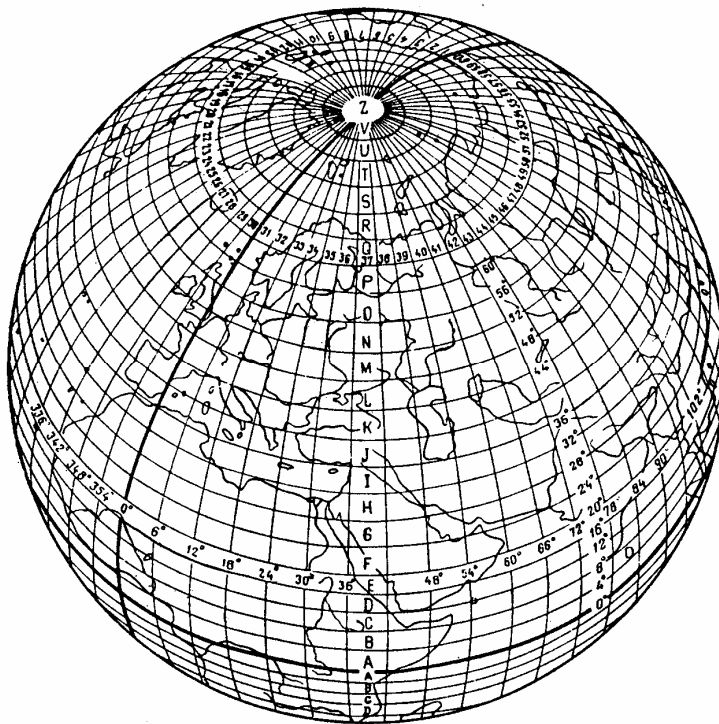
23. Koordinātu plaknes Latvijā (1945.- 1993.g.)

Topogrāfisko karšu 1958.gada sistēma (TKS-58)

Kartes mērogs	Trapeces izmēri		Kartes lapas nosaukums	Lapu skaits n mēroga 1 / M lapā	
	$\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$	punktam "Burtņieki"	n	1 / M
1 : 1 000 000	4°	6°	O – 35	-	-
1 : 500 000	2°	3°	O – 35 – B	4	1 : 1 000 000
1 : 200 000	0° 40'	1°	O – 35 – XX	36	1 : 1 000 000
1 : 100 000	0° 20'	0° 30'	O – 35 – 075	144	1 : 1 000 000
1 : 50 000	0° 10'	0° 15'	O – 35 – 075 – Γ	4	1 : 100 000
1 : 25 000	0° 05'	0° 07' 30"	O – 35 – 075 – Γ - B	4	1 : 50 000
1 : 10 000	0° 02' 30"	0° 03' 45"	O – 35 – 075 – Γ – B – 3	4	1 : 25 000
1 : 5 000	0° 01' 15"	0° 01' 52.5"	O – 35 – 075 – ()	256	1 : 100 000
1 : 2 000	0° 00' 25"	0° 00' 37.5"	O – 35 – 075 – ()	9	1 : 5 000

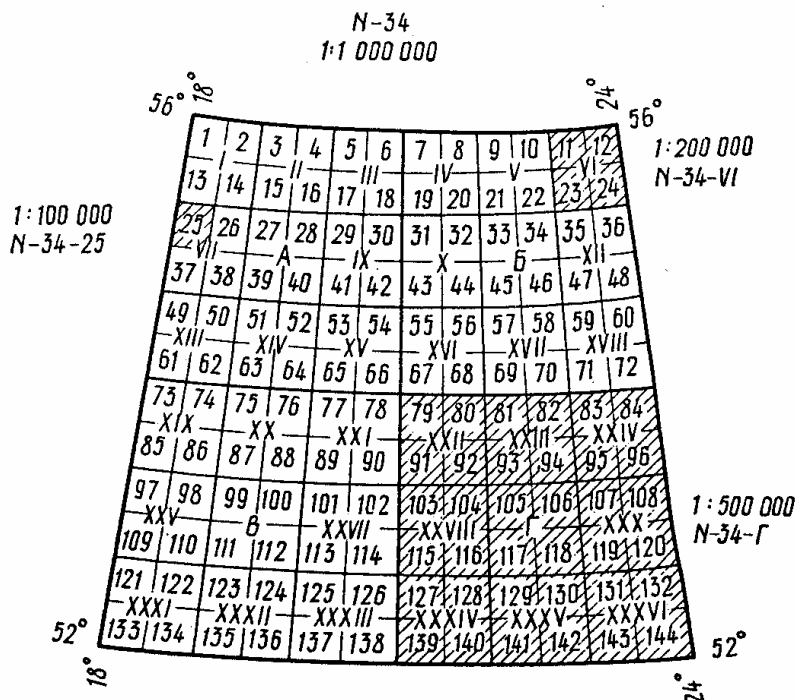
Piezīmes.

1. Trapeces izmērs $\Delta\varphi$ ir tās virsotņu elipsoidālo platumu starpība ($\lambda = \text{const.}$).
2. Trapeces izmērs $\Delta\lambda$ ir tās virsotņu elipsoidālo garumu starpība ($\varphi = \text{const.}$).
3. Ģeodēziskā punkta "Burtņieki" elipsoidālās koordinātas PGS-42 sistēmā ir
 $\lambda = 25^{\circ} 15' 45.4490''$
 $\varphi = 57^{\circ} 41' 23.3666''$



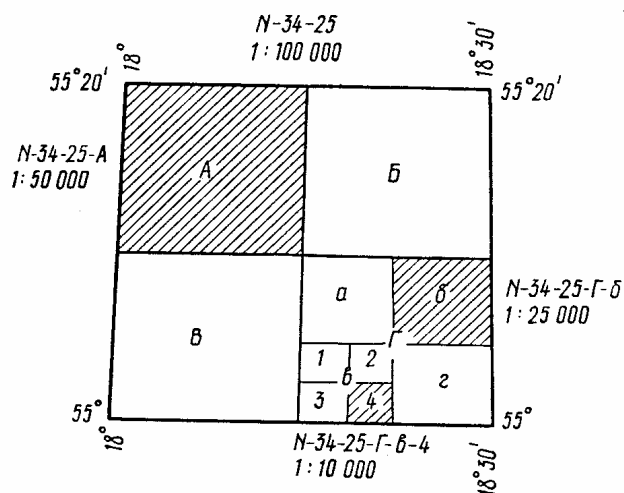
23.5.zīm. Starptautiskais mēroga 1: 1 000 000 karšu lapu sadalījums $\Delta\varphi = 4^{\circ}$ joslās A,B, ..., N, O, ... no ekvatora uz ziemeļiem un $\Delta\lambda = 6^{\circ}$ kolonnās 31, 32, 34, 35, ...no Griničas meridiāna uz austrumiem

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



23.6.zīm. Starptautiskais mēroga 1: 1 000 000 karšu lapas N-34 sadalījums

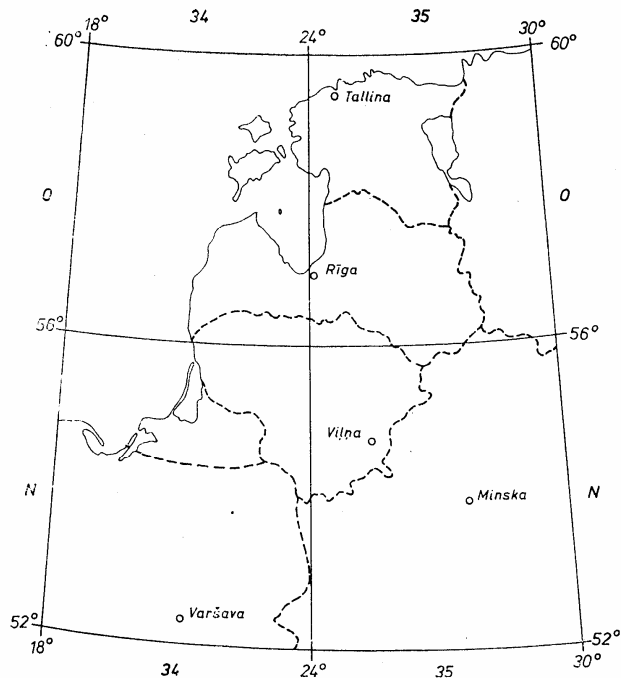
- 4 mēroga 1: 500 000 lapas N-34-A, N-34-B, N-34-B, N-34-Γ,
- 36 mēroga 1: 200 000 lapas N-34-I, N-34-II, ... N-34-XXXVI,
- 144 mēroga 1: 100 000 lapas N-34-1, N-34-2, ... N-34-144.



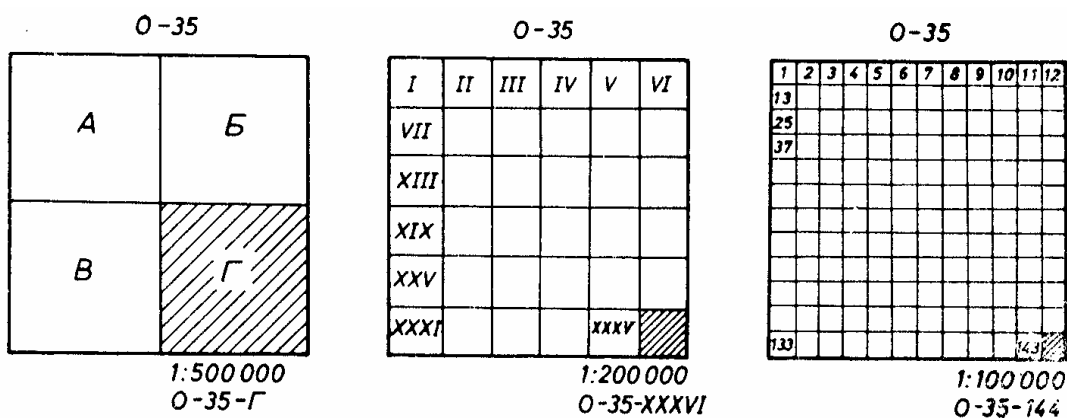
23.7.zīm. Mēroga 1: 100 000 karšu lapas N-34-25 sadalījums

- 4 mēroga 1:50 000 lapas N-34-25-A, N-34-25-B, N-34-25-B, N-34-25-Γ,
- 16 mēroga 1:25 000 lapas N-34-25-A-a, N-34-25-A-b, ..., N-34-25-Γ- b, ...,
- 64 mēroga 1:10 000 lapas N-34-25-A-a-1, N-34-25-A-a-2, ..., N-34-25-Γ- b-1, ...,

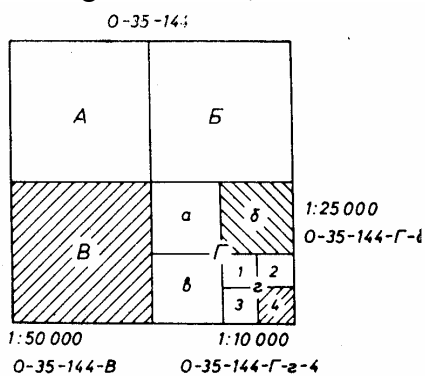
AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



23.8.zīm. Mēroga 1: 1 000 000 karšu lapas Latvijā un tās apkārtņē O-34, O-35, N-34, N-35

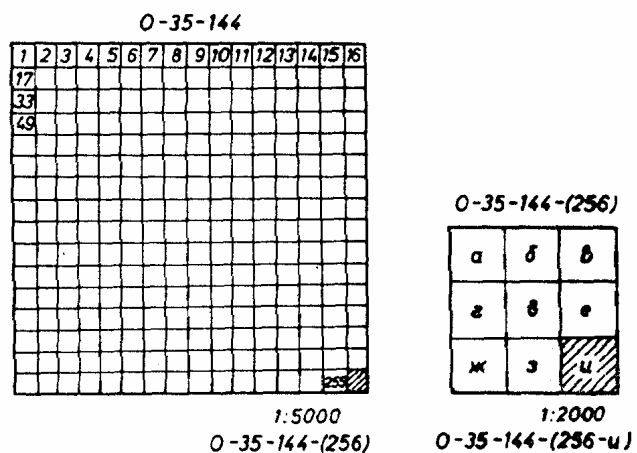


23.9.zīm. Mēroga 1: 1 000 000 kartes lapa O-35 Latvijā un tās apkārtņē
Lapas iedalījums mēroga 1:500 000, 1:200 000 un 1:100 000 lapās



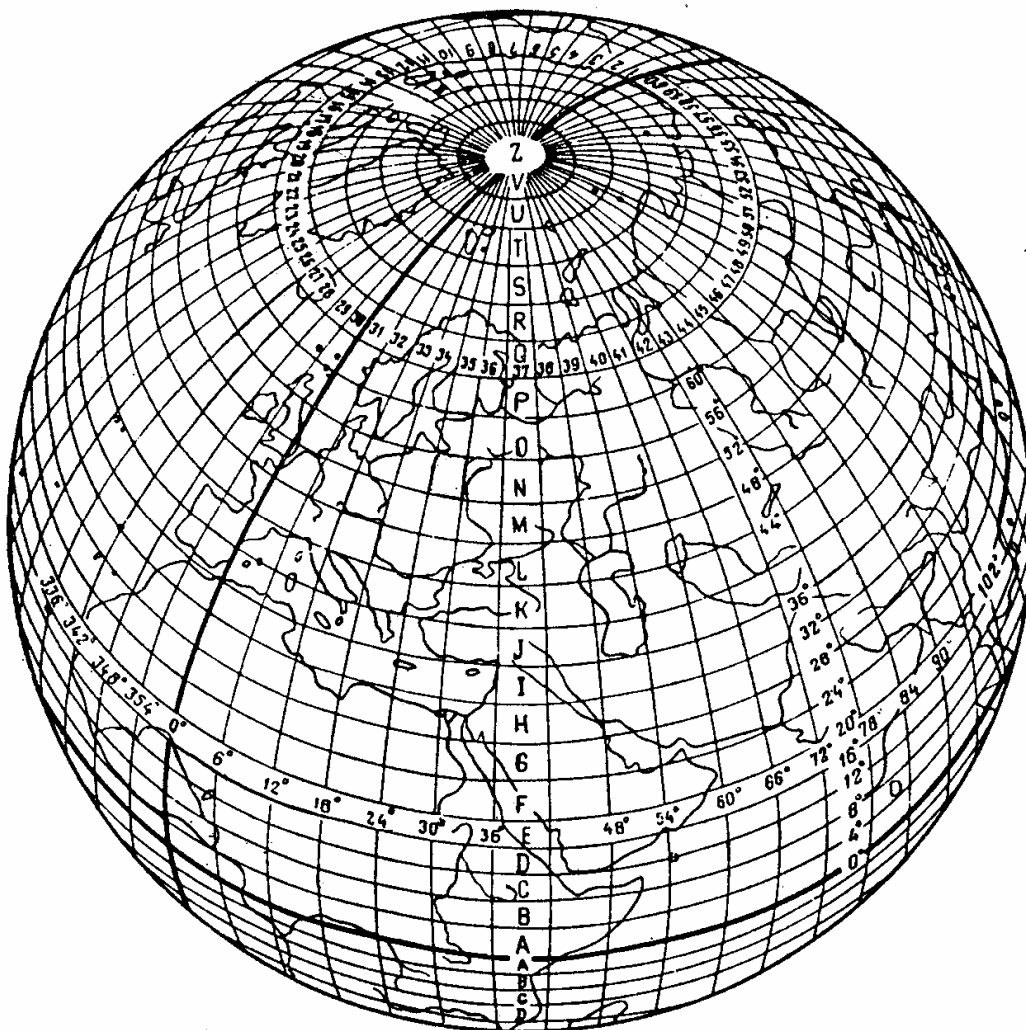
23.9.zīm. Mēroga 1: 100 000 kartes lapa O-35-144 Latvijas apkārtņē/
Lapas iedalījums mēroga 1:50 000, 1:25 000 un 1:10 000 lapās

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



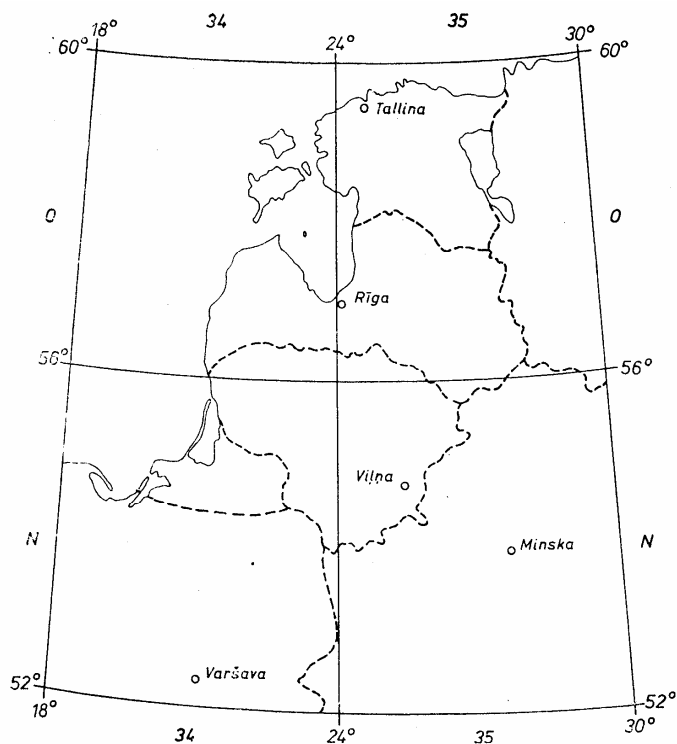
23.10.zīm. Mēroga 1: 100 000 kartes lapa O-35-144 Latvijas apkārtnē.
Lapas O-35-144 iedalījums mēroga 1:5000 un 1:2000 lapās

24. Topogrāfisko karšu 1958.gada sistēma (TKS-58).

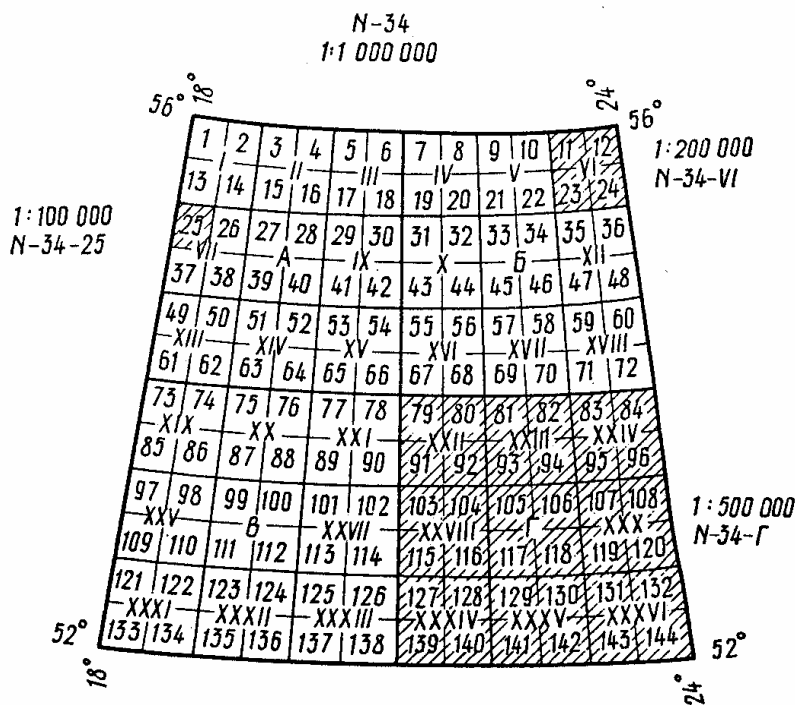


- 24.1.zīm. Starptautiskais mēroga 1: 1 000 000 karšu lapu sadalījums joslās A,B, ..., N, O, ...
no ekvatora uz ziemeļiem ($\Delta\varphi = 4^\circ$) un kolonnās 31, 32, **34, 35, ...no Griničas meridiāna uz austrumiem** ($\Delta\lambda = 6^\circ$). Rīga atrodas uz austrumiem no 24° meridiāna un
 Daugavpils atrodas uz dienvidiem no 56° paralēles. Punkts ar elipsoidālām koordinātām $\lambda = 18^\circ$ un $\varphi = 56^\circ$ atrodas Baltijas jūrā uz austrumiem no Liepājas

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



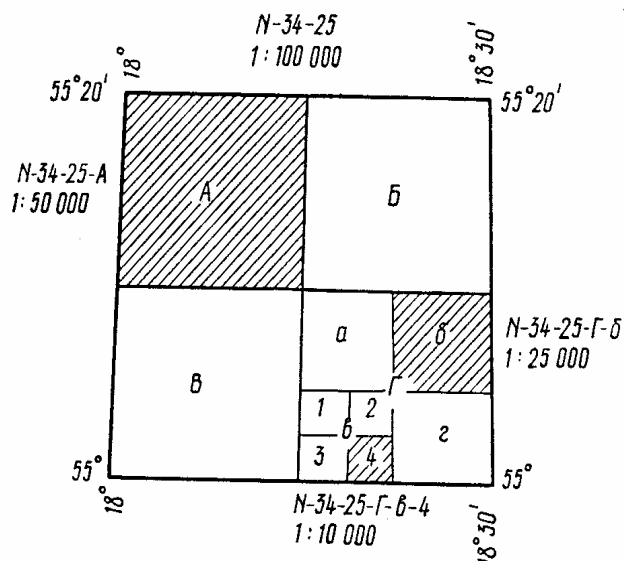
24.2.zīm. Mēroga 1:1 000 000 karšu lapas O-34, O-35, N-34 un N-35 Latvijā un tās apkārtņē



24.3.zīm. Starptautiskais mēroga 1: 1 000 000 karšu lapas N-34 sadalījums:

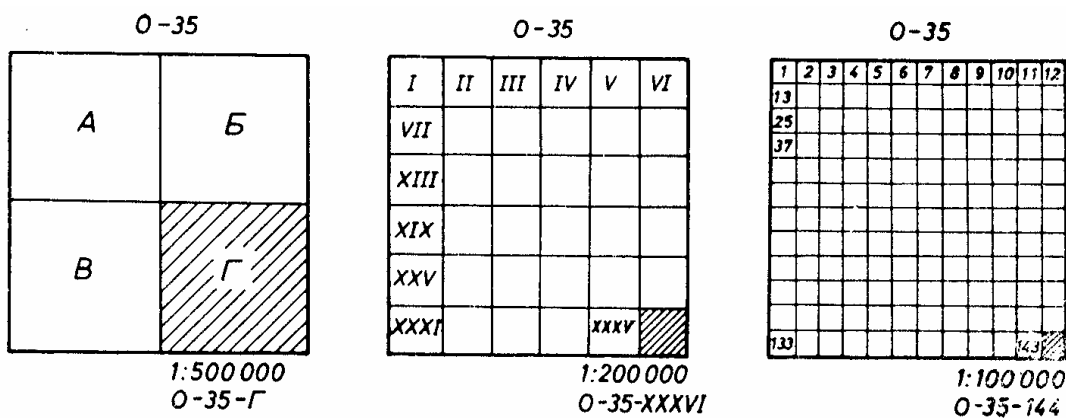
- 4 mēroga 1: 500 000 lapas N-34-A, N-34-B, N-34-B, N-34-Γ,
- 36 mēroga 1: 200 000 lapas N-34-I, N-34-II, ..., N-34-XXXVI,
- 144 mēroga 1: 100 000 lapas N-34-1, N-34-2, ..., N-34-144.

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



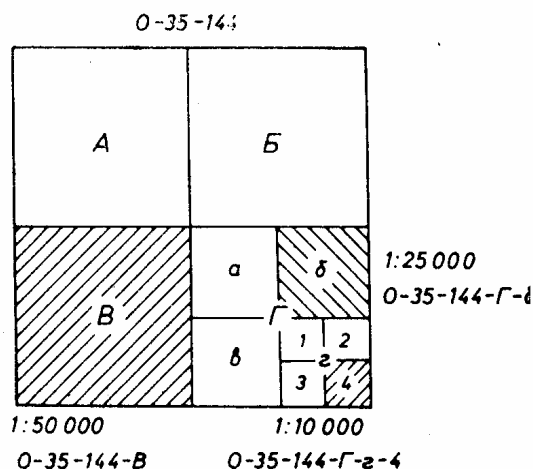
24.4.zīm. Mēroga 1: 100 000 karšu lapas **N-34-25** sadalījums

- 4 mēroga 1: 50 000 lapas **N-34-25-A**, **N-34-25-B**, ..., **N-34-25-Г**;
- 16 mēroga 1: 25 000 lapas... **N-34-25-Г-a**, **N-34-25-Г-б**, ..., **N-34-25-Г-г**,
- 64 mēroga 1: 10 000 lapas... **N-34-25-Г-б-1**, **N-34-25-Г-б-2**, ..., **N-34-25-Г-б-4**

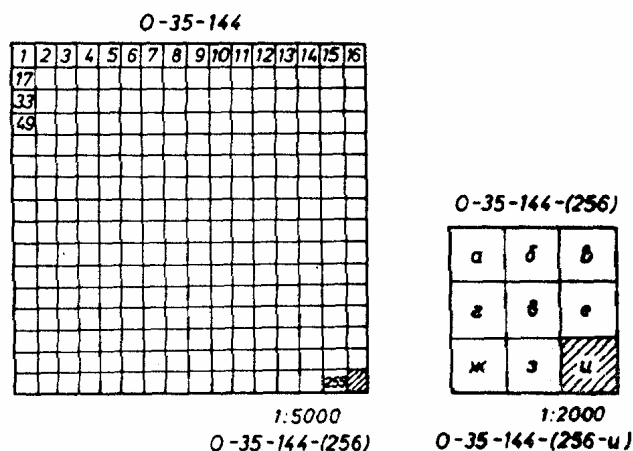


24.5.zīm. Mēroga 1: 1 000 000 kartes lapa **O-35** Latvijā un tās apkārtnē. Lapas **O-35** iedalījums mēroga 1:500 000, 1:200 000 un 1:100 000 lapās

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA



24.6.zīm. Mēroga 1: 100 000 kartes lapa **O-35-144** Latvijas apkārtnē.
Lapas **O-35-144** iedalījums mēroga 1:50 000, 1:25 000 un 1:10 000 lapās



24.7.zīm. Mēroga 1: 100 000 kartes lapa **O-35-144** Latvijas apkārtnē.
Lapas **O-35-144** iedalījums mēroga 1:50 000 un 1:20 000 lapās

Piemērs.

Ģeodēziskais punkts "Burtnieki" topogrāfisko karšu 1958.gada sistēmā pieder sekojošām lapām:

Kartes mērogs	Trapeces izmēri $\Delta\varphi$	$\Delta\lambda$	Kartes lapas nosaukums punktam "Burtnieki"	Lapu skaits n mēroga 1 / M lapā	n	1 / M
1 : 1 000 000	4°	6°	O – 35	-	-	-
1 : 500 000	2°	3°	O – 35 – B	4	4	1 : 1 000 000
1 : 200 000	0° 40'	1°	O – 35 – XX	36	36	1 : 1 000 000
1 : 100 000	0° 20'	0° 30'	O – 35 – 075	144	144	1 : 1 000 000
1 : 50 000	0° 10'	0° 15'	O – 35 – 075 – Γ	4	4	1 : 100 000
1 : 25 000	0° 05'	0° 07' 30"	O – 35 – 075 – Γ – B	4	4	1 : 50 000
1 : 10 000	0° 02' 30"	0° 03' 45"	O – 35 – 075 – Γ – B – 3	4	4	1 : 25 000
1 : 5 000	0° 01' 15"	0° 01' 52.5"	O – 35 – 075 – ()	256	256	1 : 100 000
1 : 2 000	0° 00' 25"	0° 00' 37.5"	O – 35 – 075 – ()	9	9	1 : 5 000

Piezīmes:

4. Trapeces izmērs $\Delta\varphi$ ir tās virsotņu elipsoidālo platumu starpība ($\lambda = \text{const.}$).
5. Trapeces izmērs $\Delta\lambda$ ir tās virsotņu elipsoidālo garumu starpība ($\varphi = \text{const.}$).
6. Ģeodēziskā punkta "Burtnieki" elipsoidālās koordinātas PGS-42 sistēmā ir $\lambda = 25^\circ 15' 45.4490''$, $\varphi = 57^\circ 41' 23.3666''$

26. Koordinātu pārveidošana [kvazi] ģeocentriskā telpā ($\underline{ce1} \rightarrow \underline{cr1}$) $\underline{cr1} = \underline{er1}(\underline{ce1})$

$\underline{ce1} = (\underline{\lambda1}, \underline{\varphi1}, \underline{h1})^T$ – ģeodēziskā punkta P elipsoidālais garums, platums un augstums [kvazi]ģeocentriskā telpā;

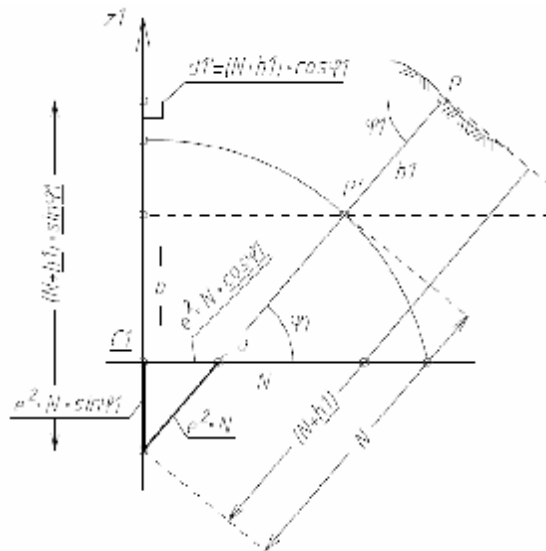
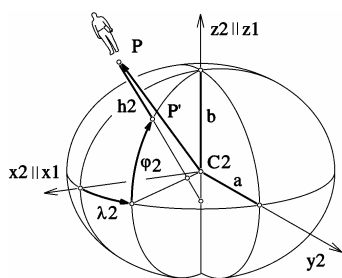
$\underline{cr1} = (\underline{x1}, \underline{y1}, \underline{z1})^T$ – ģeodēziskā punkta P abscisa, ordināta un aplikāta [kvazi]ģeocentriskā telpā;

Piezīme.

Turpmāk frāze “[kvazi]ģeocentriskā telpā” nozīmē to, ka aplūkojamās koordinātu pārveidošanas sakarības ģeocentriskā un kvaziģeocentriskā telpā atšķiras tikai ar telpas kārtas numuru

(nr.1) $\rightarrow \underline{cr1} = \underline{er1}(\underline{ce1})$ – ģeocentriskā telpā

(nr.2) $\rightarrow \underline{cr2} = \underline{er2}(\underline{ce2})$ – kvaziģeocentriskā telpā



26.1.zīm. Matemātiskās sakarības Zemes elipsoīda meridiāna plaknē.

Ģeodēziskā punkta P elipsoidālo koordinātu $\underline{ce1}$ pārveidošanu $\underline{er1}$ par taisnleņķa koordinātām $\underline{cr1}$ [kvazi] ģeocentriskā telpā izteic sekojošas sakarības:

$$\begin{pmatrix} \underline{x1} \\ \underline{y1} \\ \underline{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + \underline{h1}) \cdot \cos \underline{\varphi1} \cdot \cos \underline{\lambda1} \\ (N + \underline{h1}) \cdot \cos \underline{\varphi1} \cdot \sin \underline{\lambda1} \\ (N + \underline{h1} - e^2 \cdot N) \cdot \sin \underline{\varphi1} \end{pmatrix} \quad (25.1.)$$

vai arī

$$\begin{pmatrix} \underline{x1} \\ \underline{y1} \\ \underline{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\underline{d1'} \cdot \underline{\cos \lambda1} \\ (\underline{d1'} \cdot \underline{\sin \lambda1} \\ (N' - e^2 \cdot N) \cdot \underline{\sin \varphi1} \end{pmatrix}, \quad (25.2.)$$

kur

$N = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi1}$ – elipsoīda normālā šķēluma liekuma rādiuss pirmā vertikāla plaknē (s.a. šķērsliekuma rādiuss elipsoīda punktā P');

a – elipsoīda lielās pusass garums;

$e^2 = f \cdot (2 - f)$ – meridiāna elipses pirmās ekscentritātes kvadrāts ($\approx 1 / 150$);

f – elipsoīda polārais saplakums;

$\varphi1$ – ģeodēziskā punkta P elipsoidālais platums;

$N' = N + \underline{h1}$ – attālums no ģeodēziskā punkta P līdz elipsoīda rotācijas asij;

$\underline{h1}$ – ģeodēziskā punkta P elipsoidālais augstums;

$(e^2 \cdot N)$ – ģeodēziskā punkta P elipsoīda normāles nogrieznis zem elipsoīda ekvatora plaknes;

$\underline{d1'} = N' \cdot \underline{\cos \varphi1}$ – ģeodēziskā punkta P attālums līdz elipsoīda rotācijas asij (s.a. ekvatoriālais attālums);

Sekas:

Ja ģeodēziskais punkts P sakrīt ar tā normāles elipsoīda punktu P' , tad $\underline{h1} = 0$ un $\underline{cr1} = \underline{er1}$ ($\underline{ce1}$) ir elipsoidālās koordinātās izteikts elipsoīda vienādojums.

Literatūra.

Torge, 68; Heck, 95, 3.54; Baumann 2, 306; Морозов, 7, 24; Машимов, 13; Иордан, 421; Закатов, 497;.

Datorprocedūra (Pascal)

```
{ x. Aprēķināt cr1=er1(ce1) }
procedure Conversion_ce1_to_cr1
{ ----- }
(   ce1:TY_xyz; { -punkta ģeodēziskās koord.   < }
  var  cr1:TY_xyz; { -punkta taisnleņķa koordinātas > }
  var  gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete   <> }
  var  er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ ----- }
{ 1997.g.20.februārī }
{ ===== }
{ ... "ce1" -[kvazi]ģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ... "cr1" -[kvazi]ģeocentriskās taisnleņķa koordinātas }
{ ----- }
label Ex;
{ ----- }
const ro=180/Pi;
var  N:TY_rnm; { -pirmā vertikāla liekuma rādiuss }
{ ----- }
{ sk.Morozov }
{ sk.Hristov }
```

```

{ ----- }
{ ===== }
{ sub}procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Conversion_cel_to_cr1';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }
begin {Conversion_cel_to_cr1}
{ ===== }
{ uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
{ ----- }
  with gdt do
  begin {with gdt}
    { ----- }
    { ...ģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
    { ..."cel.x" -punkta ģeodēziskais garums grādos > }
    { ..."cel.y" -punkta ģeodēziskais platums grādos > }
    { ..."cel.z" -punkta ģeodēziskais augstums metros > }
    { ----- }
    { ...ģeocentriskās taisnleņķa koordinātas }
    { ..."cr1.x" -punkta ģeocentriskā abscisa [m] > }
    { ..."cr1.y" -punkta ģeocentriskā ordināta [m] > }
    { ..."cr1.z" -punkta ģeocentriskā aplikāta [m] > }
    { ----- }
    { aprēķināt 1.vertikāla liekuma rādiusu }
    N:=Set_Radius_of_curvature(cel,90,gdt);
    { ----- }
    { aprēķināt ģeocentriskās taisnleņķa koordinātas }
    cr1.x:=(N+cel.z)*Cos(cel.y/ro)*Cos(cel.x/ro);
    cr1.y:=(N+cel.z)*Cos(cel.y/ro)*Sin(cel.x/ro);
    cr1.z:=(N+cel.z-Sqr(e)*N)*Sin(cel.y/ro);
    { ----- }
  end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Conversion_cel_to_cr1};

```

27. Koordinātu pārveidošana [kvazi] ģeocentriskā telpā ($\underline{cr1} \rightarrow \underline{ce1}$) $\underline{ce1} = \underline{re1}(\underline{cr1})$

$\underline{cr1} = (\underline{x1}, \underline{y1}, \underline{z1})^T$ – ģeodēziskā punkta P abscisa, ordināta un aplikāta
 [kvazi]ģeocentriskā telpā;

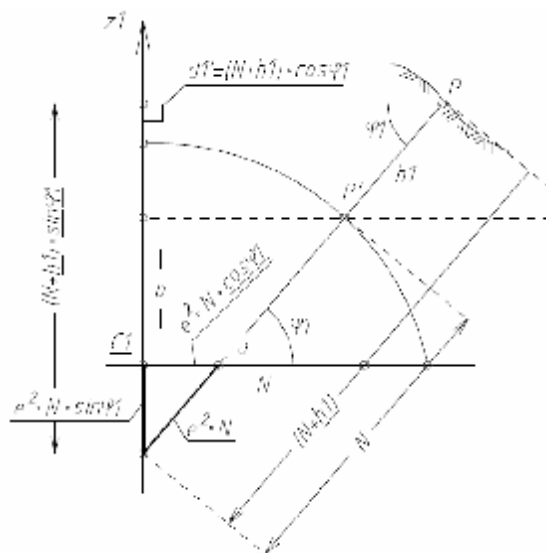
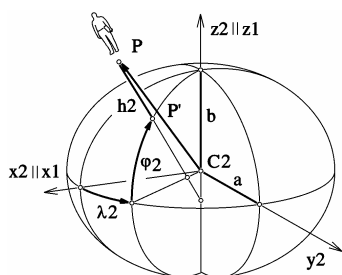
$\underline{ce1} = (\underline{\lambda1}, \underline{\varphi1}, \underline{h1})^T$ – ģeodēziskā punkta P elipsoidālais garums, platums un
 augstums [kvazi]ģeocentriskā telpā;

Piezīme.

Turpmāk frāze “[kvazi]ģeocentriskā telpā” nozīmē to, ka aplūkojamās koordinātu pārveidošanas
 sakarības ģeocentriskā un kvaziģeocentriskā telpā atšķiras tikai ar telpas kārtas numuru

(nr.1) $\rightarrow \underline{cr1} = \underline{er1}(\underline{ce1})$ – ģeocentriskā telpā

(nr.2) $\rightarrow \underline{cr2} = \underline{er2}(\underline{ce2})$ – kvaziģeocentriskā telpā



27.1.zīm. Matemātiskās sakarības Zemes elipsoīda meridiāna plaknē.

Ģeodēziskā punkta P taisnleņķa koordinātu $\underline{ce1}$ pārveidošanu $\underline{re1}$ par elipsoidālām koordinātām $\underline{ce1}$
 [kvazi] ģeocentriskā telpā izteic sekojošas sakarības:

$$\begin{pmatrix} \underline{\lambda1} \\ \underline{\varphi1} \\ \underline{h1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan^{-1}(\underline{y1} / \underline{x1}) \\ \tan^{-1}((\underline{z1} + e^2 \cdot N \cdot \sin \underline{\varphi1}) / \underline{d1'}) \\ \underline{d1'} / \cos \underline{\varphi1} - N \end{pmatrix}, \quad (26.1)$$

kur

$N = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \underline{\varphi1}}$ – elipsoīda normālā šķēluma liekuma rādiuss pirmā
 vertikāla plaknē (s.a. šķērsliekuma rādiuss elipsoīda

punktā P');

- a - elipsoīda lielās pusass garums;
- $e^2 = f \cdot (2 - f)$ - meridiāna elipses pirmās ekscentritātes kvadrāts ($\approx 1 / 150$);
- f - elipsoīda polārais saplakums;
- φ_1 - ģeodēziskā punkta P elipsoidālais platums;
- $N' = N + h_1$ - attālums no ģeodēziskā punkta P līdz elipsoīda rotācijas asij;
- $\frac{h_1}{(e^2 \cdot N)}$ - ģeodēziskā punkta P elipsoidālais augstums;
- ģeodēziskā punkta P elipsoīda normāles nogrieznis zem elipsoīda ekvatora plaknes;
- $d_1' = N' \cdot \cos \varphi_1$ - ģeodēziskā punkta P attālums līdz elipsoīda rotācijas asij (s.a. ekvatoriālais attālums);
- $d_1' = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ - attālums starp ģeodēziskā punkta P projekciju ekvatora plaknē un elipsoīda centru;

Ģeodēziskā punkta P elipsoidālo garumu $\lambda_1 = \tan^{-1} (y_1 / x_1)$ iegūst tāpat kā direkcionālo leņķi plaknē. No punkta P_1 uz punktu P_2 to var izteikt kā koordinātu funkciju $\alpha_{1,2} = \text{drc} (x_1, y_1, x_2, y_2)$. Šeit elipsoīda centram $x_1 = 0$ un $y_1 = 0$, bet ģeodēziskā punkta projekcijai ekvatora plaknē $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$.

Piezīme. Funkcija drc dod pareizus rezultātus arī matemātiskā pieņemtai koordinātu plaknei.

Ģeodēziskā punkta P elipsoidālā platuma $\varphi_1 = \tan^{-1} ((z_1 + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi_1) / d_1')$ aprēķināšanai, kā redzams, nepieciešams tā paša punkta P elipsoidālais platums φ_1 . Šī iemesla dēļ jāizvēlas elipsoidālā platuma φ_1 sākuma vērtība, piemēram, $\varphi_1^{(0)} = \tan^{-1} (z_1 / d_1')$ un jālieto pakāpenisko tuvinājumu metode.

Piezīme.

Elipsoidālā platuma noteikšanai pietiekamais tuvinājumu skaits ir $n = 10$, jo ģeodēziskā punkta P' elipsoidālā augstuma vērtība h_1 ir ievērojami mazāka par šķērsliedzuma rādiusa N vērtību punktā P' (r.a. $h_1 \ll N$).

Elipsoidālā platuma aprēķināšana notiek sekojošā kārtībā

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= \tan^{-1} ((z_1 + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi_1^{(0)}) / d_1'), \\ \varphi_1^{(2)} &= \tan^{-1} ((z_1 + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi_1^{(1)}) / d_1'), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \varphi_1^{(10)} &= \tan^{-1} ((z_1 + e^2 \cdot N \cdot \sin \varphi_1^{(9)}) / d_1'). \end{aligned} \quad (26.2.)$$

Elipsoidālā augstuma izteiksme

$$h_1 = (d' / \cos \varphi_1) - N, \text{ kur } N = N(\varphi_1) = a / \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi_1} \quad (26.3.)$$

seko no ekvatoriālā attāluma izteiksmes

$$\begin{aligned} (d_1' &= (N + h_1) \cdot \cos \varphi_1) \rightarrow \\ \rightarrow ((d_1' / \cos \varphi_1) &= N + h_1) \rightarrow \\ \rightarrow (h_1 &= (d' / \cos \varphi_1) - N), \end{aligned}$$

kur φ_1 ir ar pakāpeniskiem tuvinājumiem iegūtā ģeodēziskā punkta P elipsoidālā platuma vērtība.

Literatūra.

Torge, 69, 3.35.

Datorprocedūra (Pascal)

```
{ x. Aprēķināt cel=rel(cr1) }
procedure Conversion_cr1_to_cel
{ ----- }
(      cr1:TY_xyz; { -punkta taisnleņķa koordinātas < }
  var   cel:TY_xyz; { -punkta ģeodēziskās koord.   > }
  var   gdt:TY_gdt; { -ģeodēzisko datu pakete     <> }
  var   er:TY_err { -kļūdas novēršanas datu pakete <> });
{ ----- }
{ ----- }
{ 1997.g.20.februārī }
{ 1998.g. 4.aprīlī }
{ ===== }
{ ..."cr1" -[kvazi]ģeocentriskās taisnleņķa koordinātas }
{ ..."cel" -[kvazi]ģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ----- }
{ ----- }
label Ex;
{ ----- }
const ro=180/Pi;
const ep=0.00001;
var   N:TY_rnm; { -pirmā vertikāla liekuma rādiuss }
var   C1:TY_xyz; { -koordinātu sistēmas sākums }
var   P1:TY_xyz; { -punkta projekcija ekvatora plaknē }
var   r:TY_rnm; { -paralēles rādiuss }
var   h:TY_rnm; { -punkta augstums }
var   i:TY_crd;
{ ----- }
{ sk.Morozov }
{ sk.Hristov }
{ ----- }
{ ===== }
{ sub}procedure Hlt(s:TY_str);
begin {Hlt}
  er.a:=libr+'Conversion_cr1_to_cel';
  er.m:=s+'!';
  er.f:=true;
end {Hlt};
{ ===== }

{ ===== }
begin {Conversion_cr1_to_cel}
{ ===== }
{ uzstādīt kļūdu slēdzi } er.f:=false;
{ ----- }
  with gdt do
  begin {with gdt}
    { ----- }
    { ...ģeocentriskās taisnleņķa koordinātas }
    { ..."cr1.x" -punkta ģeocentriskā abscisa [m] > }
    { ..."cr1.y" -punkta ģeocentriskā ordināta [m] > }
    { ..."cr1.z" -punkta ģeocentriskā aplikāta [m] > }
```

```

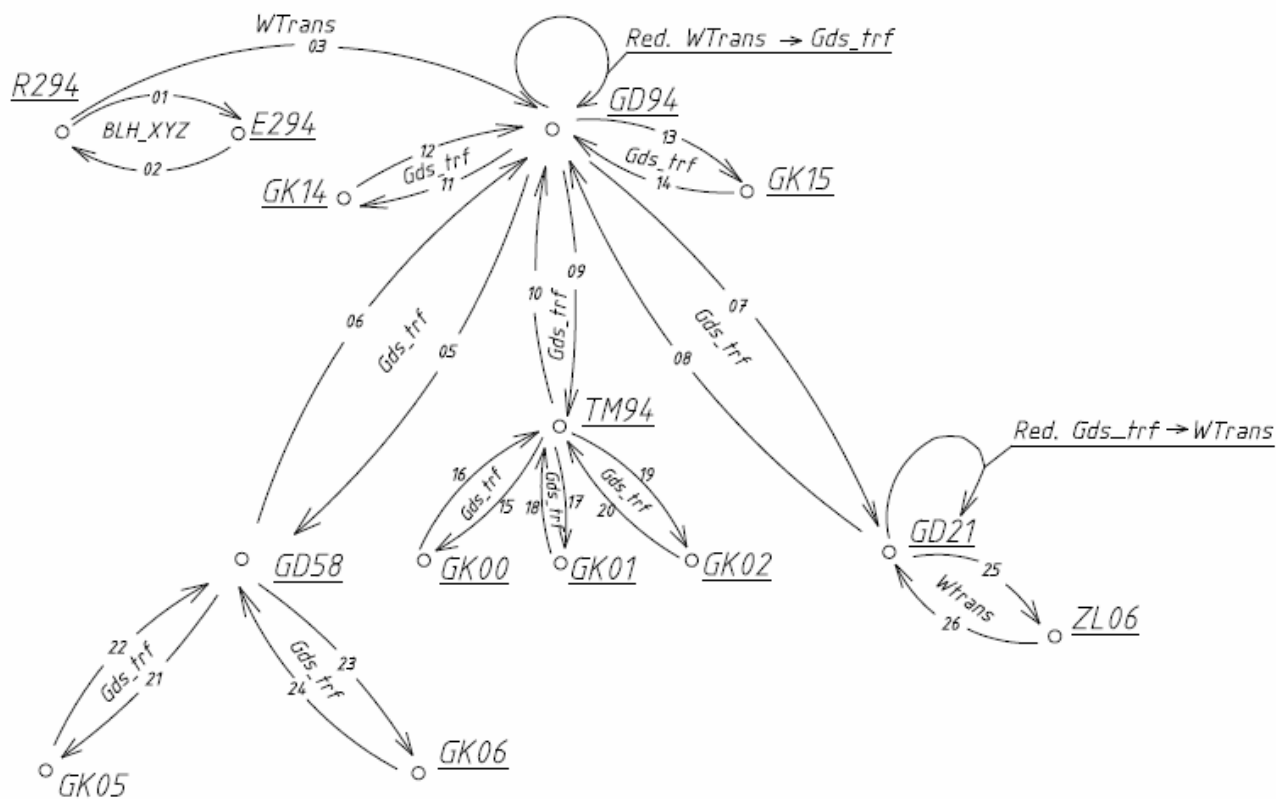
{ ----- }
{ ...ģeocentriskās elipsoidālās koordinātas }
{ ..."ce1.x" -punkta ģeodēziskais garums grādos > }
{ ..."ce1.y" -punkta ģeodēziskais platums grādos > }
{ ..."ce1.z" -punkta ģeodēziskais augstums metros > }
{ ----- }
{ uzstādīt koordinātu sistēmas sākumu }
Set_Crd_3D(0,0,0,C1);
{ ...C1 atrodas ekvatora plaknē }
{ ----- }
{ uzstādīt punkta projekciju ekvatora plaknē }
Set_Crd_3D(cr1.x,cr1.y,0,P1);
{ ...P1 atrodas ekvatora plaknē }
{ ----- }
{ aprēķināt punkta ģeocentriskā vektora projekciju }
r:=Dst(C1,P1);
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko garumu } ce1.x:=Drc(C1,P1);
{ ...ši procedūra dod pareizus rezultātus arī }
{ matemātiskā pieņemtai koordinātu plaknei }
{ ----- }
{ uzstādīt platuma prognozi } ce1.y:=ArcTan(cr1.z/r)*ro;
{ ----- }
{ uzstādīt augstuma prognozi } ce1.z:=0;
{ ----- }

{ ----- }
for i:=1 to 10 do
begin {for};
{ ----- }
{ ...šajā ciklā punkta abscisa un ordināta ieiet }
{ tikai caur ģeocentriskā vektora projekciju }
{ ----- }
{ aprēķināt 1.vertikāla liekuma rādiusu }
N:=Set_Radius_of_curvature(ce1,90,gdt);
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko platumu }
ce1.y:=ArcTan( (cr1.z+Sqr(e)*N*Sin(ce1.y/ro))/r)*ro;
{ ----- }
{ aprēķināt ģeodēzisko augstumu }
ce1.z:=(r/Cos(ce1.y/ro))-N;
{ ----- }
end {for};
{ ----- }
{ reducēt elipsoidālo garumu intervālā [-180..+180[ }
if (ce1.x>180) then ce1.x:=(360-ce1.x);
{ ...sk.,piemēram,Jamaiku! }
{ ----- }
end {with gdt};
{ ===== }
{ beigt darbību } Ex;;
{ ===== }
end {Conversion_cr1_to_ce1};

```

28. Koordinātu pārveidošana

Koordinātu pārveidošanas uzdevums jāveic ar datora palīdzību, lietojot programmas “BLH_XYZ.exe”, “WTrans.exe” un “Gds_trf.exe”. Pārveidošanas gaitā secīgi jāveic 1.zīm parādītās darbības.



28.1.zīm. Koordinātu pārveidošanas grafs (R294, E294, ...-grafa virsotnes; [R294_E294], ...-grafa malas).

- 7.01. Pārveidojums: **cr2** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds: GRS-80 ;
 mape: [R294_E294];
 R294 – LGS-92 kvaziģeocentrisko taisnleņķa koordinātu x_{2u} , y_{2u} , z_{2u} telpa;
 E294 – LGS-92 kvaziģeocentrisko elipsoidālo koordinātu λ_{2u} , ϕ_{2u} , h_{2u} telpa;
 izraksts no kataloga [GD94];
 ievaddatne: XXX_R294.txt ; programma: “BLX_XYZ.exe”; izvaddatne: XXX_E294.txt ;

Piemērs.

Ievaddatne XXX_R294.txt:

Stirnas	3160976.310	1436912.697	5332270.449
Mālpils	3156054.879	1467463.018	5327005.781
Baldone	3193883.942	1448490.258	5309700.993
Senks	3136246.202	1452499.953	5342639.804
Rīga	3183914.346	1421473.506	5322796.698

Izvaddatne XXX_E294.txt:

Stirnas	57	6	16.342005	24	26	43.930859	46.1988
---------	----	---	-----------	----	----	-----------	---------

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Mālpils	57 0 58.882948	24 56 12.831495	135.7476
Baldone	56 43 56.808624	24 23 42.873355	103.0656
Senks	57 16 32.042110	24 51 01.526634	104.4590
Rīga	56 56 54.462460	24 03 30.950793	29.3375

7.02. Pārveidojums: **ce2** → **cr2**; ģeodēziskā sistēma: LGS-92; elipsoīds: GRS-80;
 mape: [E294_R294];
 ievaddatne: XXX_E294.txt; programma: "BLH_XYZ.exe"; izvaddatne: XXX_R294.txt;
 salīdzināt ar katalogu [GD94];

Piemērs.

Ievaddatne XXX_E294.txt:

Stirnas	57 6 16.342005	24 26 43.930859	46.1988
Mālpils	57 0 58.882948	24 56 12.831495	135.7476
Baldone	56 43 56.808624	24 23 42.873355	103.0656
Senks	57 16 32.042110	24 51 01.526634	104.4590
Rīga	56 56 54.462460	24 03 30.950793	29.3375

Izvaddatne XXX_R294.txt:

Stirnas	3160976.310	1436912.697	5332270.449
Mālpils	3156054.879	1467463.018	5327005.781
Baldone	3193883.942	1448490.258	5309700.993
Senks	3136246.202	1452499.953	5342639.804
Rīga	3183914.346	1421473.506	5322796.698

7.03. Pārveidojums: **cr2** → **ce2**; ģeodēziskā sistēma: LGS-92; elipsoīds: WGS-84;
 mape: [R294_GD94];
 R294 – LGS-92 kvaziģeocentrisko taisnleņķa koordinātu x_{2u} , y_{2u} , z_{2u} telpa;
 GD94 – LGS-92 kvaziģeocentrisko elipsoidālo koordinātu λ_{2u} , φ_{2u} telpa;
 izraksts no kataloga [GD94];
 ievaddatne: XXX_R294.txt; programma: "WTrans.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt;
 rediģēt izvaddatni XXX_GD94.txt atbilstoši programmas "Gds_trf" ievaddatnes prasībām;

Piemērs:

Ievaddatne XXX_R294.txt:

Stirnas	3160976.310	1436912.697	5332270.449
Mālpils	3156054.879	1467463.018	5327005.781
Baldone	3193883.942	1448490.258	5309700.993
Senks	3136246.202	1452499.953	5342639.804
Rīga	3183914.346	1421473.506	5322796.698

Piezīme.

Punkts "Stirnas" programmas "WTrans.exe" izvaddatnē XXX_GD94.txt

Stirnas 57 06 16.342005 24 26 43.930859 46.1988

jārediģē un jāieraksta programmas "Gds_trf.exe" ievaddatnē XXX_GD94.txt bez elipsoidālā augstuma

#Stirnas 57:06:16.34200 24:26:43.93086

Paraugš.

Rediģētā ievaddatne XXX_GD94 programmai "Gds_trf.exe":
[GD94]

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 51 01.52663
Rīga     56 56 54.46246 24 03 30.95079
```

```
#Stirnas  57:06:16.34200 24:26:43.93086
#Mālpils  57:00:58.88295 24:56:12.83149
#Baldone  56:43:56.80862 24:23:42.87335
#Senks    57:16:32.04211 24:51:01.52663
#Rīga     56:56:54.46246 24:03:30.95079
```

7.04. Uzdevums nav jāizpilda, ja 7.03.uzdevumā ar programmu "Wrtans" ir iegūts elipsoidālais garums

un platums λ_u , φ_u bez augstuma h_u !

Pārveidojums: **ce2** → **cr2**; ģeodēziskā sistēma: LGS-92; elipsoīds: WGS-84;
mape: [GD94_R294];

ievaddatne: XXX_GD94.txt; programma: "Wtrans.exe"; izvaddatne: XXX_R294.txt;
salīdzināt ar katalogu [GD94];.

7.05. Pārveidojums: **ce2** → **ce2**; ģeodēziskās sistēmas: LGS-92 un Pulkowo-42;
elipsoīdi: GRS-80 un Krassowsky;
mape: GD94_GD58;
GD94 – LGS-92 elipsoidālo koordinātu virsmas 1994.g. versija;
GD58 – Pulkowo-42 elipsoidālo koordinātu virsmas 1958.g. versija;
izraksts no kataloga [GD94];
ievaddatne: XXX_GD94.txt; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD58.txt;
salīdzināt ar katalogu [GD58];

Piemērs.

Rediģētā ievaddatne XXX_GD94 programmai "Gds_trf.exe":
[GD94]

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 05 01.52663
```

Rīga 56 56 54.46246 24 03 30.95079

```
#Stirnas 57:06:16.34200 24:26:43.93086
#Mālpils 57:00:58.88295 24:56:12.83149
#Baldone 56:43:56.80862 24:23:42.87335
#Senks 57:16:32.04211 24:51:01.52663
#Rīga 56:56:54.46246 24:03:30.95079
```

Izvaddatne XXX_GD58.txt:

[GD58] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:22h 50m 34s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas 57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils 57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone 56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks 57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga 56 56 54.46246 24 03 30.95079
```

```
#Stirnas 57:06:16.90143 24:26:51.24851
#Mālpils 57:00:59.41691 24:56:20.11937
#Baldone 56:43:57.38863 24:23:50.11528
#Senks 57:16:32.56906 24:51:08.87011
#Rīga 56:56:55.05259 24:03:38.24528
```

- 7.06. Pārveidojums: **ce2** → **ce2** ; ģeodēziskās sistēmas: Pulkowo-42 un LGS-92;
 elipsoīdi: Krassowsky un GRS-80;
 mape: GD58_GD94 ;
 ievaddatne: XXX_GD58.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].

Piemērs.

Ievaddatne XXX_GD58.txt:

[GD58] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:22h 50m 34s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas 57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils 57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone 56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks 57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga 56 56 54.46246 24 03 30.95079
```

```
#Stirnas 57:06:16.90143 24:26:51.24851
#Mālpils 57:00:59.41691 24:56:20.11937
#Baldone 56:43:57.38863 24:23:50.11528
#Senks 57:16:32.56906 24:51:08.87011
#Rīga 56:56:55.05259 24:03:38.24528
```

Izvaddatne XXX_GD94.txt:

[GD94] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:22h 54m 29s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```

Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga     56 56 54.46246 24 03 30.95079

```

```

#Stirnas  57:06:16.34175 24:26:43.93055
#Mālpils  57:00:58.88271 24:56:12.83118
#Baldone  56:43:56.80837 24:23:42.87304
#Senks    57:16:32.04186 24:51:01.52631
#Rīga     56:56:54.46222 24:03:30.95048

```

- 7.07. Pārveidojums: ce2 → ce2 ; ģeodēziskās sistēmas: LGS-92 un LGS-21;
 elipsoīdi: GRS-80 un Bessel;
 mape: GD94_GD21 ;
 GD94 – LGS-92 elipsoidālo koordinātu virsmas 1994.g. versija;
 GD21 – LGS-21 elipsoidālo koordinātu virsmas 1921.g. versija;
 izraksts no kataloga [GD94] ;
 ievaddatne: XXX_GD94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD21.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD21].

Piemērs.

Rediģētā ievaddatne XXX_GD94 programmai "Gds_trf.exe":
 [GD94]

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```

Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga     56 56 54.46246 24 03 30.95079

```

```

#Stirnas  57:06:16.34200 24:26:43.93086
#Mālpils  57:00:58.88295 24:56:12.83149
#Baldone  56:43:56.80862 24:23:42.87335
#Senks    57:16:32.04211 24:51:01.52663
#Rīga     56:56:54.46246 24:03:30.95079

```

Izvaddatne XXX_GD21.txt:

[GD21] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 03m 17s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

#Stirnas	57:06:19.46509	24:26:44.42295
#Mālpils	57:01:01.93832	24:56:13.56513
#Baldone	56:43:59.74657	24:23:43.30073
#Senks	57:16:35.23221	24:51:02.24333
#Rīga	56:56:57.52522	24:03:31.22900

7.08. Pārveidojums: **ce2** → **ce2** ; ģeodēziskās sistēmas: LGS-21 un LGS-92;
elipsoīdi: Bessel un GRS-80 ;
mape: GD21_GD94 ;
ievaddatne: XXX_GD21.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD94].

Piemērs.

Ievaddatne XXX_GD21.txt:

[GD21] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 03m 17s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

#Stirnas	57:06:19.46509	24:26:44.42295
#Mālpils	57:01:01.93832	24:56:13.56513
#Baldone	56:43:59.74657	24:23:43.30073
#Senks	57:16:35.23221	24:51:02.24333
#Rīga	56:56:57.52522	24:03:31.22900

Izvaddatne XXX_GD94.txt:

[GD94] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 08m 41s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

AUGSTĀKĀ ĢEODĒZIJA

#Stirnas	57:06:16.34200	24:26:43.93086
#Mālpils	57:00:58.88295	24:56:12.83149
#Baldone	56:43:56.80862	24:23:42.87335
#Senks	57:16:32.04211	24:51:01.52663
#Rīga	56:56:54.46246	24:03:30.95079

7.09. Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds: GRS-80 ;
mape: GD94_TM94 ;
GD94 – LGS-92 elipsoidālo koordinātu virsmas 1994.g. versija;
TM94 – TM plakne ar centrālo merdiānu 24° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
izraksts no kataloga [GD94] ;
ievaddatne: XXX_GD94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_TM94.txt ;

Piemērs.

Rediģētā ievaddatne XXX_GD94 programmai "Gds_trf.exe":
[GD94]

=====

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

=====

#Stirnas	57:06:16.34200	24:26:43.93086
#Mālpils	57:00:58.88295	24:56:12.83149
#Baldone	56:43:56.80862	24:23:42.87335
#Senks	57:16:32.04211	24:51:01.52663
#Rīga	56:56:54.46246	24:03:30.95079

Izvaddatne: XXX_TM94.txt:
[TM94] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 12m 55s

=====

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

=====

#Stirnas	329110.971	526989.340
#Mālpils	319596.805	556888.539
#Baldone	287673.531	524182.111
#Senks	348381.620	551278.226
#Rīga	311650.479	503564.589

7.10. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds: GRS-80 ;
 mape: TM94_GD94 ;
 ievaddatne: XXX_TM94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].

Piemērs.

Ievaddatne XXX_TM94.txt:

[TM94] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 12m 55s

=====

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

=====

#Stirnas	329110.971	526989.340
#Mālpils	319596.805	556888.539
#Baldone	287673.531	524182.111
#Senks	348381.620	551278.226
#Rīga	311650.479	503564.589

Izvaddatne XXX_GD94.txt:

[GD94] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 16m 03s

=====

Izvads no programmas "WTrans.exe"

Stirnas	57	06	16.34200	24	26	43.93086
Mālpils	57	00	58.88295	24	56	12.83149
Baldone	56	43	56.80862	24	23	42.87335
Senks	57	16	32.04211	24	05	01.52663
Rīga	56	56	54.46246	24	03	30.95079

=====

#Stirnas	57:06:16.34199	24:26:43.93088
#Mālpils	57:00:58.88295	24:56:12.83147
#Baldone	56:43:56.80860	24:23:42.87332
#Senks	57:16:32.04211	24:51:01.52660
#Rīga	56:56:54.46247	24:03:30.95078

7.11 Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds GRS-80 ;
 mape: GD94_GK14 ;
 GD94 – LGS-92 elipsoidālo koordinātu virsmas 1994.g. versija;
 GK14 - UTM plakne ar centrālo meridiānu 21° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
 izraksts no kataloga [GD94] ;
 ievaddatne: XXX_GD94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK14.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].

Piemērs.

Rediģētā ievaddatne XXX_GD94 programmai "Gds_trf.exe":
[GD94]

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga     56 56 54.46246 24 03 30.95079
```

```
#Stirnas  57:06:16.34200 24:26:43.93086
#Mālpils  57:00:58.88295 24:56:12.83149
#Baldone  56:43:56.80862 24:23:42.87335
#Senks    57:16:32.04211 24:51:01.52663
#Rīga     56:56:54.46246 24:03:30.95079
```

Izvaddatne: XXX_GK14.txt:

[GK14] programma:GDS_TRF datums:02.05.04 laiks:23h 42m 39s

Izvads no programmas "WTrans.exe"

```
Stirnas  57 06 16.34200 24 26 43.93086
Mālpils  57 00 58.88295 24 56 12.83149
Baldone  56 43 56.80862 24 23 42.87335
Senks    57 16 32.04211 24 05 01.52663
Rīga     56 56 54.46246 24 03 30.95079
```

```
#Stirnas    6334293.681 708670.191
#Mālpils    6326097.946 738976.616
#Baldone    6292751.234 707683.245
#Senks      6354626.434 732100.870
#Rīga       6315812.290 686024.290
```

7.12. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds GRS-80 ;
mape: GK14_GD94 ;
ievaddatne: XXX_GK14.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD94].

7.13. Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds GRS-80 ;
mape: GD94_GK15 ;
GD94 – LGS-92 elipsoidālo koordinātu virsmas 1994.g. versija;
GK15 - UTM plakne ar centrālo meridiānu 27° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
izraksts no kataloga [GD94] ;
ievaddatne: XXX_GD94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK15.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD94].

7.14. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-92 ; elipsoīds GRS-80 ;
mape: GK15_GD94 ;

ievaddatne: XXX_GK15.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD94.txt ; salīdzināt ar katalogu [GD94].

- 7.15. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: LGS-92 un Pulkowo-42;
 elipsoīdi: GRS-80 un Krassowsky;
 mape: TM94_GK00;
 TM94 – TM plakne ar centrālo meridiānu 24° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
 GK00 - GK 1963.g. plakne ar centrālo meridiānu 21° 57' A.g. un sagrozījumu 1.0000 uz tā
 (elipsoīda speciālā trīsgrādu 0.josla Latvijā);
 izraksts no kataloga [GD94];
 ievaddatne: XXX_TM94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK00.txt ;
- 7.16. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: Pulkowo-42 un LGS-92 ;
 elipsoīdi: Krassowsky un GRS-80;
 mape: GK00_TM94;
 ievaddatne: XXX_GK00.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_TM94.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].
- 7.17. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: LGS-92 un Pulkowo-42;
 elipsoīdi: GRS-80 un Krassowsky;
 mape: TM94_GK01;
 TM94 – TM plakne ar centrālo meridiānu 24° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
 GK01 - GK 1963.g. plakne ar centrālo meridiānu 24° 57' A.g. un sagrozījumu 1.0000 uz tā
 (elipsoīda speciālā trīsgrādu 1.josla Latvijā);
 izraksts no kataloga [GD94];
 ievaddatne: XXX_TM94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK01.txt ;
- 7.18. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: Pulkowo-42 un LGS-92 ;
 elipsoīdi: Krassowsky un GRS-80;
 mape: GK01_TM94;
 ievaddatne: XXX_GK01.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_TM94.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].
- 7.19. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: LGS-92 un Pulkowo-42;
 elipsoīdi: GRS-80 un Krassowsky;
 mape: TM94_GK02;
 TM94 – TM plakne ar centrālo meridiānu 24° A.g. un sagrozījumu 0.9996 uz tā;
 GK02 - GK 1963.g. plakne ar centrālo meridiānu 27° 57' A.g. un sagrozījumu 1.0000 uz tā
 (elipsoīda speciālā trīsgrādu 2.josla Latvijā);
 izraksts no kataloga [GD94];
 ievaddatne: XXX_TM94.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK02.txt ;
- 7.20. Pārveidojums: **cr6** → **cr6** ; ģeodēziskās sistēmas: Pulkowo-42 un LGS-92 ;
 elipsoīdi: Krassowsky un GRS-80;
 mape: GK02_TM94;
 ievaddatne: XXX_GK02.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_TM94.txt ;
 salīdzināt ar katalogu [GD94].
- 7.21. Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: Pulkowo-42; elipsoīds: Krassowsky;
 mape: GD58_GK05 ;
 GD58 – Pulkowo-42 elipsoidālo koordinātu virsmas 1958.g. versija;
 GK05 - GK plakne ar centrālo meridiānu 21° A.g. un sagrozījumu 1.0000 uz tā
 (elipsoīda sešgrādu 4.josla Latvijā);

- izraksts no kataloga [GD58];
ievaddatne: XXX_GD58.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK05.txt ;
- 7.22. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: Pulkowo-42; elipsoīds: Krassowsky;
mape: GK05_GD58 ;
ievaddatne: XXX_GK05.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD58.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD58].
- 7.23. Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: Pulkowo-42; elipsoīds: Krassowsky;
mape: GD58_GK06 ;
GD58 – Pulkowo-42 elipsoidālo koordinātu virsmas 1958.g. versija;
GK06 - GK plakne ar centrālo meridiānu 27° A.g. un sagrozījumu 1.0000 uz tā
(elipsoīda sešgrādu 5.josla Latvijā);
izraksts no kataloga [GD58];
ievaddatne: XXX_GD58.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GK06.txt ;
- 7.24. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: Pulkowo-42; elipsoīds: Krassowsky;
mape: GK06_GD58 ;
ievaddatne: XXX_GK06.txt ; programma: "Gds_trf.exe"; izvaddatne: XXX_GD58.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD58].
- 7.25. Pārveidojums: **ce2** → **cr6** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-21 ; elipsoīds: Bessel ;
mape: GD21_ZL06 ;
GD21 - LGS-21 elipsoidālo koordinātu virsmas 1921.g.versija;
ZL06 – ZL plakne ar fiksētu sākuma punktu;
(Rīga, Pētera baznīcas bumba 1927.g. 56° 56' 53.919" 24° 06' 31.898");
izraksts no kataloga [GD21] ;
ievaddatne: XXX_GD21.txt ; programma: "WTrans.exe"; izvaddatne: XXX_ZL06.txt ;
- 7.26. Pārveidojums: **cr6** → **ce2** ; ģeodēziskā sistēma: LGS-21 ; elipsoīds: Bessel ;
mape: ZL06_GD21 ;
ievaddatne: XXX_ZL06.txt ; programma: "WTrans.exe"; izvaddatne: XXX_GD21.txt ;
salīdzināt ar katalogu [GD21].

Literatūra

[GD94] (no 1994.g.):

1. Valsts ģeodēziskais pamattīkls.- R., Valsts zemes dienests, 1994.,37.lpp.
2. Aizpildošais GPS tīkls. - R., Valsts zemes dienests, 1994.
[TM94], [GK14],[GK15] ir [GD94] apakškopas.

[GD58] (1945.g.-1992.g.):

1. Каталог координат геодезических пунктов
на лист карты масштаба 1:200 000 О-35-XXVIII (Пыталово).- Ленинград, Войсковая часть
Военно-топографического управления Генерального штаба, 1980., 116.с., 1 схема
25. Каталог координат геодезических пунктов
на лист карты масштаба 1:200 000 О-35-XX (Валмиера).- Ленинград, Войсковая часть 74167
Военно-топографического управления Генерального штаба, 1980., 100.с., 1 схема

[GK05], [GK06] ir [GD58] apakškopas.

Kataloga [GD58] sējumu saraksts latviešu alfabēta kārtībā:

Abrene, Auce, Bauska, Bernāti, Cēsis, Daugavpils, Gulbene, Jelgava, Krāslava, Krustpils, Kuldīga,
Liepāja, Limbaži, Mērsrags, Opočka, Rēzekne, Rīga, Sebeža, Talsi, Tukums, Ventspils, Viljandi,
Valdemārpils, Valka, Valmiera;

[GD21] (1921.g. - 1945.g.):

1. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. I daļa.- / P.Grāvis, E.Cīrulis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons,
J.Balodis,E.Adsons, D.Vanags, P.Pormals, V.Šlicis, A.Silamiķelis, J.Knohs.-
R.:Zemkopības ministrijas zemju departamenta Mērnecības daļa,1922.-87.lpp.
2. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. II daļa.- / P.Grāvis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, T.Adsons,
V.Dombrovskis, A.Meijs.-R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērnecības
daļa,1927.-246.lpp.
3. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. III daļa.- / P.Grāvis, Ž.Krūmiņš A.Jansons, T.Adsons,
V.Dombrovskis, A.Meijs, A.Berkolds.-R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta
Mērnecības daļa,1930.-127.lpp.
4. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. IV daļa.- / P.Grāvis, Ž.Krūmiņš, A.Jansons, T.Adsons,
V.Dombrovskis,
A.Meijs, A.Berkolds.-R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības departamenta Mērnecības daļa,1931.-
128.lpp.
5. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. V daļa.- R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības
departamenta Mērnecības daļa,1932.-100.lpp.
6. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VI daļa.-R.:Zemkopības ministrijas Zemkopības
departamenta Mērnecības daļa,1933.-168.lpp.
7. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VII daļa.-R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības
departamenta Mērnecības daļa,1936.-198.lpp.
8. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. VIII daļa.-R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības
departamenta Mērnecības daļa,1937.-206.lpp.
9. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. IX daļa.- R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības
departamenta Mērnecības daļa,1938.-186.lpp.

10. Latvijas Valsts trigonometriskais tīkls. X daļa.-R.:Zemkopības ministrijas Zemes ierīcības departamenta Mērniecības daļa,1939.-205.lpp.
11. Latvijas PSR Valsts trigonometriskais tīkls. XI daļa.-R.:ZTK Zemes ierīcības un meliorācijas pārvaldes Zemes ierīcības daļa,1941.-148.lpp.
12. Latvijas trigonometriskais tīkls. XII daļa. Koordinātu katalogs.-R.:Mērniecības daļa,1942.-155.lpp.

[ZL01], ..., [ZL11] ir [GD21] apakškopas.

Piezīmes:

1. Katalogi [GD94], [GD58], [GD21] ir RTU Ģeomātikas katedrā;
2. Katalogs [GD58] ir ierakstīts arī datormapē "Net_ntd";
3. Ieteicamā darba vieta un pieeja datorprogrammām101a.telpā;
4. Programmu "WTrans.exe" drīkst aizstāt ar programmu "BLH_XYZ.exe";
5. Programmu "'Gds_trf.exe" drīkst aizstāt ar programmu "Dkp";

Saīsinājumi:

ZL plakne

– Zoldnera koordinātu plakne ar fiksētu sākuma punktu:

ZL01 – Liepāja, vāc.bazn.tornis;		
ZL02 – Kuldīga, lat.bazn.tornis	1922.g.	56° 58' 15.87" 21° 58' 22.10 ";
ZL03 – Puči	1922.g.	56° 36' 42.677" 23° 13' 06.408";
ZL04 – Gaišiņkalns,	1922.g.	56° 52' 15.184" 25° 57' 34.720";
ZL05 – Vietuļnieki	1922.g.	56° 40' 08.84" 27° 15' 11.79" ;
ZL06 – Rīga, Pētera baz.bumba	1927.g.	56° 56' 53.919" 24° 06' 31.898";
ZL07 – Senks	1927.g.	57° 16' 35.191" 24° 51' 02.091";
ZL08 – Vardupe	1930.g.	56° 51' 32.961" 21° 52' 03.462";
ZL09 – Vītolnieki (Vietuļnieki)	1938.g.	56° 40' 08.447" 27° 15' 12.252";
ZL10 – Gaiziņkalns,	1938.g.	56° 52' 15.031" 25° 57' 34.920";
ZL11 – Rīga, Pētera bazn.centrs	1938.g.	56° 56' 53.935" 24° 06' 31.937";

Piezīmes:

1. Sākuma punkti sakārtoti atbilstoši kataloga [GD21] sējumiem;
2. ZL08, ZL06, ZL04, ZL05 koordinātas sk. arī J.Balodis Mērniecība I.- R.,1934., 418.lpp. ar norādi "Saskaņā ar mērniecības darbu tehniskās instrukcijas 15.pantu Latvijas valsts teritorija iedalīta četrās koordinātu joslās:
 - starp meridiāniem 20 50 un 23 00;
 - 23 00 un 25 00;
 - 25 00 un 26 30;
 - 26 30 un 28 18;

Šajās joslās par sākuma punktiem pieņemti Vardupe, Pētera baznīca Rīgā, Gaiziņkalns un Vietuļnieki (koordinātas attiecīgi sakrīt ar ZL08, ZL06, ZL04 un ZL05).

TM plakne

- Transversālā Merkatora koordinātu plakne;

UTM plakne

– Universālā Transversālā Merkatora koordinātu plakne;

GK plakne

– Gausa – Krīgera koordinātu plakne;

GK 1963.g.plakne

- Gausa – Krīgera 1963.g. speciālā koordinātu plakne;

XXX

– personas identifikators, piemēram, "Jan" (Jānis Bikše)