

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Būvmehānikas katedra

F. Bulavs, I. Radiņš

BŪVMEHĀNIKAS IEVADKURSS

RTU izdevniecība

Rīga, 2009

Šajā grāmatā apkopotais materiāls attiecas uz to būvmehānikas kursa daļu, kuru jāapgūst būvniecības specialitātes kā arī arhitektūras specialitātes un būvniecības koledžas studentiem, lai uzsāktu studijas statiski noteicamu un statiski nenoteicamu stieņu sistēmu mehānikā. Tas satur informāciju par būvmehānikas zinātnes pamatnostādņēm, par būvsistēmu stieņveida elementu mehāniku, kuri pakļauti pašsvara un ārējām iedarbībām un dod iespēju apgūt piepūli, spriegumu, deformāciju un nestspējas aprēķinu metodes darinājumiem no deformējamiem materiāliem.

Grāmatas apjoms atbilst būvniecības specialitātes apmācības programmas trim kredīta punktiem un var tikt izmantots kā teorētisko jēdzienu un to kopsakarību apgūšanai, tā arī praktiskai spriegumu, deformāciju un stiprību noteikšanai. Grāmatā paralēli teorētiskajam materiālam publicēti arī praktisku uzdevumu aprēķina piemēri.

Materiāls sagatavots un aprobēts Būvmehānikas katedrā un tiek rekomendēts būvniecības specialitāšu studentiem.

Iespiests saskaņā ar Būvmehānikas katedras 2009. gada 12. marta sēdes (protokols Nr. 02/09) lēmumu.

Recenzenti: profesors A. Čate,
 docents J. Auzukalns

SATURS

1. BŪVMEHĀNIKAS PAMATJĒDZIENI, PRINCIPI UN HIPOTĒZES	6
1.1. ĪEVADS.....	6
1.2. BŪVMEHĀNIKAS UZDEVUMU KLASIFIKĀCIJA	7
1.3. SLODZES	9
1.4. KONSTRUKCIJU BALSTI UN TO VEIDI	10
1.5. STIEŅU SISTĒMAS, TO ELEMENTI UN APRĒĶINU SHĒMAS	11
1.6. SPRIEGUMI	13
1.7. PĀRVIETOJUMI UN DEFORMĀCIJAS	15
1.8. JĒDZIENS PAR BŪVJU APRĒĶINU METODĒM.....	19
1.9. STIEŅU SISTĒMU MEHĀNISKĀ IZMANTOJAMĀS HIPOTĒZES.....	20
2. BALSTU REAKCIJU NOTEIKŠANA PLAKANĀS STIEŅU SISTĒMĀS.....	23
2.1. STATISKO SLODŽU VEIDI	23
2.2. BALSTU REAKCIJAS.....	24
2.3. PLAKANAS SPĒKU SISTĒMAS LĪDZSVARA NOSACĪJUMI	26
2.4. PLAKANAS STIEŅU SISTĒMAS LĪDZSVARA NOSACĪJUMI	27
2.5. BALSTU REAKCIJU NOTEIKŠANAS SECĪBA	28
3. ŠĶĒLUMU METODE STIEŅU SISTĒMU IEKŠĒJO PIEPŪĻU NOTEIKŠANAI....	39
3.1. ŠĶĒLUMU METODE TELPISKAI SISTĒMAI	39
3.2. VIENKĀRŠĀKIE DEFORMĀCIJU VEIDI.....	41
3.3. ŠĶĒLUMU METODE PLAKANAI SISTĒMAI	41
3.4. PIEPŪĻU NOTEIKŠANA PLAKANĀS KOPNĒS	44
3.4.1. <i>Vispārīgi jēdzieni</i>	44
3.4.2. <i>Kopņu klasifikācija</i>	45
3.4.3. <i>Kopņu analītiskais aprēķins</i>	46
3.4.4. <i>Piepūļu salīdzinājums dažāda veida kopnēm</i>	54
4. MATERIĀLU MEHĀNISKĀS ĪPAŠĪBAS.....	57
4.1. MAZOGLEKĻA TĒRAUDA STIEPES DIAGRAMMA UN TĀS RAKSTURĪGIE PUNKTI	57
4.2. PLASTISKUMA RAKSTUROTĀJI, UZKALDE	59
4.3. TRAUSTRU MATERIĀLU STIEPES DIAGRAMMA.....	62
4.4. PLASTISKU UN TRAUSTRU MATERIĀLU SPIEDES DIAGRAMMA. STIPRĪBAS RAKSTUROTĀJI..	62
4.5. PIEĻAUJAMIE SPRIEGUMI UN DROŠĪBAS KOEFICIENTI	65
5. STIEPE UN SPIEDE.....	68
5.1. IEKŠĒJO PIEPŪĻU UN PĀRVIETOJUMU NOTEIKŠANA	68
5.2. STIPRĪBAS APRĒĶINI STIEPĒ UN SPIEDĒ	71
5.3. SPRIEGUMI STIEŅA SLĪPOS ŠĶĒLUMOS.....	77
6. STIEŅA ŠĶĒRSGRIEZUMA LAUKUMA ĢEOMETRISKIE RAKSTUROTĀJI	80
6.1. PLAKANU FIGŪRU LAUKUMU SMAGUMA CENTRI UN STATISKIE MOMENTI.....	80
6.2. LAUKUMU INERCES MOMENTI.....	86
6.3. SAKARĪBAS STARP LAUKUMA INERCES MOMENTIEM SAVSTARPĒJI PARALĒLĀS ASĪS.....	87

6.4. VIENKĀRŠU PLAKANU FIGŪRU LAUKUMU INERCES MOMENTI	89
6.5. SAKARĪBAS STARP INERCES MOMENTIEM PIE ASU PAGRIEŠANAS	96
6.6. GALVENĀS ASIS UN GALVENIE INERCES MOMENTI	96
6.7. ŠĶĒLUMA INERCES RĀDIUSS.	101
6.8. SALIKTU LAUKUMU INERCES MOMENTU NOTEIKŠANA	101
6.9. GALVENO INERCES MOMENTU NOTEIKŠANAS KĀRTĪBA	102
6.10. PRETESTĪBAS MOMENTS	106
7. SPIESTU STIEŅU NOTURĪBA	111
7.1. EILERA FORMULA KRITISKĀ SPĒKA NOTEIKŠANAI.....	112
7.2. STIEŅA GALU IESTIPRINĀJUMA VEIDA IETEKME UZ KRITISKO SPĒKU.....	114
7.3. KRITISKO SPRIEGUMU NOTEIKŠANAS EMPĪRISKĀS FORMULAS	116
7.4. SPIESTU STIEŅU ŠĶĒRSIZMĒRU NOTEIKŠANA ĻODZĒ	119
8. LIECE	124
8.1. VIENLAIDUMA SIJAS UN TO BALSTI	124
8.2. IEKŠĒJO PIEPŪĻU NOTEIKŠANA LIECĒ	125
8.3. DIFERENCIĀLĀS SAKARĪBAS LIECĒ.....	128
8.4. PIEPŪĻU EPĪRAS VIENKĀRŠĀKAJIEM SIJU SLOGOJUMA GADĪJUMIEM	132
8.5. EPĪRU KONSTRUEŠANA RĀMJIEM	135
8.6. NORMĀLSPRIEGUMI LIEKTĀS SIJĀS	143
8.7. BĪDES SPRIEGUMU APRĒĶINS	147
8.8. STIPRĪBAS APRĒĶINI LIECĒ.....	151
8.9. SIJAS IZLIECES, SIJAS LIEKTĀS ASS DIFERENCIĀLVIENTĀDOJUMS.....	162
8.10. KOMPOZĪTU SIJU LIECE	167
8.11. REDUCĒTĀ ŠĶĒLUMA METODE	170
9. BĪDE	172
9.1. SPRIEGUMU STĀVOKLIS TĪRĀ BĪDĒ	172
9.2. PLĀNSIENIŅU CAURULES VĒRPE KĀ TĪRĀS BĪDES REALIZĀCIJA	173
9.3. APAĻA STIEŅA VĒRPES SPRIEGUMI UN DEFORMĀCIJAS.....	174
10. SALIKTIE SLOGOJUMI	179
10.1. GREIZĀ LIECE.....	179
10.2. EKSCENTRISKĀ SPIEDE.....	182
10.3. ŠĶĒLUMA KODOLS	186
11. STIPRĪBAS KRITĒRIJI	189
11.1. SPRIEGUMA UN DEFORMĀCIJU STĀVOKLIS PUNKTĀ	189
11.1.1. <i>Spriegumu zīmju likums</i>	190
11.1.2. <i>Spriegumi slīpos šķēlumos plakana spriegumstāvokļa gadījumā</i>	190
11.1.3. <i>Galvenie spriegumi</i>	191
11.1.4. <i>Telpiskais spriegumstāvoklis</i>	197
11.1.5. <i>Deformētais stāvoklis punktā</i>	198
11.1.6. <i>Potenciālā enerģija telpiskā spriegumstāvokļa gadījumā</i>	200
11.2. STIPRĪBAS TEORIJAS.....	201
11.2.1. <i>Maksimālo normālspriegumu (pirmā) stiprības teorija</i>	202
11.2.2. <i>Maksimālo relatīvo deformāciju (otrā stiprības) teorija</i>	202
11.2.3. <i>Maksimālo bīdes spriegumu (trešā stiprības) teorija</i>	203
11.2.4. <i>Enerģētiskā (ceturtā) stiprības teorija</i>	204

11.2.5. Mora stiprības teorija.....	205
11.2.6. Stiprības teoriju attīstība	206
12. ŠĻŪDE	208
12.1. BŪVMATERIĀLU ŠĻŪDE.....	208
12.2. LINEĀRĀ ŠĻŪDE	210
12.3. ŠĻŪDE MAINĪGU SLODŽU GADĪJUMĀ	211
12.4. SPRIEGUMU RELAKSĀCIJA.....	214
12.5. INTEGRĀLVIENTĀDOJUMU KODOLI	215
12.6. MATERIĀLA STRUKTŪRAS MODEĻI	217
12.7. NELINEĀRA ŠĻŪDE.....	219
12.8. MATERIĀLA ILGLAICĪGĀ STIPRĪBA	221
13. MATERIĀLA NOGURUMS	223
13.1. CIKLISKA SPRIEGUMA RAKSTURLIELUMI	223
13.2. MATERIĀLU NOGURUMA UN IZTURĪBAS ROBEŽAS EKSPERIMENTĀLA PĀRBAUDE.....	225
13.3. ROBEŽSPRIEGUMU DIAGRAMMA.	226
13.4. MATERIĀLA IZTURĪBU IESPAIDOJOŠIE FAKTORI	227
13.5. NOGURUMA STIPRĪBAS DIAGRAMMA.....	229
PIELIKUMI.....	231
NVS VALSTU TĒRAUDA PROFILU ĢEOMETRISKIE RAKSTUROTĀJI	231
ŠĶĒRSGRIEZUMA LAUKUMU ĢEOMETRISKIE RAKSTUROTĀJI.....	240
UZDEVUMU ATRISINĀJUMI UN ATBILDES	243
LITERATŪRA	248

1. BŪVMEHĀNIKAS PAMATJĒDZIENI, PRINCIPI UN HIPOTĒZES

1.1. Ievads

Būvmehānika ir praktiska mehānikas zinātnes daļa, kuras pētījumu objekti ir cieti deformējami ķermeņi un to sistēmas. Tās **uzdevums** ir prognozēt no šādiem objektiem veidotu būvkonstrukciju izturēšanos (deformēšanos un sabrukumu) ārējās slodzes, pašsvara, apkārtējās vides iedarbības un konstrukcijas materiāla īpašību izmaiņas rezultātā.

Kaut arī būvmehānika nepārprotami ir deformējamo ķermeņu mehānika, tā bieži izmanto arī uz **teorētiskās mehānikas** (materiāla punkta mehānikas, kuras pētījumu objekts ir absolūti ciets ķermenis) principiem balstītus rezultātus. Šādi plaši pielietojami rezultāti ir ķermeņu līdzsvara nosacījumi, kuri iegūti izmantojot pieņēmumu, ka ķermenis ir absolūti ciets (nosacījums, ka praktiski jebkurš ķermenis deformējas, netiek ņemts vērā). Attiecībā uz piepūli (spēku, momentu) līdzsvaru šāds pieņēmums praktiski nerada kļūdas, kuras būtu lielākas par aprēķinā pieļaujamām. Tādēļ arī praksē parasti lieto šos vienkāršotos, toties ērtos vienādojumus. Tomēr jāērēķinās ar to, ka virknē gadījumu bezgalīgi cieta ķermeņa modelis nav izmantojams. Tā, piemēram, lodzes gadījumā jāērēķinās ar reālu ķermeņa deformēto stāvokli un attiecīgie līdzsvara vienādojumi jāastāda tieši šādam stāvoklim.

Pie teorētiskās mehānikas atziņām jāpieskaita secinājums, ka cietam ķermenim ir tikai sešas neatkarīgas kustības brīvības – trīs pārvietojumi telpisku koordinātu asu virzienos un trīs pagriezieni ap šīm asīm. Kustība rodas tikai tajā gadījumā, ja ir pielikti spēki vai momenti un līdz ar to miera stāvoklis ir speciāls kustības gadījums, kad visu spēku projekciju summas un visu spēku radīto momentu summas pret trim perpendikulārām asīm ir vienādas ar nulli.

Mehānikas daļu, kura pēta konstruktīvu elementu izturēšanos mehānisku iedarbību rezultātā, sauc par **materiālu pretestību** un šajā aspektā tā ir būvmehānikas sastāvdaļa, jo risina mehānikas uzdevumus atsevišķam būvkonstrukcijas elementam, piem., stienim.

No prakses zinām, ka būvju struktūra ir daudz sarežģītāka un tā var sastāvēt no tādiem elementiem kā stienis (sija), plātne, čaula un trīsdimensionāls masīvs ķermenis. Klasiskā būvmehānika aprobežojas ar noteikta tipa konstrukciju pētījumiem. Tās ir stieņu sistēmas. Turpmāk izklāstītais attiecas tieši uz šī veida konstrukcijām.

Būvmehānikas kā zinātnes nozares attīstība virzās divos principiālos virzienos:

- skaitlisko metožu pilnveidošana un ESM pielietošana;
- aprēķina shēmu un izejas hipotēžu pilnveidošana.

Būvmehānikas ietvaros tiek precizēti materiālu deformēšanās un sabrukuma modeļi, slodzes nosacījumi, pieļaujamo slodžu lielumi, to iespējamās novirzes no uzdotajiem lielumiem, tiek izstrādātas optimizācijas metodes. Arvien ciešāka kļūst būvmehānikas saikne ar tādām praktiskās būvniecības nozarēm kā projektēšana, izgatavošanas tehnoloģija, kā arī ar pielietojamo un skaitļošanas matemātiku, fiziku un konstrukciju ekonomiku.

Būvmehānikas vai, precīzāk, būvju aprēķinu teorijas uzdevums ir nodrošināt konstruk-

torus ar aprēķinu metodēm un izejas datiem **drošu** un **ekonomisku** būvju projektēšanai. Par drošām uzskatām nesošās konstrukcijas, kuras nav bīstamas ekspluatācijā. Tas sasniedzams pareizi izvēloties konstrukcijās pielietojamos materiālus un tās elementu izmērus. Šādam uzdevumam nav viennozīmīga atrisinājuma. Konstrukcijas drošumu var sasniegt dažādos atšķirīgos veidos. Tādēļ aktuāla ir racionālu konstrukciju izveides problēma. Jēdziens racionāls būvniecībā lielā mērā saistīts ar jēdzienu ekonomisks. Stimulēt būvkonstrukciju ekonomiskumu ir jaunu būvtehnoloģiju izstrādāšanas un ieviešanas uzdevums.

Veicot būvju aprēķinus, plaši tiek lietotas principiāli atšķirīgas divu veidu kategorijas: iedarbe un pretestība.

Iedarbes uz konstrukciju veido slodze (pašsvars un iekārtas), vēja spiediens, dinamiskā slodze no kustīgiem priekšmetiem, grunts sēšanās, temperatūras izmaiņa, materiāla rukums. Būvkonstrukcijas **pretestību** nodrošina izturīga, nekustīga sistēma, kura spējīga pretoties visām šāda veida iedarbēm.

Tātad būvmehānikai vajadzētu sastāvēt no divām daļām:

1) iedarbju noteikšanas un 2) būvju pretestības nodrošināšanas šīm iedarbēm. Diemžēl pirmā daļa nav guvusi tādu attīstības pakāpi, lai to varētu atspoguļot mācību grāmatās. Praktiskajā darbībā inženieri parasti rīkojas ar tuvinātiem normatīviem datiem, ko nosaka dokumenti par slodzēm un iedarbēm. Toties būvju pretestības aprēķiniem un analīzei veltītie darbi veido plašu tehniskās literatūras klāstu ar tendenci nepārtraukti papildināties, pilnveidojoties jaunu koncepciju apguves virzienā.

1.2. Būvmehānikas uzdevumu klasifikācija

Jebkurā inženierdarinājumā (kā kustīgā, tā nekustīgā) tiek izmantoti nesoši konstrukciju elementi, kuri veido tā saucamo „spēka karkasu” un uzņem konstrukcijai pieliktās slodzes un iedarbes. Konstrukcijas un to nesošos elementus jāprojektē tā, lai tie būtu pietiekami izturīgi, t.i., lai tie būtu spējīgi uzņemt visas iespējamās slodzes un iedarbes pietiekami ilgā laika periodā. Tātad konstrukcijai jābūt stiprai un ilgizturīgai. Šo prasību nodrošināšanai jāveic atbilstoši aprēķini, uz kuru rezultāta pamata tiek veikta ilgizturīgas būves projektēšana.

Pirmā veida būvmehānikas uzdevumus veido **konstrukciju stiprības aprēķini**. Te svarīgi ņemt vērā, ka ar stiprības zudumu tiek apzīmēts plašāks jēdziens par vārda burtsisko nozīmi – lūzums, sabrukums. Šis jēdziens ietver sevī arī plastisko (paliekošo deformāciju) veidošanos, kuras nezūd pat atslogojot konstrukciju. Runājot par pietiekami stipru konstrukciju, uzskatām, ka stiprība ir nodrošināta ne tikai konkrētām slodžu vērtībām, bet arī to daļēji paaugstinātām vērtībām. Tas nozīmē, ka konstrukcijai ir zināma stiprības rezerve.

Prakse rāda, ka daudzos gadījumos pietiekami stipras konstrukcijas tomēr nav piemērotas ekspluatācijai to atsevišķo posmu pārmērīgi lielas deformējamības dēļ. Tādas situācijas iespējamās vērtņu pārsegumos to lielo laidumu dēļ. Šādos gadījumos sakām, ka konstrukcija nav pietiekami stinga. Ar jēdzienu stingums saprotam konstrukcijas elementa spēju pretoties tā deformēšanai.

Otrā veida būvmehānikas uzdevumus veido **konstrukciju stinguma aprēķini**.

Šais konstrukciju aprēķinos jānosaka tādi konkrēto konstrukcijas elementu ģeometriskie izmēri, kuri nodrošina to, lai plānotajām slodzēm atbilstošie pārvietojumi nepārsniegtu pieļaujamos. Nepietiekami stingās konstrukcijās var rasties svārstības, kuras apgrūtina vai arī dara neiespējamu to ekspluatāciju.

Trešais nesošo konstrukciju nestspējas zuduma cēlonis ir spiestu, nepietiekami stingu stieņu izlīdzināšanās. Relatīvi gari un tievi stieņi pie noteikta spiedes spēka P_{kr} var pēkšņi izliekties, tādā veidā zaudējot savu sākotnējo taisno formu. Šai gadījumā sakām, ka stienis zaudējis noturību. Šādā situācijā stienis paralēli spiedes spēka iedarbībai tiek pakļauts tā saucamajai gareniecei. Pie šāda kvalitatīvi atšķirīga spiesta stieņa deformēšanās rakstura, konstrukcija zaudē spēju uzņemt slodzi – tā vai nu sabrūk vai arī tajā attīstās nepieļaujami lieli pārvietojumi (izlieces). Līdz ar to varam secināt, ka, projektējot nesošas konstrukcijas, nepieciešams veikt aprēķinus, lai garantētu konstrukcijas elementu sākotnējās līdzsvara formas (piemēram, taisnas) noturību.

Rezumējot iepriekš izklāstīto, varam secināt, ka **būvmehānikas pamatuzdevumi ir konstrukciju stiprības, stinguma un noturības aprēķini.**

Ņemot vērā būvkonstrukciju specifiku un būvniecības praksē pielietojamo būvmateriālu mehānisko īpašību daudzveidību, būvmehānikas uzdevumi bieži vien tiek grupēti atbilstoši kādai pētījumu priekšplānā izvirzītai īpatnībai.

Bieži vien praktiskos aprēķinus iedala **vienasīgos, plakanos un telpiskos** uzdevumos.

Parasti pēdējos cenšas sadalīt plakajos. Galvenās būvmehānikas metodes un teorēmas izklāstītas plakānu sistēmu gadījumiem. To vispārinājums uz telpiskām sistēmām parasti nerada principiālas grūtības, bet šo vispārinājumu gadījumā veidojas visai sarežģīti vienādojumi un formulas.

Par principiālu uzskatāms iedalījums **lineārā un nelineārā** būvmehānikā. Nelinearitāte var būt fizikāla un ģeometriskā. Ģeometriskā nelinearitāte rodas lielu pārvietojumu un deformāciju gadījumos. Tas praksē sastopams reti. Fizikālā nelinearitāte saistīta ar nelineāru atbilstību starp slodzi un tās izraisītajiem pārvietojumiem pie dažādiem slodzes līmeņiem. Fizikālā nelinearitāte lielākā vai mazākā mērā ir raksturīga visām konstrukcijām. Protams, bieži ar zināmu precizitātes pielaidi pie maziem spriegumiem nelineārās sakarības var aizstāt ar lineārām, tādā veidā vienkāršojot aprēķinus un neradot būtiskas rezultātu neprecizitātes..

Būvmehānikas aprēķinu praksē izšķir **statiskus** uzdevumus, kuros laiks kā parametrs netiek ņemts vērā, un **dinamiskus**, kuros tiek ņemtas vērā konstrukcijas inerces īpašības un tiek operēts ar fizikālo lielumu laika atvasinājumiem. Laika faktors ir neatņemama sastāvdaļa arī uzdevumos, kuri attiecas uz materiāliem ar viskozām īpašībām.

Rezumējot var apgalvot, ka pastāv nekustīgu sistēmu būvmehānika un kustīgu sistēmu būvmehānika, kurā ietilpst būvju dinamika un šļūdes teorija.

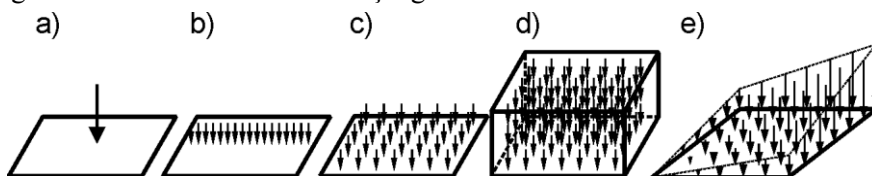
Arvien intensīvāk tiek pētītas sistēmas ar gadījuma rakstura parametriem. Tie ir lielumi, kuru vērtība ir pareiza tikai ar zināmu varbūtību. Piemēram, maksimālā sniega slodze noteiktā laika periodā ir varbūtīgs lielums, jo nevaram būt pārliecināti, ka šai laika periodā netiks pārsniegta iepriekš uzdotā vērtība.

Būvmehāniku var sadalīt arī nodaļās pēc **konstrukciju veidiem**, t.i. stieņu konstrukcijas (kopnes, rāmji, sijas, loki), plātnes un to sistēmas, čaulas, vanšu sistēmas, elastīgi un neelastīgi pamati, membrānas, lokanas saites, u.t.t.

Klasiskais būvmehānikas kurss attiecas uz stieņu konstrukcijām tajās pielietoto materiālu lineārās deformēšanās robežās.

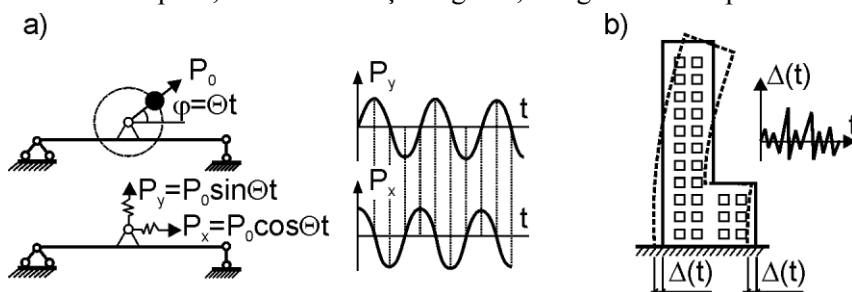
1.3. Slodzes

Ekspluatācijas apstākļos būves bieži vien uzņem dažāda rakstura slodzes. Tās var būt nemainīgas vai laikā mainīgas, koncentrētas vai izkliedētas, statiskas vai dinamiskas. Atšķirīgās slodzes būvē izraisa arī atšķirīgas iedarbes.



att. 1.1

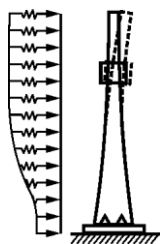
Pastāvīgās slodzes veido būves un tās atsevišķu daļu pašsvars, kā arī tādas slodzes, kas laikā nemaina savu atrašanās vietu un lielumu. Tā, piemēram, būves kopņveida pārsegumi un to seguma smaguma spēks veido pastāvīgo slodzi, bet tilta kopnēs šādu slodzi veido kopnes, braucamās daļas seguma, margu un sliežu pašsvars.



att. 1.2

Laikā mainīgu slodzi veido cilvēku, kustīgu iekārtu, preču pašsvars, kā arī vēja un sniega slodzes. Dzelzceļa tiltu gadījumā mainīgā slodze ir vilciena pašsvars, vājš, bremsēšanas spēks. Laikā mainīgu slodzi rada uz konstrukcijas elementa izvietots dziņņs (att. 1.2a). Izteikti laikā mainīgs raksturs ir zemestrīces izraisītām iedarbībām (att. 1.2b).

Pastāvīgo slodzi parasti sauc arī par nekustīgu slodzi, bet vilciena svars, tā bremsēšanas spēks ir laikā mainīgas slodzes.



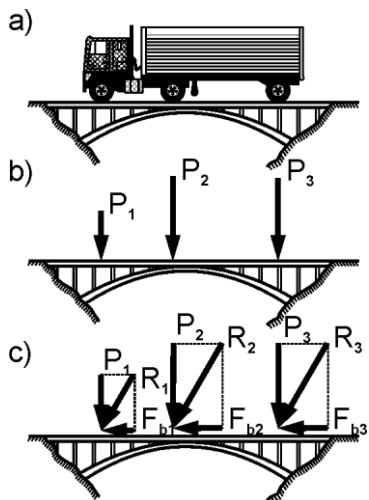
att. 1.3

Izkliedētā slodze (att. 1.1b,c,d,e) darbojas uz kādu būves laukuma vai garuma vienību pastāvīgi un var būt vienmērīgi vai arī nevienmērīgi izkliedēta. To mēra N/m^2 vai N/m .

Vienmērīgi vai arī nevienmērīgi izkliedētas slodzes piemērs ir telpā sapulcējušos cilvēku izraisīta slodze uz starpstāvu pārseguma paneļiem. Sāniskais vēja spiediens (att. 1.3) uz konstrukcijas sienu arī rada nevienmērīgi izkliedētu slodzi.

Koncentrētā slodze ir atsevišķi spēki (tos mēra ņūtonos), kuri pielikti konkrētos būves punktos. Šādas slodzes ir vilciena riteņu izraisītais spiediens

uz sliedēm vai autofurgona riteņu spiediens un to bremzēšanas spēki (att. 1.4c). Patiešībā arī šīs slodzes tiek pieliktas zināmam atbalsta laukumam, tomēr tā lielums parasti ir relatīvi neliels un var uzskatīt, ka šāda slodze koncentrēta vienā punktā, piemēram, attiecīgā laukuma smaguma centrā (att. 1.1a).

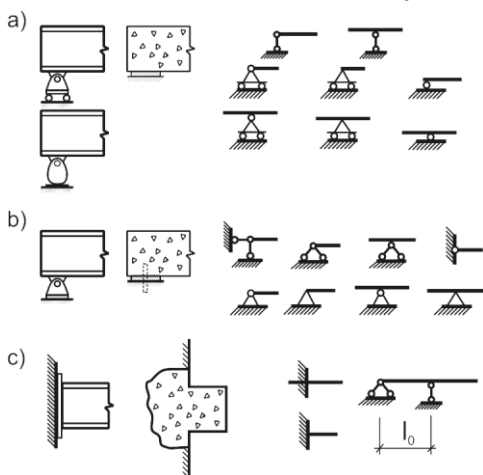


att. 1.4

Mehānikas uzdevumu risinājumos ļoti svarīgi novērtēt slodzes izmaiņas ātrumu. Praktiski visas slodzes to pielikšanas brīdī mainās no nulles līdz savai galīgajai vērtībai un efekts būs visai atšķirīgs vai slodze (vēlāk saukta nemainīgā) tiek pielikta lēni vai strauji mainot tās lielumu (galējais stāvoklis - tā tiek uzņemta). Pirmā veida slodzes sauc par statiskām, bet otrās par dinamiskām. Viennozīmīgas robežas starp šiem jēdzieniem nav. Par kritēriju šādi slodžu rakstura sadalīšanai tiek izmantots nosacījums par to, vai slodzes izmaiņas rezultātā radušies inerces spēki (tādi rodas kustīgās sistēmās) ir vērtā ņemami, vai arī to iedarbība ir nebūtiska un tie konstrukcijā papildus efektus neizraisa. Dinamisku slodžu piemēri ir vēja brāzmas, viļņu triecieni, vibrējoši agregāti uz atsevišķiem būves elementiem.

1.4. Konstrukciju balsti un to veidi

Par balstiem sauc konstruktīvus veidojumus, kuri savieno būvi ar nekustīgiem pamatiem un pilnīgi vai daļēji ierobežo tās kustību. Būves un balstu saskares vietā rodas balstu reakcijas. Attiecībā pret būvi balstu reakcijas ir pasīvi ārējie spēki, kuri nevar mainīt būves stāvokli. Balstu reakcijas ir vektoriāli lielumi un tos raksturo pielikšanas



att. 1.5

punkts, reakcijas virziens un lielums. Reakciju lielums ir atkarīgs no ārējās slodzes, t.i. ārējiem aktīvajiem spēkiem, bet pielikšanas punkts un reakcijas virziens atkarīgi no balstu izvietojuma un veida.

Plakanās sistēmās izmanto trīs veidu balstus.

Pirmā veida balsts attēlots att. 1.5a. Metāla konstrukcijās tas parasti tiek realizēts kā bultveida savienojums starp divām savstarpēji balansējošām daļām. Savienojuma apakšējā daļa pa atbalsta plakni var pārvietoties virzes kustībā, kuru realizē veltņu sistēma. Betona vai koka konstrukciju balstus veido ar konstrukciju nesavienots paliktņi.

Šī veida balstiem ir divas brīvības pakāpes. Balsts neierobežo būves horizontālo pārvietojumu un pagrieziena ap cilindriskā veltņa centru, bet ierobežo vertikālo pārvieto-

jumu. Ierobežotā pārvietojuma virzienā balstā rodas spēks - balsta reakcija perpendikulāri atbalsta plaknei. Šāda veida balstu sauc par **kustīgu locīklu**. Būvju shēmās kustīgo locīklu attēlo stieņa, kura galos ir locīklas (att. 1.5a) vai uz veltniem novietota trīsstūra veidā.

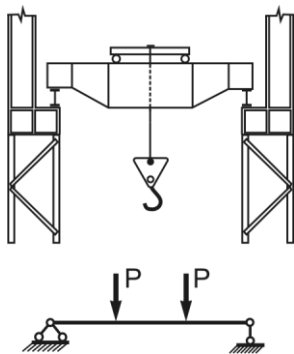
Otrā veida balsts (att. 1.5b) konstruktīvi atšķiras no pirmā veida ar to, ka tam nav virzes kustību nodrošinošo gultņu, bet betona gadījumā konstrukcijas virzes kustību ierobežo tapas veida elements. Līdz ar to šī veida balstam ir tikai viena brīvības pakāpe, t.i. pagrieziens ap veltna asi vai nekustīgā savienojuma punktu. Šādu balstu sauc par **nekustīgu locīklu**. Reakcija šādā balstā ir spēks, kurš iet caur locīklas centru, bet tā virziens var būt patvaļīgs. Parasti šo reakciju sadala divās komponentēs – vertikālajā un horizontālajā. Līdz ar to varam secināt, ka nekustīgajā locīklā veidojas divas neatkarīgas balstu reakcijas. Shematiski šādu balstu veidu attēlo ar diviem stieņiem, kuru galos ir ideālas locīklas. Viena no locīklām ir kopēja abiem stieņiem. Stieņu orientāciju var izvēlēties patvaļīgi. Biežāk izmantojamās locīklu shēmas parādītas att. 1.5b.

Trešā veida balsts ir iespīlējums, t.i., **nekustīgs balsts**. Šāda balsta reakciju nosaka trīs parametri, piem., spēka vērtība, kurš iet caur balstu, tā virziens un momenta vērtība balstā. Sadalot spēku komponentēs par trijām neatkarīgām reakcijām varam pieņemt horizontālo, vertikālo reakciju un momentu balstā. Shematiski iespīlējumu var attēlot att. 1.5c parādītos veidos. Otrā gadījumā, lai varētu iespīlējumu uzskatīt par absolūti stingru, attālumam ℓ_0 vajag būt ļoti mazam, vai stienim ar garumu ℓ_0 jābūt bezgalīgi stingram.

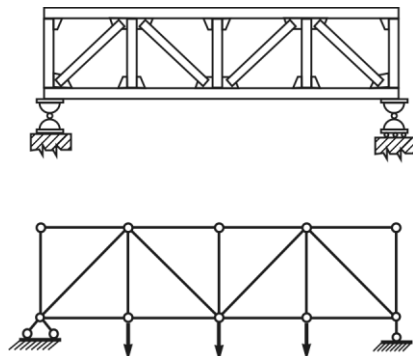
Praksē sastopamas arī iepriekš minēto balstu modifikācijas. Tādi, piemēram, ir balsti, kuri pieļauj mezgla horizontālu pārvietošanos, bet izslēdz tā pagriešanos. Virknē gadījumu reālo balstu īpatnība ir atsevišķu to saišu padevība. Tādā gadījumā šais saitēs ir iespējami pārvietojumi, kuru lielums ir atkarīgs no piepūles vērtības attiecīgās saites virzienā. Balsta padevīgumu raksturo ar tā padevīguma koeficientu.

1.5. Stieņu sistēmas, to elementi un aprēķinu shēmas

Jēbkuras konstrukcijas aprēķins sākas ar aprēķina shēmas izvēli. Tiek ieviesta virkne tuvinājumu attiecībā uz slodžu iedarbību, balstu veidiem, elementiem, no kuriem sastāv konstrukcija un to savienojumiem, u.t.t.



att. 1.6

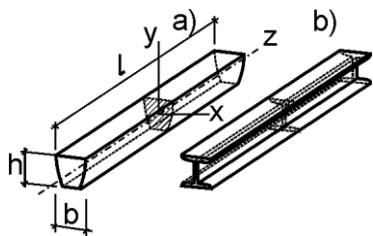


att. 1.7

Šiem vienkāršojumiem jābūt tādiem, lai aprēķina shēma ņemtu vērā būtiskākos fakto-

rus, kas iespaido konstrukcijas darbu un atņemtu mazāk būtiskos. Piemēram, tilta krāna nesošo konstrukciju ar zināmu precizitāti var aprēķināt kā brīvi balstītu siju (att. 1.6). Veicot kopnes aprēķinu, stingrie mezgli tiek aizstāti ar locīklām un tiek pieņemts, ka visa slodze ir pielikta mezglos (att. 1.7). Iegūtā kopnes aprēķina shēma ir statiski noteicama, atšķirībā no reālās konstrukcijas.

Noslogotā stāvoklī vienai un tai pašai konstrukcijai var tikt piemērotas vairākas aprēķinu shēmas. Katrai no tām parasti atbilst cita aprēķinu precizitāte. Bieži konstrukcijas shēmu sauc par sistēmu. Aprēķinu shēma vai sistēma sastāv no nosacītiem elementiem: stieņiem, plātnēm, saitēm un nosacīti attēlotas slodzes vai citām iedarbēm.



att. 1.8

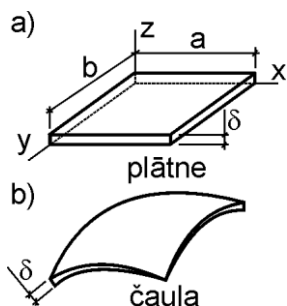
Par **stieni** (att. 1.8) būvmehānikā tiek uzskatīts ciets ķermenis, kura divi izmēri (biezums un platums) ir būtiski mazāki par trešo izmēru (garumu). Stieņi var būt taisni un izliekti, ar nemainīgu vai mainīgu šķēsgriezumu. Stieņu pamatzudzums ir uzņemts ass spēkus (stiepes vai spiedes), kā arī lieces un vērpes momentus. Stieņu speciāli gadījumi ir lokanas auklas, kuras uzņem tikai ass stiepi, neradot pretestību spidei un liecei. Ar atsevišķa stieņa izturēšanās ana-

līzi slogotā stāvoklī nodarbojas tā mehānikas nodaļa, kuru sauc par materiālu pretestību. Tieši no stieņiem sastāv lielākās būvkonstrukciju daļas aprēķina shēmas: kopnes, loki, rāmji, telpiskās tīklveida konstrukcijas, u.c.

Stieņus veidojošais materiāls bieži vien tiek stiepts vai spiests stieņa ass virzienā. Vērtos stieņos realizējas materiāla bīde, bet liektu stieņu materiāls pakļauts saliktam sloģojuma veidam – vienlaicīgai stiepei, spidei un bīdei.

Stieņa fizikāli – mehāniskā modeļa īpatnība ir tā, ka galvenie aprēķinu vienādojumi tiek sastādīti attiecībā pret vienu neatkarīgo mainīgo – koordināti stieņa ass virzienā z. To risināšana veido viendimensionālus uzdevumus.

Šīs grāmatas ietvaros tiek lietota tāda koordinātu asu orientācija, ka z ass ir vērsta stieņa ass virzienā, bet x un y asis atrodas stieņa šķēsgriezuma plaknē. Stieņu ģeometriju raksturo trīs tipiski parametri – stieņa garums l, stieņa platums b un stieņa augstums h.



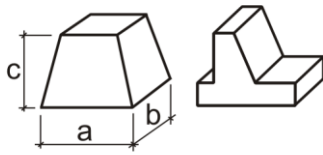
att. 1.9

Būvniecībā vērojama tendence palielināt to konstrukciju nozīmi, kurās būtiska loma ir **plātnēm** (att. 1.9). Plātnes ir ķermeņi, kuru viens izmērs (biezums δ) būtiski mazāks par diviem pārējiem. Izliektas plātnes sauc par **čaulām**. Plātnes piepūles uzņem divos virzienos un tas daudzos gadījumos ir ļoti izdevīgi un ļauj taupīt būvmateriālus. Plātņu un čaulu materiāls atrodas daudz sarežģītākos sloģojuma apstākļos kā stieņu gadījumā. Tā, piemēram, plātnes gadījumā materiāls vienlaicīgi tiek slogots divos savstarpēji perpendikulāros virzienos. Plātņu un čaulu aprēķini veido divdimesionālus uzdevumus. Plātņu un no tām sastāvošu sistēmu

aprēķini ir ievērojami sarežģītāki kā stieņu sistēmu aprēķini.

Analogi **masīvu ķermeņu** (visi trīs izmēri ar vienu kārtu) mehānikā izmanto trīsdimesionālus vienādojumus. Būvju pamati, krastu nostiprinājumi, nelīdzenu virsmu

atbalsta sienīgas veido trīsdimensionālus darinājumus ar vērā ņemamiem gabarītiem visos trijos savstarpēji perpendikulāros virzienos (att. 1.10).



masīvs ķermenis

att. 1.10

Izklāstāmā kursa ietvaros aprobežosimies ar stieņu sistēmu īpašību izpēti un to deformativitātes un stiprības noteikšanu statistiska slogojuma gadījumos.

Atkarībā no stieņu lomas konstrukcijā un to deformēšanās veida, tiem tiek piekārtoti specifiski nosaukumi. Stieņus, kuri tiek liekti sauc par **sijām**. Vertikāli orientētus stieņus kopnēs sauc par **statiem**, bet slīpus stieņus par **atgāžņiem**. Konstrukciju, kuru veido savā starpā

savienoti liekti stieņi, sauc par **rāmi**.

1.6. Spriegumi

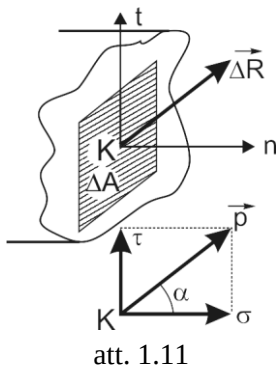
Starp nenoslogota cieta ķermeņa daļiņām darbojas spēki, kuri nodrošina ķermeņa formas nemainību. Jebkurā ķermeņa šķēlumā šie elementārie spēki ir savstarpēji līdzsvaroti un summā dod nulli. Ķermenim ārēji pieliktās slodzes rezultātā starp ķermeņa daļiņām notiek to attālumu izmaiņa, t.i. ķermenis deformējas.

Būvmehānikā tiek lietots jēdziens iekšējās piepūles, ar ko saprotam atsevišķo ķermeņu daļu savstarpējās iedarbības spēkus un momentus, kuri rodas ārējā slogojuma rezultātā.

Iekšējās piepūles materiālā no vienas ķermeņa daļas uz citu tiek nodotas caur šīs daļas atdalošo virsmu. Iekšējās piepūles šķēlumā sadalās nepārtraukti pa visu šķēlumu, pie kam šis sadalījums var būt kā vienmērīgs, tā arī nevienmērīgs.

Uz katru mazu šķēluma laukumiņu, iekšējās piepūles raksturojas ar iekšējo spēku intensitātes vektora moduļa vērtību un virzienu.

Lai noteiktu iekšējo spēku intensitātes mēru deformētā ķermenī, izdarām ķermeņa šķēlumu ar patvaļīgu plakni, kuras orientāciju nosaka tās normāles **n** virziens telpā. Šķēluma plaknē patvaļīga punkta K apkārtņē izvēlamies laukumiņu ΔA (att. 1.11). Visu iekšējo spēku, kuri darbojas uz šo laukumiņu, kopspēku apzīmējam ar vektoru $\overrightarrow{\Delta R}$. Dalot vektora $\overrightarrow{\Delta R}$ moduli ar konkrētu laukumiņa ΔA vērtību, nosakām iekšējo spēku vidējo intensitāti uz šo laukumiņu:



att. 1.11

$$\overrightarrow{p_{vid}} = \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta A}.$$

Vektoram $\overrightarrow{p_{vid}}$ ir kopspēka vektora $\overrightarrow{\Delta R}$ virziens, bet atšķirīgs modulis. Lai raksturotu iekšējās piepūles tieši punktā K, nosakām robežu, uz kuru tiecas vidējā intensitāte, savēlot laukumiņu ΔA ap punktu K. Tā rezultātā iegūstam vektoru

$$\overrightarrow{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \overrightarrow{p_{vid}} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta A},$$

kura virziens sakrīt ar vidējās intensitātes vektora $\overrightarrow{p_{vid}}$ virzienu.

Iekšējo spēku intensitātes vektoru punktā $\vec{p}$ sauc par **spriegumu**.

Pēc sava rakstura spriegums $\vec{p}$ ir virsmas spēks uz ķermeņa daļas atdalošās virsmas. Tādēļ arī spriegumu tāpat kā spēku intensitātes mērvienības ir spēka un virsmas laukuma mērvienību dalījums. Sprieguma mērvienība ir Pa (paskāls) = N/m²; bet tā var būt arī kG/cm² vai kG/mm², u.c.

Jāatceras, ka

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{0,102kG}{10^4 cm^2} = 1,02 \cdot 10^{-5} \frac{kG}{cm^2} \approx 10^{-5} \frac{kG}{cm^2} \quad \text{vai} \quad 1Pa = 10^{-7} \frac{kG}{mm^2}.$$

Praksē parasti lieto mērvienības lielākas par Pa: kilopaskālus $1KPa = 10^3 Pa$, megapaskālus $1MPa = 10^6 Pa$, gigapaskālus $1GPa = 10^9 Pa$.

Tā kā vispārīgā gadījumā pilnais spriegums $\vec{p}$ parasti nav perpendikulārs pret šķēlumu patvaļīgā virsmas punktā, tad šo spriegumu plakana spriegumu stāvokļa gadījumā var sadalīt divās komponentēs:

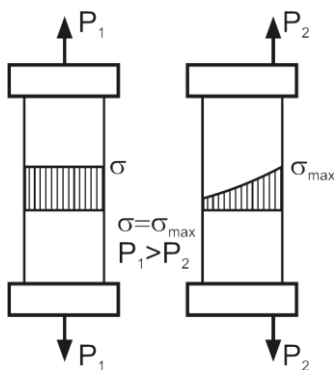
1. komponente, kura ir perpendikulāra šķēluma virsmai. Šī komponente vērsta plaknes normāles virzienā. Tās moduli apzīmē ar σ un sauc par **normālo spriegumu**;
2. komponente, kura darbojas pieskares plaknē. Tās moduli apzīmē ar τ un to sauc par **bīdes spriegumu**.

Šo komponentu modulūkus (skaitliskās vērtības) nosaka sakarības (att. 1.11)

$$\sigma = p \cos \alpha, \quad \tau = p \sin \alpha.$$

Tātad pastāv sakarība $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Telpiska spriegumu stāvokļa gadījumā pilnais spriegums $\vec{p}$ var tikt sadalīts sešās neatkarīgās komponentēs. Pilnā sprieguma komponentes arī ir vektori un turpmākajā izklāstā tās ievērosim nelietojot speciālu vektora apzīmējumu.



att. 1.12

Sprieguma jēdziens ir fundamentāls visai deformējamo ķermeņu mehānikai.

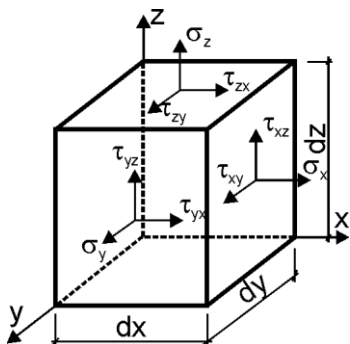
Spriegums ir to iekšējo spēku mērs, kuri rodas konstrukcijas materiālā, ja šo konstrukciju deformē ārējie spēki. Spriegumu, kuru sasniedzot notiek materiāla sabrukšana, sauc par **stiprības robežu**. To katram konkrētam materiālam nosaka eksperimentāli.

Lai novērstu būvkonstrukciju sagrūšanu, pieļaujami tikai tādi spriegumi, kuru lielums ir daļa no bīstamā sprieguma, t.i., stiprības robežas. Šādu spriegumu sauc par **pieļaujamo**, kura lielumam jābūt tādā, lai konstrukcijas elementi neiegūtu paliekošas deformācijas.

Veicot att. 1.12 parādītu eksperimentu (centriski un nesimetriski slogotas plāksnītes stiepi) var konstatēt, ka pirmajā gadījumā plāksnīte iztur lielāku stiepes spēku P_1 , kā otrajā gadījumā P_2 . Tas izskaidrojams ar otrā slogojuma gadījumā nevienmērīgu sprie-

gumu sadalījumu plātnītes šķēlumos. Šis piemērs rāda, ka, lai prognozētu slodzi, pie kuras pārtrūks plāksnīte, ir jāzina spriegumu sadalījums tās šķēlumos.

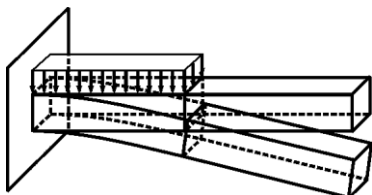
Lai raksturotu telpisku spriegumstāvokli punkta K apkārtnē, izveidojam bezgala mazu šo punktu aptverošu paralelepipedu ar malu garumiem dx , dy un dz . Pilnos spriegumus pret katru no paralelepipeda plaknēm p_x , p_y un p_z sadalām komponentēs. Uz katru skaldni darbojas viens normālspriegums un divi bīdes spriegumi (att. 1.13). Tātad uz trim savstarpēji perpendikulārām skaldnēm veidojas 9 spriegumu komponentes, kuras apvienojot vienā matricā, iegūstam spriegumu tenzoru



att. 1.13

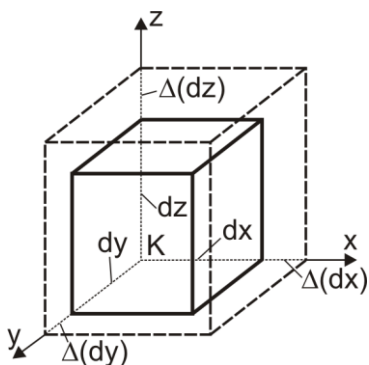
$$T_{spr} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Varam ievērot, ka bīdes spriegumiem pirmais indekss norāda plakni (tās normāli), kurā darbojas spriegums, bet otrais tā virzienu. Jāatzīmē, ka bīdes spriegumi ar savstarpēji samainītiem indeksiem ir vienādi $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ un neatkarīgas spriegumu komponentes ir sešas.



att. 1.14

Jāņem vērā, ka ne vienmēr punkta pārvietojums saistīts ar materiāla deformēšanos. Tā, piemēram, konsolsijas (att. 1.14) brīvā gala vertikālais pārvietojums nav saistīts ar materiāla deformācijām šai stieņa daļā, bet gan ar šķēlumu pagriešanos materiāla deformāciju dēļ (sijas izliekšanās slogotajā daļā) citā sijas posmā. Materiāla deformēšanās kvantitatīvais mērs patvaļīgā punktā ir relatīvā deformācija, kuru nosaka bezgala maza izmēra nogriežņa pagarinājuma (saīsinājuma) attiecība pret šī nogriežņa sākotnējo garumu. Aptverot izvēlēto materiāla punktu K ar bezgala maza izmēra paralelepipedu (tā malu garumi dx , dy , dz), slodzes iedarbības rezultātā tā izmēri izmainās par lielumiem $\Delta(dx)$, $\Delta(dy)$ un $\Delta(dz)$ (att. 1.15). Attiecības



att. 1.15

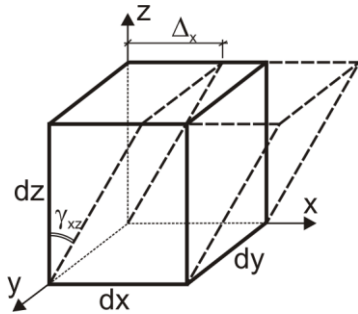
1.7. Pārvietojumi un deformācijas

No pieliktās slodzes ķermenis deformējas, t.i., izmainās tā sākotnējie izmēri un forma. Jebkurš ķermeņa punkts K ar koordinātēm (x, y, z) deformēšanās rezultātā ieņem citu stāvokli K_1 ar koordinātēm $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

nosaka relatīvās lineārās materiāla deformācijas punktā. Šo deformāciju lielums ir atkarīgs no tās izraisošo faktoru (slodzes, temperatūras, u.c.) lieluma, tomēr reāliem būvmateriāliem to kārtā ir 10^{-3} .

Sākotnēji uzdota tilpuma, piemēram, paralelepēda formas maiņu raksturo leņķiskās deformācijas (bīdes leņķi), t.i. leņķi, par kuriem izmainās sākotnēji taisnie leņķi. Šāda leņķu izmaiņa iespējama trijās savstarpēji perpendikulārās plaknēs un tos attiecīgi apzīmē ar γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} . Indeksi norāda, kurā plaknē notikusi formas maiņa.



att. 1.16

Tā, piemēram, att. 1.16 parādīts bīdes leņķis γ_{xz} . To nosaka pārvietojuma Δ_x attiecība pret malas garumu dz, jo

$$\frac{\Delta_x}{dz} = \operatorname{tg} \gamma_{xz} \approx \gamma_{xz}.$$

Nosacījums $\operatorname{tg} \gamma_{xz} \approx \gamma_{xz}$ ir spēkā gadījumos, ja γ_{xz} ir mazs lielums. Tā kārtā līdzīgi lineāro deformāciju kārtai ir 10^{-3} vai pat 10^{-4} .

Tātad pilnu deformāciju raksturojumu materiāla punktā nosaka sešas neatkarīgas deformāciju komponentes, kuras izvietojot matricu veidā, iegūstam deformāciju tenzoru (bīdes deformācijas dalītas ar 2, lai saglabātu deformāciju tenzora analogiju ar spriegumu tenzoru):

$$T_{def} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Būvkonstrukciju deformatīvās īpašības būtiski atkarīgas no izmantoto būvmateriālu deformatīvajām īpašībām, t.i. to deformēšanās likuma (ar jēdzienu deformēšanās likums sapratīsim sakarību starp pielikto slodzi un tās izraisīto pārvietojumu).

Angļu fiziķis Roberts Huks jau 1676. gadā pamatojoties uz rezultātiem, kas gūti veicot eksperimentālus pētījumus ar metāla stiepli un pulksteņu atsperēm, izdarīja lakonisku secinājumu – „kāds ir pagarinājums, tāds ir spēks” (Ut tensio sic vis). Kaut arī šim apgalvojumam bija vairāk atziņas nekā praktiskā vērtība, jo vēl nepastāvēja jēdzieni spriegums un deformācija, tomēr tika likti materiālu deformāciju teorijas pirmie pamati.

Huka izvērzīto apgalvojumu par pārvietojumu un spēku kopsakarību izsaka formula

$$\Delta l = k \cdot P,$$

kur

Δl - stieņa ar garumu l absolūtais pagarinājums, kuru mēra garuma mērvienībās, t.i.: m, cm, vai mm;

P – slodze, kuru mēra spēka mērvienībās, t.i. N, kG u.c. (jāatceras, ka $1\text{N} \approx 0,102\text{ kG}$). Bieži vien slodzes mērvienību palielina lietojot apzīmējumus

1kN= 10³N, 1MN=10⁶N, 1GN=10⁹N, u.c.;

k – proporcionalitātes koeficients.

Eksperimentāli konstatētas arī šādas sakarības:

- pagarinājums ir tieši proporcionāls sākuma garumam l ;
- pagarinājums ir apgriezti proporcionāls šķērsriezuma laukumam A .

Uz šī pamata iepriekšējā sakarība uzrakstāma sekojošā veidā:

$$\Delta l = \alpha \frac{Pl}{A},$$

kur α - koeficients.

Ja $P = 1$, $l = 1$, $A = 1$, tad $\Delta l = \alpha$.

Jungs (1807.g.) sāka koeficienta α vietā lietot tā apgriezto lielumu $E=1/\alpha$ un tādēļ tas bieži vien tiek saukts par **Junga** (vai **elastības**) **moduli**. Tādā gadījumā slogota ķermeņa lineāro pagarinājumu (vai saīsinājumu) nosaka sakarība:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA}, \quad \text{vai arī} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{A}. \quad (1.1)$$

Pēdējā sakarība satur divus relatīvus lielumus – pagarinājuma attiecību pret sākotnējo garumu, kas ir *relatīvā deformācija*, un slodzes attiecību pret laukumu (slodzi uz laukuma vienību), kas nosaka *spriegumu*. Tātad sakarībai (1.1) atbilst izteiksmes

$$\sigma = E\varepsilon, \text{ vai } \varepsilon = \sigma/E.$$

Šādā formā visbiežāk tiek lietots lineāri deformējamu ķermeņu deformēšanās likums (**Huka likums**). Saskaņā ar šo pierakstu, varam noskaidrot elastības moduļa dimensiju. Tā ir Pa (N/m²), tāda pati kā sprieguma dimensija, jo relatīvā deformācija ir bezdimensionāls lielums.

Stieni stiepjot, tas stiepes virzienā (garenvirzienā) pagarinās, bet šķērsvirzienā sašaurinās. Tātad rodas šķērsdeformācijas. Šķērsdeformāciju attiecība ar mīnus zīmi pret gardeformāciju ir materiālam raksturīgs parametrs. Tā skaitlisko vērtību katram materiālam atsevišķi nosaka eksperimentāli un sauc par **Puasona koeficientu** (μ). Šī koeficienta vērtība var mainīties intervālā no 0 līdz 0,5. Vērtība $\mu = 0$ attiecas uz materiālu, kurš slogots kādā no virzieniem deformējas vienīgi šajā virzienā un nedeformējas šķērsvirzienos. Praktiski tāds materiāls ir korķis. Otrās galējības piemērs ir kaučuks, kuram $\mu = 0,47$.

Elastības modulis E un Puasona koeficients μ pilnībā raksturo elastīga izotropā materiāla deformatīvās īpašības. Šo koeficientu vērtības dažādiem materiāliem apkopotas tab. 1.

Tabulā doti elastības moduļu diapazoni vairākām kompozīto materiālu grupām. Jāņem vērā, ka šie materiāli ir tipiski anizotropu materiālu piemēri, jo parasti to mehāniskās īpašības dažādos virzienos ir būtiski atšķirīgas. Pie tam jāņem vērā, ka kompozīto materiālu mehāniskās īpašības ir būtiski atkarīgas kā no materiāla struktūras (to iekšējās ģeometrijas), tā arī no materiālu veidojošo komponentu mehāniskajām un kvantitatīvajām īpašībām. Pie augsti anizotropiem materiāliem pieskaitāmi bora un oglekļa šķiedru kompozīti. To deformatīvās īpašības šķiedru un tām perpendikulārajos virzienos var

atšķirties pat 100 reizes. Šāda situācija arī nodrošina vienu no kompozīto materiālu svarīgākajām īpašībām – iespēju veidot materiālu ar konkrētajos ekspluatācijas apstākļos racionālu struktūru un līdz ar to optimālām mehāniskajām īpašībām. Lielā mērā šīs īpašības var mainīt mainot šķiedru izvietojuma virzienu dažādos materiāla slāņos.

Tabula 1

Materiālu deformatīvās konstantes

Materiāls	Elastības modulis, E		Puasona koeficients, μ
	GPa	10^6 kG/cm^2	
Dimants	1000	10	
Bors	441	4,42	
Tērauds	185 – 216	1,9 – 2,2	0,24 – 0,33
Oglekļaplasti	70 – 200	0,7 – 2	0,05 – 0,4
Bora/epoksīda kompozīti	80 – 160	0,8 – 1,6	
Kvarca stikls	94	0,95	
Sodas stikls	69	0,7	0,25
Granīts	62	0,62	
Čuguns	78 – 147	0,8 – 1,6	0,23 – 0,27
Alumīnijs	69 – 71	0,7 – 0,72	0,32 – 0,36
Koks - šķiedru virzienā	8,8 – 15,4	0,09 – 0,16	
šķērsām šķiedrām	0,4 – 1,0	0,004 – 0,01	
Ķieģeļu mūris	2,45 – 2,95	0,025 – 0,03	
Betons, cements	30 - 50	0,3 – 0,5	0,08 – 0,18
Vienvirziena (stikla/epoksīda) kompozīti:			
šķiedru virzienā	35 – 45	0,35 – 0,46	0,32 – 0,36
šķiedrām transversālā virzienā	10 – 13	0,1 – 0,13	0,1 – 0,14
Stiklaplasts (daudzvirzienu)	7 – 45	0,07 – 0,46	0,08 – 0,35
Poliēsteri	1,8 – 3,5	0,19 – 0,036	
Neilons	2 – 4	0,02 – 0,04	
Epoksīdi	2,6 – 3	0,026 – 0,03	
Polipropilēns	0,9	0,009	
Polietilēni:			
augsta blīvuma	0,7	0,007	
zema blīvuma	0,2	0,002	
Gumijas	0,01 – 0,1	0,0001 – 0,001	
Putuplasti	0,001 – 0,01	$10^{-5} - 10^{-4}$	

Var pierādīt, ka slogotam stienim deformēšanās rezultātā tilpums mainās atbilstoši sakarībai:

$$V_1 = V_0 [1 + \varepsilon(1 - 2\mu)],$$

kur V_1 – materiāla tilpums pēc deformēšanās;

V_0 – sākotnējais tilpums;

ε - garendeformācija.

Tilpuma relatīvo pieaugumu raksturo sakarība

$$K = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon(1 - 2\mu).$$

Novērojumi rāda, ka izotropa materiāla gadījumā stiepta stieņa tilpums nesamazinās. Tātad K nevar būt negatīvs. Tas nozīmē, ka $1 - 2\mu \geq 0$ un tātad $\mu \leq 0,5$. Spiestu stieņu tilpums, līdzīgi kā tas ir šķidrumiem, samazinās. Šī novērojuma rezultātā nonākam pie secinājuma, kurš analogs stiepes gadījumam, t.i. $\mu \leq 0,5$.

1.8. Jēdziens par būvju aprēķinu metodēm

Būvju aprēķini vispārīgā gadījumā tiek veikti to stiprības, stinguma un noturības noteikšanai.

Būvju aprēķinu metodes var sadalīt trīs tipos:

1. būvju aprēķinu metodes pēc pieļaujamiem spriegumiem;
2. aprēķinu metodes pēc pieļaujamām (graužošām) slodzēm;
3. aprēķinu metodes pēc robežstāvokļa.

Vecākā no metodēm ir aprēķinu metode pēc pieļaujamiem spriegumiem. Pēc šīs metodes konstrukcijas stiprība un noturība tiek novērtēta salīdzinot maksimālās spriegumu vērtības kādā no konstrukcijas elementu šķēlumiem ar attiecīgo pieļaujamā spriegumu vērtībām. Pieļaujamais spriegums (spēks uz laukuma vienību) ir daļa no sprieguma, kurš tiek atzīts par bīstamu attiecībā uz materiāla stiprību vai elementa noturību. Analītiski šo aprēķina metodi var reducēt uz sakarību

$$\sigma \leq [\sigma] = \frac{\sigma_B}{k},$$

kur σ – maksimālais spriegums konstrukcijā;

$[\sigma]$ – pieļaujamais spriegums;

σ_B – bīstamais spriegums attiecībā uz stiprību (vai noturību);

k – drošības koeficients.

Drošības koeficients garantē materiāla stiprības rezervi, kura nepieciešama iespējamās slodzes pieauguma, stiprības īpašību novirzes bīstamajā virzienā, aprēķina neprecizitātes (sakarā ar izejas pieņēmumiem), būves izgatavošanas neprecizitātes, u.c. dēļ.

Dzelzsbetona, betona un akmens konstrukciju aprēķiniem ir izstrādāta aprēķinu metode pēc pieļaujamās slodzes. Pēc savas struktūras šī metode analoga iepriekšējai, tikai sprieguma vietā tiek novērtēta slodze. Pieļaujamā slodze sastāda daļu no slodzes, kura uz konkrētu apsvērumu pamata tiek atzīta par bīstamu. Bīstamā slodze tiek attiecināta uz materiāla stiprību aiz linearitātes robežas vai arī tā ir kritiskā slodze, kura izraisa noturības zudumu.

Abu minēto metožu trūkums ir tas, ka tajās tiek izmantots viens un tas pats drošības koeficients visiem būves slogojumu veidiem. Diemžēl ir slodzes, kuru ticamības robežas un pieauguma iespējas ir atšķirīgas. Tas būtu jāievērtē drošības aprēķinā šādām slodzēm.

Šo nepilnību novērš aprēķinu metode pēc robežstāvokļa. Būves robežstāvoklis ir tāds stāvoklis pie kura būve zaudē pretestību ārējām iedarbēm vai arī nonāk stāvoklī, kurš nav pieļaujams tās tālākai ekspluatācijai.

Robežstāvokļi iedalāmi divās grupās:

- pirmā grupa - nestspējas zudums;
- otrā grupa - izsmeltas normālas ekspluatācijas iespējas.

Pie pirmās grupas robežstāvokļa pieder: vispārējs formas noturības zudums; lokāls noturības zudums; trausls, viskozs, noguruma vai cita veida sabrukums; savstarpējas piepūļu un nelabvēlīgas apkārtējās vides iedarbes izraisīts sabrukums; kvalitatīva konfigurācijas izmaiņa; rezonanses svārstības; stāvokļi, kuros nepieciešams pārtraukt būves ekspluatāciju materiāla tecēšanas vai šļūdes, savienojumu nobīdes vai būtiskas plaisu atvēršanās dēļ.

Pie robežstāvokļa otrās grupas pieskaitāmi stāvokļi, kuros ir apgrūtināta būves vai tās pamatu normāla ekspluatācija sakarā ar nepieļaujami lieliem pārvietojumiem (izlieces, balstu sēšanās), svārstībām, plaisām, u.c.

Aprēķinam pēc robežstāvokļa jāgarantē būve pret jebkura robežstāvokļa iestāšanos. Būvei vispirms jāapmierina nosacījumi, ko dod aprēķini pēc pirmā robežstāvokļa, bet pēc tam (atkarībā no būves tipa) pēc otrā. Tā, piemēram, pārsegumi, kuru liela izliece bojās apmetumu vai cita veida apdari, jāpārbauda uz otro robežstāvokli.

1.9. Stieņu sistēmu mehānikā izmantojamās hipotēzes

Būvkonstrukciju elementi tiek izgatavoti no visai dažādiem materiāliem – metāliem, betona, koka, polimēriem, u.c. To struktūra un fizikālās īpašības ir izteikti atšķirīgas. Tādēļ materiālu mehānikā pieņemts ieviest nosacītu materiālu ar vienotām idealizētām deformatīvām īpašībām.

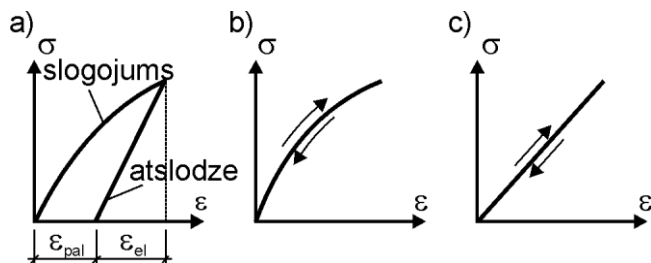
Deformācijas, kuras atslogošanas gadījumā pilnībā izzūd (tātad tās ir atgriezeniskas), sauksim par **elastīgām**, bet ķermeņa īpašību pēc atslodzes ieņem savu sākotnējo formu par **elastību**.

To deformāciju daļu, kura pēc konstrukcijas atslogošanas saglabājas, sauksim par **paliekošo** vai **plastisko deformāciju**, bet attiecīgo īpašību par **plasticitāti**.

Konkrētam nostiprinājuma gadījumam, zinot ķermeņa deformācijas visos tā punktos, var noteikt visu ķermeņa punktu pārvietojumus, t.i. uzzināt to stāvokli (jaunās koordinātes) pēc deformēšanās. Lai konstrukcijas ekspluatācija noritētu normāli, nepieciešams, lai deformācijas būtu elastīgas, bet pārvietojumi nepārsniegtu pieļaujamās vērtības. Šie nosacījumi, izteikti tādā vai citādā vienādojumu formā, tiek saukti par **stingrības nosacījumiem**. Dažos gadījumos (konstrukcijām no dzelzsbetona, plastikiem un metāla pie augstām temperatūrām) pieļaujamās arī nelielas plastiskās deformācijas.

Vispārīgā gadījumā spriegumu – deformāciju līknei slogošanas un atslodzes gaitā ir 1.17a att. parādītais raksturs. Šāda likumsakarība tipiska elastīgi plastiskiem materiāliem, kuriem slodzes izraisītā deformācija sastāv no divām principiāli atšķirīgām daļām: **elastīgās** un **plastiskās** daļas. Elastīgā deformācijas daļa atslodžot materiālu izzūd, bet plastiskā daļa saglabājas un to varam uzskatīt par paliekošu deformāciju. Veicot atkārtotus slogojumus, paliekošā deformācija pieaug. Otrā elastīgi plastiska materi-

āla spriegumu deformāciju līknes īpatnība ir tās nelineārais raksturs. Gadījumos, kad palielošās deformācijas ir visai mazas, varam tās neņemt vērā. Materiālus, kuriem slo-



att. 1.17

gojuma rezultātā rodas tikai elastīgās deformācijas, sauc par ideāli elastīgiem materiāliem. Ja materiāla slogojuma diagrammai ir nelineārs (att. 1.17b) raksturs, tad šādu materiālu sauc par nelineāri elastīgu, bet lineāras slogojuma diagrammas gadījumā (att.

1.17.c) par lineāri elastīgu.

Konstrukciju elementu aprēķinu sarežģītība liek izmantot virkni pieņēmumu (t.i. izejas hipotēžu), lai šos aprēķinus padarītu vienkāršākus un iegūtos rezultātus pārskatāmākus. Šādi pieņēmumi attiecas kā uz materiāla īpašībām, tā arī uz slodzēm un to mijiedarbību.

Eksperimentālie pētījumi pierāda šādu pieņēmumu pamatotību nosakot konstrukciju elementu stiprību, deformativitāti un noturību. Pieņēmumu izraisītās kļūdas var uzskatīt par nebūtiskām, jo tās nepārsniedz praktisko rezultātu dabiskās izkliedes robežas. Būvmehānikas uzdevumu aprēķinos tiek izmantoti sekojoši pieņēmumi:

1. pieņēmums. Materiāla uzbūve ir nepārtraukta.

Saskaņā ar šo pieņēmumu tiek izslēgta vielas diskrētā struktūra. No praktiskā viedokļa šāds pieņēmums ir pilnībā pamatots, jo būvmateriālu struktūra ir tik sīkgraudaina, ka to var uzskatīt par nepārtrauktu vidi. Pat tādiem materiāliem kā koks, betons un akmens, aprēķini dod praktiski pareizus rezultātus. Tas saprotams, ja ņemam vērā, ka detaļu izmēri daudzārt pārsniedz izmantoto materiālu struktūrelementu izmērus. Balstoties uz šo pieņēmumu, turpmākajos aprēķinos varēsim rīkoties ar nepārtrauktām funkcijām.

2. pieņēmums. Konstrukcijas elementā materiāls ir viendabīgs.

Tas nozīmē, ka jebkurā materiāla punktā ir vienādas īpašības. Metāliem ir izteikti viendabīga struktūra. Mazāk viendabīgi ir kokmateriāli, betons, akmens un armētu plastmasu izstrādājumi. Tā, piemēram, betona struktūru veido cements, smalki akmeņi, grants, šķembas. Katrai no šīm frakcijām ir savas atšķirīgas mehāniskās īpašības. Koksnes iekšējai struktūrai ir orientēts raksturs ar stipri atšķirīgām īpašībām šķiedru un tām perpendikulāros virzienos. Uzskatāmi neviendabības rādītāji ir zari, kuru mehāniskās īpašības būtiski atšķiras no pārējās koksnes. Zaru skaits uz garuma vienību ir svarīgs koksnes kvalitātes rādītājs. Konstrukтивām plastmasām parasti ir stipri izteikta diskrēta struktūra ar vienā, divos vai vairākos virzienos orientētām šķiedrām. Tomēr izrādās, ka aprēķini, kuri veikti izmantojot viendabības nosacījumu, visos šajos gadījumos dod apmierinošus rezultātus.

3. pieņēmums. Konstrukciju elementu materiāls ir izotropš (tā īpašības visos virzienos ir vienādas).

Pētījumi rāda, ka kristāliem, no kuriem sastāv daudzi materiāli, īpašības dažādos virzienos ir atšķirīgas. Tā, piemēram, vara kristālu stiprība dažādos virzienos atšķiras vairāk kā 3 reizes. Tomēr materiāliem ar smalkgraudainu struktūru liela patvaļīgi orientētu

kristālu skaita dēļ, īpašības izlīdzinās, tā sakot “iegūst vidējo vērtību” un šos materiālus var uzskatīt par izotropiem.

Tādiem materiāliem kā koks, dzelzsbetons, plastiki, šis pieņēmums izpildās daļēji. Materiālus, kuru mehāniskās īpašības dažādos virzienos ir dažādas, sauc par *anizotropiem*.

4. pieņēmums. *Ķermenī pirms slodzes pielikšanas nav iekšējo (sākotnējo) piepūļu.*

Slogota ķermeņa izmēru un formas maiņai pretojas šī ķermeņa daļu savstarpējās iedarbes spēki, kurus sauc par elastīgiem spēkiem. Turpmāk, lietojot jēdzienu iekšējās piepūles sapratīsim tieši šos elastīgos spēkus un to izraisītos momentus, neņemot vērā molekulāros spēkus, kuri eksistē arī neslogotā ķermenī. Šis pieņēmums pilnībā neizpildās nevienam materiālam. Metāla izstrādājumos eksistē iekšējie spēki, kuri radušies nevienmērīgas atdzišanas rezultātā, kokmateriāliem – nevienmērīgas žūšanas dēļ, betonā cietēšanas procesā. Šo spēku lielums konstruktoram parasti nav zināms. Gadījumos, kad ir iemesls domāt, ka šie spēki ir lieli, tos mēģina noteikt eksperimentāli.

Jāatzīst, ka jautājums par sākuma spriegumiem konstrukcijās un to elementos pagaidām izpētīts visai nepilnīgi.

5. pieņēmums. *Spēku darbības neatkarības princips - spēku sistēmas iedarbes rezultāts ir vienāds ar atsevišķu patvaļīgā kārtībā secīgi pieliktu spēku iedarbju rezultātu summu.*

Ar iedarbes rezultātu jāsaprot deformācijas, iekšējie spēki, atsevišķu punktu pārvietojumi. Spēku darbības neatkarības princips plaši tiek lietots teorētiskajā mehānikā, attiecinot to uz absolūti cietiem ķermeņiem. Deformējamiem ķermeņiem (un tādi praktiski ir visi reāli ķermeņi) šo pieņēmumu var lietot, ja izpildās nosacījumi:

- spēku pielikšanas punktu pārvietojumi ir mazi salīdzinot ar ķermeņa izmēriem;
- pārvietojumi, kuri rodas ķermeņa deformēšanās rezultātā, ir lineāri atkarīgi no pieliktiem spēkiem. Šādus ķermeņus sauc par lineāri deformējamiem vai ķermeņiem, kuriem izpildās Huka likums.

Praktiski visās būvkonstrukcijās abi šie nosacījumi izpildās un līdz ar to pamatoti tiek lietots spēku darbības neatkarības princips.

6. pieņēmums vai Sen-Venāna princips. *Ķermeņa punktus, kuri ir pietiekami tālu no spēku pielikšanas vietām, iekšējās piepūles praktiski nav atkarīgas no spēku pielikšanas veida.*

Šis princips ļauj vienu spēku sistēmu aizstāt ar citu statiski ekvivalentu sistēmu. Šāds paņēmieni daudzos gadījumos vienkāršo aprēķinus. Tā, piemēram, veicot sliedes aprēķinu kā daudzos balstos (gulšņos) balstītu stieni, faktiski slodzi no riteņa, kura darbojas uz saskares laukumu pēc noteikta, visai sarežģīta likuma, var aizstāt ar koncentrētu spēku.

Par citiem pieņēmumiem un hipotēzēm tiks norādīts to konkrētās izmantošanas vietās.

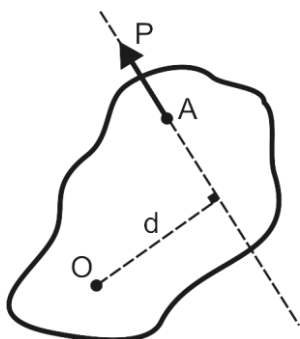
2. BALSTU REAKCIJU NOTEIKŠANA PLAKANĀS STIEŅU SISTĒMĀS

Ārējās slodzes iedarbībā sistēmas balstos rodas balstu reakcijas. Atkarībā no balstu veidiem šīs reakcijas ir spēki vai momenti. Balstu reakcijas kopā ar ārējo slodzi veido sistēmas slodžu shēmu un praktiski visos aprēķinos balstu reakciju noteikšana ir neatņemama sistēmas elementu iekšējo piepūļu noteikšanas sastāvdaļa.

2.1. Statisko slodžu veidi

Izmantosim sekojoša veida ārējās slodzes:

1. Koncentrēts spēks. *Spēks ir materiālu ķermeņu mehāniskās mijiedarbības kvantitatīvais mērs.* Spēks ir vektoriāls lielums. To raksturo: skaitliskā vērtība jeb **modulis**, **virziens** un **pielikšanas punkts**.



att. 2.1

Spēka mērvienība SI mērvienību sistēmā ir N (ņūtons), $1\text{ kN}=10^3\text{ N}$, $1\text{ MN}=10^6\text{ N}$, u.t.t., bet tehniskajā mērvienību sistēmā kG (kilograms), $1\text{ kG}=9,81\text{ N}$.

Taisni, kuras virzienā darbojas spēks sauc par **spēka darbības līniju**. Vairāku spēku kopu, kuri pielikti kādam ķermenim, sauc par spēku sistēmu. Spēka spēju izsaukt ķermeņa griešanos ap kādu punktu (vai asi) raksturo spēka moments.

Par **spēka P momentu** pret centru O sauc lielumu, ko iegūst, ņemot ar atbilstošu zīmi spēka moduļa un pleca reizinājumu

$$M = Pd.$$

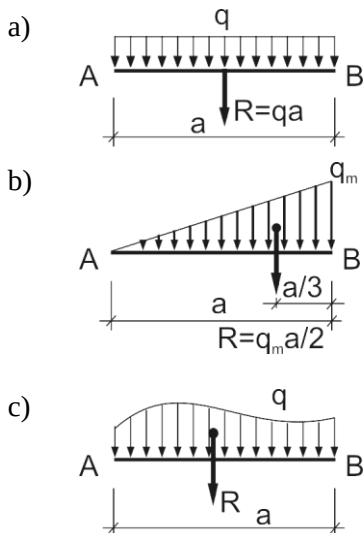
Plecs ir minimālais attālums no spēka darbības līnijas līdz punktam pret kuru tiek rēķināts moments. Attēlā 2.1 spēka plecs pret punktu O ir nogrieznis d. Spēka momenta mērvienība ir N·m, kN·m, u.t.t.

Spēka momenta īpašības:

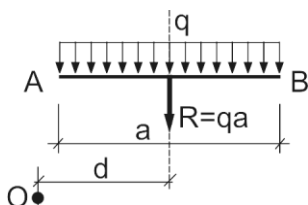
- a) spēka moments nemainās pārnēsot spēka pielikšanas punktu pa tā darbības līniju;
- b) spēka moments ir vienāds ar nulli tikai tad, ja spēks ir vienāds ar nulli vai spēka darbības līnija iet caur centru O (plecs ir vienāds ar nulli).

2. Izklīdēta slodze. Inženieraprēķinos bieži nākas lietot slodzes, kuras sadalītas pa konstrukciju norobežojošām virsmām – sniega slodze, vēja slodze, grunts spiediens uz pamatiem. Šādas slodzes sauc par izklīdētām. Pārnēsot šīs plaknē izklīdētās slodzes uz stieņveida konstrukciju elementiem, t.i. stieņiem, iegūstam pa garumu izklīdētās slodzes. Šādu izklīdētu slodzi raksturo ar tās intensitāti q – spēka lielumu uz konstrukcijas elementa garuma vienību. Izklīdētās slodzes intensitātes mērvienība ir N/m, kN/m, u.t.t.

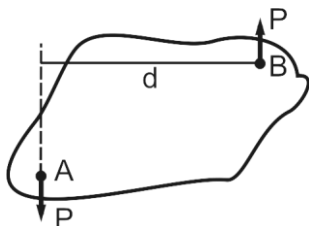
Izklīdētās slodzes sadalījums pa stieņa garumu var būt dažāds:



att. 2.2.



moments. Vienmērīgi izkļiedētās slodzes gadījumā $M = qa \cdot d$.



att. 2.3

vienmērīgi izkļiedēta slodze (att. 2.2a)- izkļiedētās slodzes intensitāte ir konstanta. Šajā gadījumā risinot statikas uzdevumus vienmērīgi izkļiedētu slodzi aizstāj ar kopspēku $R=qa$, kas pielikts posma AB vidū;

lineāri mainīga izkļiedēta slodze (att. 2.2b).

Kopspēks, ko rada šāda slodze ir pielikts trīsstūrveida slodzes laukuma smaguma centrā attālumā $a/3$ no posma labā gala un vienāds ar šīs trīsstūrveida slodzes epīras laukumu $R=q_m a/2$, kur q_m ir izkļiedētās slodzes intensitātes maksimālā vērtība;

patvaļīgi mainīga izkļiedēta slodze (att. 2.2c).

Kopspēks, ko rada šāda veida slodze ir pielikts slodzes epīras laukuma smaguma centrā un skaitliski vienāds ar šī laukuma skaitlisko vērtību:

$$R = \int_0^a q(z) dz.$$

Izkļiedētās slodzes spēju izsaukt ķermeņa griešanos ap kādu punktu (vai asi) raksturo kopspēka R moments:

$$M = Rd,$$

kur d ir plecs – minimālais attālums no kopspēka R darbības līnijas līdz punktam pret kuru tiek rēķināts

3. Spēkpāris. Par spēkpāri (koncentrētu momentu) sauc divus pretēji vērstus, paralēlus, pēc moduļa vienādus spēkus, kas darbojas uz ķermeni. Spēkpāra darbību raksturo spēkpāra moments. Par spēkpāra momentu sauc lielumu, ko nosaka spēkpāra viena spēka reizinājumu ar spēkpāra plecu d (att. 2.3):

$$M = Pd.$$

Spēkpāra mērvienība ir $N \cdot m$, $KN \cdot m$, u.t.t.

2.2. Balstu reakcijas.

Ar citiem ķermeņiem nesaistītu ķermeni, kuram ir iespējami jebkuri pārvietojumi telpā sauc par **brīvu ķermeni**.

Ķermeņus, kuru pārvietojumus telpā ierobežo kādi citi ķermeņi, sauc par **saistītiem ķermeņiem**, bet tos ķermeņus, kuri ierobežo apskatāmā ķermeņa kustību, sauc par **sai-tēm** jeb **balstiem**.

Spēku, ar kuru balsts iedarbojas uz ķermeni, ierobežojot tā pārvietojumu noteiktā vir-

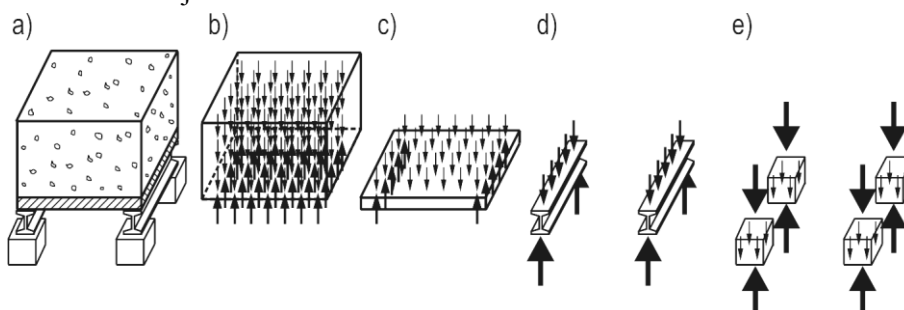
zienā, sauc par **balsta reakcijas spēku** vai vienkārši par **balsta reakciju**.

Nosakot balstu reakcijas ir lietderīgi pareizi izvēlēties to virzienu. Šeit var līdzēt **balstu aksioma**:

Balsta reakcija vienmēr vērsta pretēji virzienam, kādā ārējās slodzes cenšas pārvietot slogoto ķermeni.

Balstu reakciju lielumi ir atkarīgi no ārējo spēku izvietoējuma, darbības virziena un skaitliskās vērtības, balstu veida (att. 1.5). Balstu reakciju noteikšana ir viens no svarīgākajiem statikas uzdevumiem.

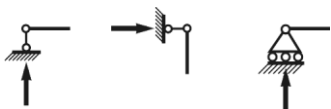
Attēlā 2.4 shematiski parādīts, kā pa tilpumu izvietota slodze (pašsvars) reducējas uz četrām balstu reakcijām.



att. 2.4

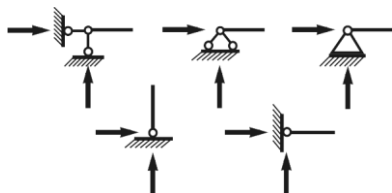
Jāatzīmē, ka vispārīgā gadījumā par balstu attiecībā pret betona kuba iedarbību var tikt uzskatīta plātne (balsta reakcija būs izkliedēta pa plātnes virsmu), attiecībā pret plātnes iedarbību par balstiem varam pieņemt dubult-T profilus (balsta reakcija izkliedēta pa garumu), u.t.t., bet nodaļā 1.4 tika parādīts, ka būvkonstrukciju aprēķinos balstus parasti var uzskatīt par kādu no sekojošiem balstu veidiem:

1) kustīgs locīklas balsts;



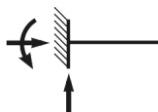
Kustīgā locīklas balstā balsta reakcija var rasties tikai izveidotās saites virzienā.

2) nekustīgs locīklas balsts;



Nekustīgā locīklas balstā balsta reakcija vispārīgā gadījumā var rasties patvaļīgā virzienā, bet šo reakciju vienmēr varam sadalīt divās komponentēs – visbiežāk vertikālajā un horizontālajā.

3) iespīlējums.



Iespīlējumā bez patvaļīga virziena reakcijas, kuru sadalām vertikālajā un horizontālajā komponentē, rodas arī moments.

2.3. Plakanas spēku sistēmas līdzsvara nosacījumi

Par plakānu sauc sistēmu, kuras elementu asis un tai pieliktie spēki atrodas vienā plaknē.

Lai plakana spēku sistēma būtu līdzsvarā nepieciešami un pietiekami, lai sistēmai pielikto spēku kopspēks R (**galvenais vektors**) un sistēmas galvenais moments M_O (visu momentu summa pret patvaļīgu punktu plaknē) būtu vienādi ar nulli, kur O ir jebkurš punkts sistēmas plaknē.

Kopspēka komponentes plakanās koordinātu sistēmas asu virzienos veido visu spēku (arī balstu reakciju) projekciju summa uz šiem virzieniem. Tātad

$$R_x = \sum_k P_{kx}, \quad R_y = \sum_k P_{ky} \quad \text{un} \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Sistēmas **galveno momentu** nosaka sakarība: $M_O = \sum_k m_O(\vec{P}_k)$.

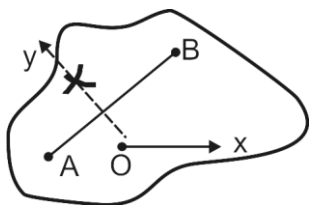
Analītiskos līdzsvara nosacījumus varam iegūt trijos veidos:

- **pirmais līdzsvara vienādojumu veids** (pamatveids, jo nav nekādu papildus nosacījumu);

Lai patvaļīga plakana spēku sistēma atrastos līdzsvarā, nepieciešami un pietiekami, lai visu spēku projekciju summa uz katru no divām koordinātu asīm un šo spēku momentu summa pret patvaļīgu centru spēku darbības plaknē, būtu vienādas ar nulli:

$$\sum_k P_{kx} = 0; \quad \sum_k P_{ky} = 0; \quad \sum_k m_O(\vec{P}_k) = 0. \quad (3.1)$$

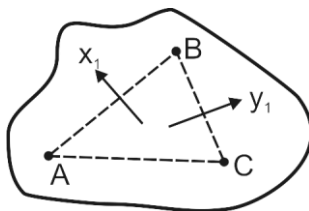
- **otrais līdzsvara vienādojumu veids;**



Lai patvaļīga plakana spēku sistēma atrastos līdzsvarā, ir nepieciešami un arī pietiekami, lai visu spēku momentu summa pret patvaļīgiem centriem A un B un spēku projekciju summa uz x asi, kas nav perpendikulāra taisnei AB, būtu vienādas ar nulli:

$$\sum_k m_A(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_k m_B(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_k P_{kx} = 0. \quad (3.2)$$

Gadījumā, ja x ass ir perpendikulāra taisnei AB, trešais vienādojums nav neatkarīgs, jo saskaitot pirmos divus vienādojumus iegūstam projekciju vienādojumu uz taisnei AB perpendikulāru asi.

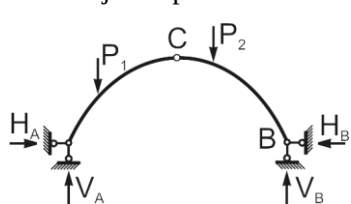


- **trešais līdzsvara vienādojumu veids.**

Lai patvaļīga plakana spēku sistēma atrastos līdzsvarā, nepieciešami un pietiekami, lai visu spēku momentu summas pret jebkuriem trīs centriem A, B, C, kas neatrodas uz vienas taisnes, būtu vienādas ar nulli:

$$\sum_k m_A(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_k m_B(\vec{P}_k) = 0; \quad \sum_k m_C(\vec{P}_k) = 0. \quad (3.3)$$

Saskaitot pirmos divus vienādojumus iegūsim projekciju summu uz asi x_1 , saskaitot otro un trešo vienādojumu – projekciju summu uz asi y_1 . Ja šiem diviem vienādojumiem pievienojam kādu no momentu vienādojumiem, esam nonākuši pie līdzsvara vienādojumu pirmā veida. Gadījumā, ja punkti A, B, C atrodas uz vienas taisnes, asis



att. 2.5

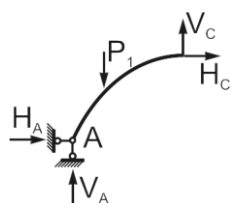
x_1 un y_1 kļūst paralēlas (sakrīt) un iegūtie projekciju vienādojumi nav neatkarīgi.

2.4. Plakanas stieņu sistēmas līdzsvara nosacījumi

Sistēmām, kuras sastāv no savā starpā ar iekšējām saitēm sastiprinātiem vairākiem ķermeņiem (stieņiem, diskām) un kuras ar ārējām saitēm (balstiem) piestiprinātas citiem ķermeņiem (zemei), nosakot ārējo saišu (balstu) reakcijas bieži vien nepietiek ar trim statikas līdzsvara vienādojumiem.

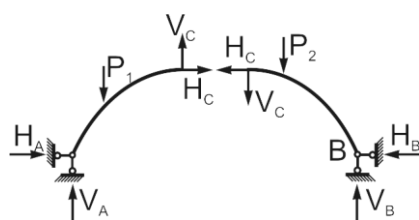
Piemēram, att. 2.5 parādītajam trīslēcīgu lokam ir četras nezināmas balstu reakcijas, bet sistēmai kopumā mēs varam sastādīt tikai trīs neatkarīgus statikas līdzsvara vienādojumus.

Lai iegūtu papildus vienādojumus, varam:



1. papildus apskatīt kādas sistēmas daļas līdzsvaru, piemēram, kreisās;

Apskatāmajai sistēmas daļai varam sastādīt trīs neatkarīgus statikas vienādojumus. Klāt nākuši divi nezināmi lielumi: vertikālā un horizontālā reakcija locīklā C. Kopā ar vienādojumiem, kurus varam sastādīt visai sistēmai, mums ir seši vienādojumi (3+3) un arī seši nezināmie (4+2).



2. sadalīt doto sistēmu atsevišķās sastāvdaļās un katru no tām apskatīt kā brīvu ķermeni, ņemot vērā, ka iekšējo pārgrieztu saišu reakcijas ir vienādas pēc moduļa, bet pretēji vērstas;

Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā atkal iegūstam sešus vienādojumus un sešus nezināmos.

3. Tā kā vienīgās reakcijas, kuras var rasties locīklā ir vertikālā un horizontālā reakcija, bet moments locīklā vienmēr ir vienāds ar nulli, varam sastādīt un pielīdzināt nullei momentu summu pret locīklu C vai nu sistēmas kreisajai vai labajai daļai.

Tā iegūstam neatkarīgu vienādojumu $\sum_k^{pakreisi} M_C(P_k) = 0$ vai $\sum_k^{palabi} M_C(P_k) = 0$. Tātad

katra sistēmā esošā vienkāršā locīkla (savieno divus stieņus) dod iespēju iegūt vienu neatkarīgu papildus vienādojumu balstu reakciju noteikšanai. Divkāršās, trīskāršās u.t.t. locīklas (savieno trīs, četrus, u.t.t. stieņus) dod iespēju papildus iegūt divus, trīs, u.t.t. vienādojumus. Šis balstu reakciju noteikšanas paņēmiens ir ievērojami ērtāks nekā pirmajā un otrajā punktā apskatītie.

2.5. Balstu reakciju noteikšanas secība

Balstu reakciju noteikšanu veic sekojošos etapos:

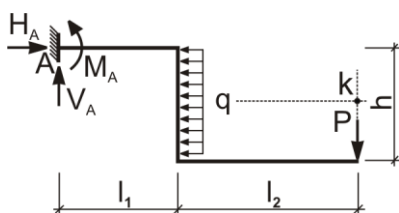
1. izvēlas ķermeņus (sistēmas daļas vai pilnas sistēmas), kuru līdzsvara nosacījumi tiks izmantoti;
2. šos ķermeņus, atmetot ārējās saites, izveido par brīviem ķermeņiem uz kuriem darbojas ārējās slodzes un nezināmas atbilstošās reakcijas (šo etapu parasti izlaiž, nosakāmās balstu reakcijas attēlojot dotajā sistēmā);
3. sastāda līdzsvara vienādojumus, no kuriem nosaka nezināmās balstu reakcijas;

Ieteicams līdzsvara vienādojumus izvēlēties tā, lai katru balsta reakciju varētu noteikt no neatkarīga līdzsvara vienādojuma un nebūtu jārisina vienādojumu sistēmas.

4. veic noteikto balstu reakciju pārbaudi.

Pārbaudei izvēlas tādus vienādojumus, kuri netika izmantoti nosakot balstu reakcijas. Ieteicams vienādojumus izvēlēties tā, lai tie saturētu pēc iespējas vairāk balstu reakciju (optimāli – visas vienā vienādojumā) un mazāk ārējo slodžu. Tas padara pārbaudi vienkāršāku.

Piemērs 2.1. Noteikt konsolsijas balsta reakcijas gadījumam, kad $P=10\text{kN}$, $q=4\text{kN/m}$, $l_1=4\text{m}$, $l_2=2\text{m}$, $h=1\text{m}$.



Atrisinājums. Tā ir vienā galā iespīlēta sija (konsolsija) ar lauztu asi. Tās balstā A (iespīlējumā) slodzes iespīdā veidojas trīs balsta reakcijas: vertikālā V_A , horizontālā H_A un moments M_A . Balstu reakcijas noteiksim izmantojot pirmā veida līdzsvara vienādojumus. Pirmās divas reakcijas iespējams noteikt izmantojot spēku projekciju līdzsvara

vienādojumus uz horizontālo (X) un vertikālo (Y) asi:

$$\sum X = H_A - qh = 0,$$

$$\sum Y = V_A - P = 0.$$

No šiem vienādojumiem nosakām attiecīgās balstu reakcijas:

$$H_A = qh, \quad V_A = P.$$

Sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu A, iegūstam:

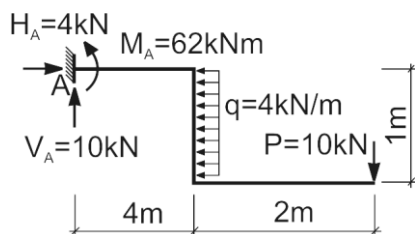
$$\sum M_A = M_A - qh^2/2 - P(l_1 + l_2) = 0.$$

Tātad balstā A darbojas moments

$$M_A = qh^2/2 + P(l_1 + l_2).$$

Izmantojot uzdevuma nosacījumos dotās parametru vērtības, iegūstam:

$$V_A = 10\text{kN}, \quad H_A = 4\text{kN}, \quad M_A = 62\text{kNm}.$$



Iegūtās balsta reakcijas attēlā jāparāda pareizos virzienos uzrādot atbilstošās reakciju skaitliskās vērtības. Ja aprēķina rezultātā kāda no reakcijām ir iegūta ar mīnus zīmi, tad sākotnēji izvēlētais reakcijas virziens nav bijis pareizs un tas jāmaina uz pretējo.

Pārbaudei izmantojam neatkarīgu momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu k, jo pret šo punktu izkliedētā slodze un spēks P nedod momentu:

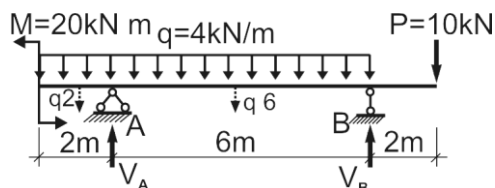
$$\sum M_k = V_A(l_1 + l_2) + H_A h / 2 - M_A = 0;$$

$$\sum M_k = 10 \cdot (4 + 2) + \frac{4 \cdot 1}{2} - 62 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Ja pārbaude izpildās, varam turpināt aprēķinus: iegūt iekšējās piepūles, aprēķināt spriegumus, izvēlēties šķērsgriezuma izmērus, aprēķināt pārvietojumus, u.t.t., ja nē - jāmeklē kļūda balstu reakciju aprēķinā.

Piemērs 2.2. Noteikt balstu reakcijas divbalstu sijai ar konsolēm.



Atrisinājums. Balstu reakcijas noteiksim izmantojot otrā veida līdzsvara vienādojumus. Sistēma sastāv no divos punktos (A un B) balstīta stieņa, kuram iespējams sastādīt trīs neatkarīgus vienādojumus trīs balstu reakciju noteikšanai. Ņemot vērā, ka uz sistēmu darbojas tikai vertikālas slodzes, horizontālā reakcija balstā A ir vienāda ar nulli. To viegli pierādīt sastādot spēku projekciju summu uz horizontālu asi: $\sum X = H_A = 0$. Nezināmo vertikālo balstu reakciju V_A un V_B virzienus saskaņā ar balstu aksiomu izvēlamies vērstus uz augšu. Ja balsta reakcijas virziens tiek izvēlēts nepareizi, tad nosakot balsta reakciju, tās vērtība ir negatīva. Šādā gadījumā, veicot turpmākos aprēķinus, ieteicams nomainīt balsta reakcijas virzienu uz pretējo un reakciju ņemt ar plus zīmi.

Lai katru balsta reakciju noteiktu no sava neatkarīga vienādojuma, par momentpunktiem ieteicams izvēlēties punktus A un B, jo pret katru no tiem viena no balstu reakcijām neradīs momentu (plecs vienāds ar nulli).

Sastādot visu momentu summu pret balstu A nosakām balstu reakciju V_B . Par momenta pozitīvo izvēlamies pulksteņa rādītāja kustības virzienu (pie šādas izvēles ir nedaudz ērtāk no līdzsvara vienādojuma izteikt nezināmo V_B).

Pozitīvajā virzienā darbojas tā izkliedētās slodzes daļa, kura atrodas pa labi no balsta A. Šīs izkliedētās slodzes daļas kopspēks ir vienāds ar izkliedētās slodzes intensitātes q reizinājumu ar posma garumu, uz kuru tā darbojas. Tātad kopspēks ir $q \cdot 6$, bet tā plecs ir attālums no kopspēka darbības līnijas līdz punktam A, tas ir 3 m. Moments, ko rada

šī izkliedētās slodzes daļa ir kopspēka un pleca reizinājums, tas ir $q \cdot 6 \cdot 3$. Moments, ko rada spēks P ir spēka un pleca reizinājums, tātad $P \cdot 8$.

Pretī pulksteņa rādītāja kustības virzienam pret balstu A darbojas tā izkliedētās slodzes daļa, kas atrodas pa kreisi no balsta A, spēkpāris M un nezināmā balsta reakcija V_B . Šo slodžu momenti izvēlētajā sistēmā ir ar negatīvu zīmi. Tātad iegūstam sekojošu līdzsvara vienādojumu:

$$\sum M_A = q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 8 - q \cdot 2 \cdot 1 - M - V_B \cdot 6 = 0,$$

kuru atrisinot iegūstam balsta B vertikālo reakciju

$$V_B = (q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 8 - q \cdot 2 \cdot 1 - M) / 6 = 20,66 \text{ kN}.$$

Sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret balstu A izkliedēto slodzi q varam arī nedalīt divās daļās, bet ņemt kopspēku no visas izkliedētās slodzes:

$$\sum M_A = q \cdot 8 \cdot 2 + P \cdot 8 - M - V_B \cdot 6 = 0.$$

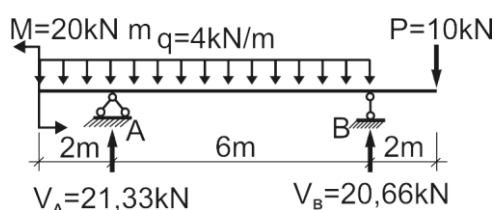
Jāatzīmē, ka momentu līdzsvara vienādojumā visiem saskaitāmajiem ir jābūt momentiem, tātad **spēkpāris nav jāreizina ar plecu!**

Līdzīgā veidā sastādot momentu summu pret punktu B iegūstam vienādojumu (šoreiz par pozitīvu ņemot virzienu pretēju pulksteņa rādītāja kustības virzienam):

$$\sum M_B = q \cdot 8 \cdot 4 + M - P \cdot 2 - V_A \cdot 6 = 0,$$

kuru atrisinot iegūstam

$$V_A = (q \cdot 8 \cdot 4 + M - P \cdot 2) / 6 = 21,33 \text{ kN}.$$



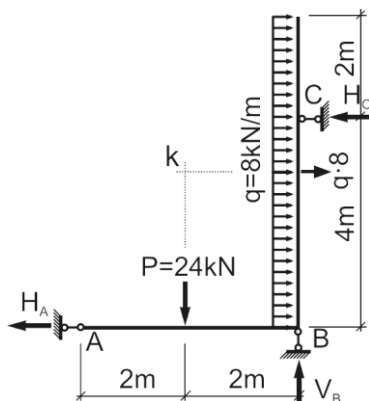
Pārbaudei izmantojam spēku projekciju summu uz vertikālu asi:

$$\sum Y = q \cdot 8 + P - V_A - V_B \stackrel{?}{=} 0.$$

Pārlicināmies, ka šī vienādība izpildās.

Jāatzīmē, ka spēku projekciju vienādojumā visiem saskaitāmajiem ir jābūt spēkiem un

tātad spēkpāris šādā vienādojumā kā saskaitāmais nevar tikt iekļauts!



Piemērs 2.3. Noteikt balstu reakcijas attēlā dotajai sistēmai, izmantojot līdzsvara vienādojumu trešo veidu.

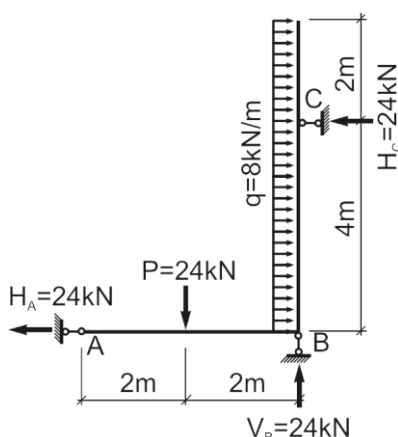
Atrisinājums. Balstu reakciju noteikšanai izmantojam momentu līdzsvara vienādojumus pret balstiem A, B un C. Tā kā momentu līdzsvara vienādojums pret balstu A satur divas nezināmas reakcijas V_B un H_C , tad ērtāk sākt aprēķinu ar momentu vienādojumiem pret pārējiem balstiem, piemēram:

$$\sum M_C = P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 1 - H_A \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_B = q \cdot 6 \cdot 3 - P \cdot 2 - H_C \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_A = P \cdot 2 + q \cdot 6 \cdot 3 - H_C \cdot 4 - V_B \cdot 4 = 0.$$

Atrisinot iegūtos vienādojumus iegūstam:



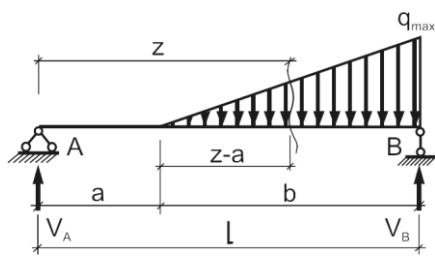
$$H_A = 24kN; H_C = 24kN; V_B = 24kN.$$

Tā kā projekciju līdzsvara vienādojumi nosakot balstu reakcijas nav izmantoti, tad varam tos pielietot pārbaudei:

$$\sum X = q \cdot 6 - H_A - H_C \stackrel{?}{=} 0;$$

$$\sum Y = P - V_B \stackrel{?}{=} 0.$$

Nedaudz vienkāršāk būtu, pie vienas zināmas horizontālās reakcijas, otru noteikt no projekciju līdzsvara vienādojuma uz horizontālu asi. Tādā gadījumā pārbaudei varētu izmantot momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu k, pret kuru pieliktajām ārējām slodzēm moments ir nulle.



Piemērs 2.4. Noteikt balstu reakcijas divbalstu sijai, kura slogota ar lineāri mainīgu izkliedētu slodzi $q = q_{\max}(z - a)/b$.

Atrisinājums. Balsta B vertikālās reakcijas noteikšanai izmantojam momentu līdzsvara vienādojumu attiecībā pret balstu A, t.i.

$$\sum M_A = 0.$$

Tā rezultātā iegūstam sakarību

$$\sum M_A = V_B(a + b) - \int_a^{a+b} zq(z)dz = 0.$$

Ievietojot šai vienādojumā izkliedētās slodzes izmaiņas likuma analītisko izteiksmi, iegūstam

$$V_B(a + b) - \frac{q_{\max}}{b} \int_a^{a+b} z(z - a)dz = 0.$$

Veicot integrēšanu un izsakot nezināmo reakciju V_B , iegūstam izteiksmi:

$$V_B = \frac{q_{\max} \cdot b \cdot (3a + 2b)}{6(a + b)}.$$

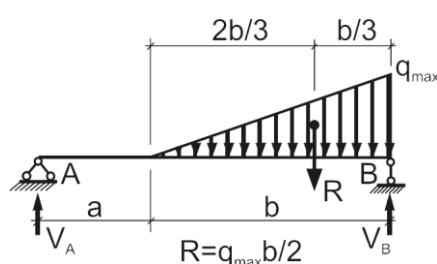
Uzdevuma nosacījumos dotā slogojuma gadījumā varam iztikt arī bez integrēšanas. Nomainām trīsstūrveida slodzi ar tās kopspēku R , kurš pielikts slodzes trīsstūra smaguma centrā, t.i. attālumā $b/3$ no balsta B. Tādā gadījumā līdzsvara nosacījums ir uzrakstāms sekojošā veidā:

$$\sum M_A = V_B(a+b) - R\left(a + \frac{2}{3}b\right) = 0.$$

Tā kā

$$R = \int_0^b z dz = \int_a^{a+b} \frac{q_{\max}}{b} (z-a) dz = \frac{q_{\max} \cdot b}{2},$$

faktiski ir trīsstūrveida slodzes epīras laukums, tad līdzsvara vienādojums iegūst sekojošu veidu:



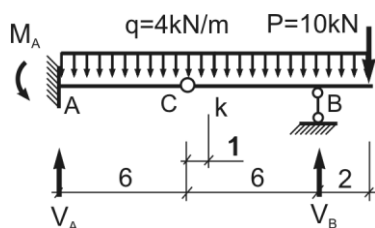
$$V_B(a+b) - \frac{q_{\max} \cdot b \cdot (3a+2b)}{6} = 0.$$

Analogi, sastādot momenta līdzsvara vienādojumu pret balstu B, t.i. $\sum M_B = 0$, varam noteikt balsta reakciju V_A . Šīs reakcijas vērtību nosaka izteiksme

$$V_A = \frac{q_{\max} b^2}{6(a+b)}.$$

Līdzsvara nosacījums $\sum Y = 0$ vai $V_A + V_B - R = 0$ tiek izmantots pārbaudei.

Piemērs 2.5. Noteikt balstu reakcijas locīklu sijai.



Atrisinājums. Vispārīgā gadījumā būtu jānosaka četras balstu reakcijas, bet, tā kā vertikālas slodzes gadījumā horizontālā reakcija $H_A = 0$, atliek noteikt pārējās trīs. Izmantojam nosacījumu, ka lieces momentam locīklā ir jābūt vienādam ar nulli un sastādām momentu līdzsvara vienādojumu sijas daļai pa labi no locīklas C:

$$\sum M_C^{palabi} = q \cdot 8 \cdot 4 + P \cdot 8 - V_B \cdot 6 = 0, \text{ no kura iegūstam}$$

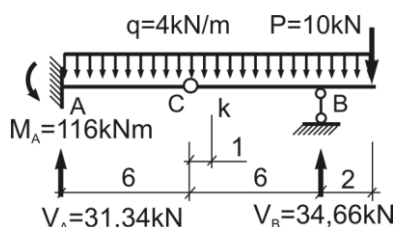
$$V_B = 34,66 \text{ kN}.$$

Zinot vienu vertikālo balsta reakciju, otru varam iegūt izmantojot projekciju līdzsvara vienādojumu uz vertikālu asi:

$$\sum Y = q \cdot 10 + P - V_B - V_A = 0.$$

Iegūstam $V_A = 31,34 \text{ kN}$.

Reaktīvā momenta lielumu iespīlējumā varam atrast vai nu sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret iespīlējuma vietu A visai sistēmai, vai, kas ir vienkāršāk, pret locīklu C, sijas daļai pa kreisi no locīklas:



$$\sum M_C^{pakreisi} = V_A \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - M_A = 0.$$

Rezultātā iegūstam $M_A = 116 \text{ kNm}$.

Jāatzīmē, ka sastādot līdzsvara vienādojumus balsta reakciju noteikšanai pozitīvo un negatīvo virzienu varam izvēlēties patvaļīgi.

Lai momentu līdzsvara vienādojumā, kuru izmantojam iegūto balsta reakciju pārbaudei, nebūtu jāievēro izkliedētā slodze q , par momentpunktu izvēlamies punktu k uz izkliedētās slodzes kopspēka darbības līnijas. Tādā gadījumā iegūstam:

$$\sum M_k = M_A + V_B \cdot 5 - V_A \cdot 7 - P \cdot 7 = 0;$$

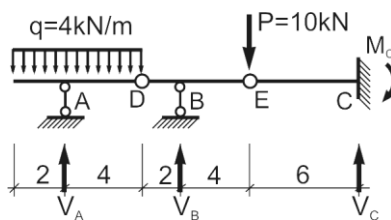
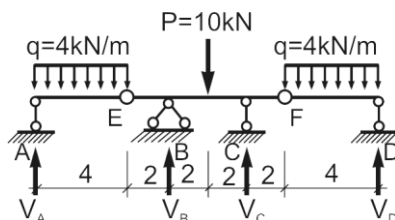
$$\sum M_k = 116 + 34,66 \cdot 5 - 31,34 \cdot 7 - 10 \cdot 7 = 0;$$

$$-0,08 \approx 0.$$

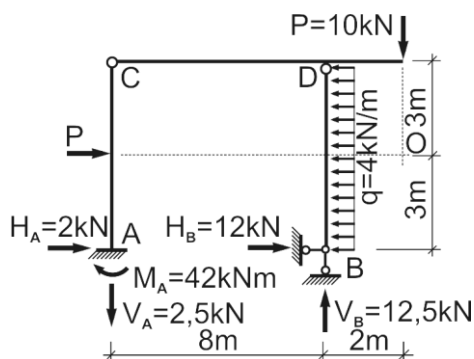
Uzdevums 2.1

Uzdevums 2.2

Noteikt balstu reakcijas locīklu sijai (atbildes pielikumā):



Piemērs 2.6. Balstu reakciju noteikšana attēlā dotajam rāhim.



Atrisinājums. Izmantojot balstu aksiomu izvēlamies nezināmo reakciju virzienus. Ja izvēle būs nepareiza, iegūsim balsta reakcijas vērtību ar mīnus zīmi. Lai aprēķins būtu vienkāršāks, balsta reakciju noteikšanas secību cenšamies izvēlēties tādu, lai nebūtu jārisina vienādojumu sistēmas, bet katru reakciju varētu noteikt no neatkarīga vienādojuma. Konkrētajā uzdevumā šī secība varētu būt sekojoša:

1) nosakām reakciju H_B , pielīdzinot nullei momentu summu pret locīklu D uz leju no

tās:

$$\sum M_D^{uz\ leju} = q \cdot 6 \cdot 3 - H_B \cdot 6 = 0,$$

no kurienes $H_B = 12 \text{ kN}$;

2) nosakām reakciju V_B , pielīdzinot nullei momentu summu pret locīklu C pa labi no tās:

$$\sum M_C^{pa\ labi} = P \cdot 10 + q \cdot 6 \cdot 3 - H_B \cdot 6 - V_B \cdot 8 = 0$$

un tātad $V_B = 12,5 \text{ kN}$.

Zinot reakcijas V_B un H_B pārējās divas reakcijas horizontālā un vertikālā virzienā varam noteikt no projekciju vienādojumiem:

$$\sum X = q \cdot 6 - P - H_B - H_A = 0,$$

$$\sum Y = P + V_A - V_B = 0.$$

No šiem vienādojumiem iegūstam:

$$H_A = 2 \text{ kN}, \quad V_A = 2,5 \text{ kN}.$$

Balsta reakciju M_A varam noteikt sastādot momentu summu visai sistēmai pret punktu A vai arī pielīdzinot nullei momentu summu uz leju no locīklas C:

$$\sum M_C^{uz\ leju} = P \cdot 3 + H_A \cdot 6 - M_A = 0.$$

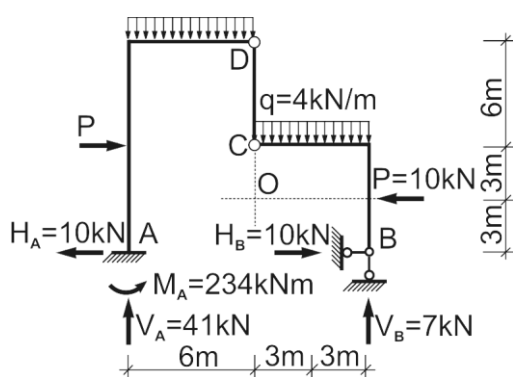
Atrisinot šo vienādojumu iegūstam:

$$M_A = 42 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Pārbaudei izmantojam punktu O, kurā krustojas ārējo slodžu darbības līnijas. Tas būtiski vienkāršo momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu O:

$$\sum M_O = M_A + V_B \cdot 2 - V_A \cdot 10 - (H_A + H_B) \cdot 3 = 0.$$

Ievietojot iepriekš noteiktās balstu reakciju vērtības pārlicināmies, ka vienādība izpildās. Reakciju skaitliskās vērtības un pareizos virzienus parādām zīmējumā.



Piemērs 2.7. Balstu reakciju noteikšana attēlā dotajam rāimim.

Atrisinājums. Ne vienmēr izdodas izvērtēties no vienādojumu sistēmu risināšanas. Tādos gadījumos jācenšas, lai vienādojumu sistēmā būtu pēc iespējas mazāk vienādojumu. Šajā piemērā balstu reakcijas V_B un H_B varam noteikt no divu vienādojumu sistēmas, kuru iegūstam sastādot momentu summas pa labi no locīklām C un D:

$$\sum M_C^{pa\ labi} = q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 3 - H_B \cdot 6 - V_B \cdot 6 = 0,$$

$$\sum M_D^{pa labi} = q \cdot 6 \cdot 3 + P \cdot 9 - H_B \cdot 12 - V_B \cdot 6 = 0.$$

No pirmā vienādojuma atņemot otro, iegūstam:

$$-P \cdot 6 + H_B \cdot 6 = 0.$$

Līdz ar to nosakām, ka

$$H_B = 10 \text{ kN}.$$

Ievietojot iegūto reakcijas H_B vērtību pirmajā (vai otrajā) vienādojumā iegūstam: $V_B = 7 \text{ kN}$.

Sastādot spēku projekciju summas uz vertikālu un horizontālu asi un tās pielīdzinot nullei iegūstam

$$\sum X = P - P + H_B - H_A = 0,$$

$$\sum Y = q \cdot 12 - V_B - V_A = 0.$$

No šiem vienādojumiem nosakām balsta A reakcijas H_A un V_A . To vērtības ir

$$H_A = 10 \text{ kN} \text{ un}$$

$$V_A = 41 \text{ kN}.$$

Momenta iespīlējumā M_A noteikšanai sastādām momentu summu sistēmas daļai pa kreisi no locīklas D un pielīdzinām to nullei. Tā iegūstam

$$\sum M_D^{pa kreisi} = V_A \cdot 6 + H_A \cdot 12 - P \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - M_A = 0,$$

līdz ar to

$$M_A = 234 \text{ kNm}.$$

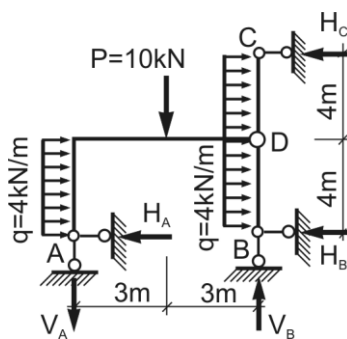
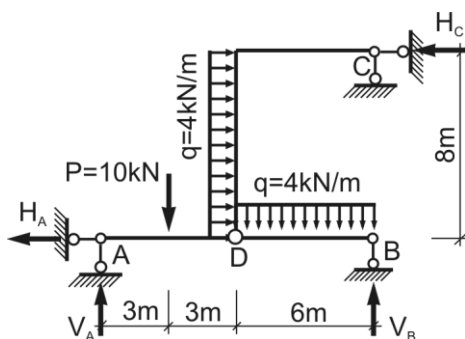
Pārbaudei sastādām momentu summu pret punktu O un pārlicināmies, ka vienādība izpildās:

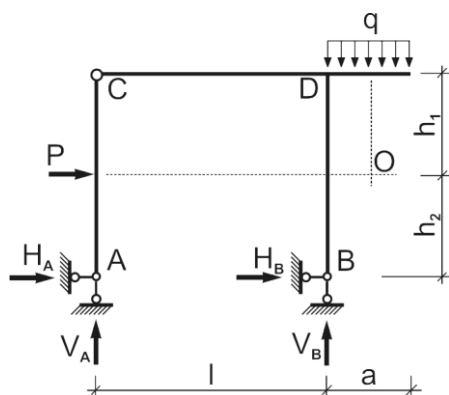
$$\sum M_O = V_A \cdot 6 + H_A \cdot 3 + P \cdot 3 - H_B \cdot 3 - V_B \cdot 6 - M_A = 0.$$

Uzdevums 2.3

Uzdevums 2.4

Noteikt balstu reakcijas rārim.





Piemērs 2.8. Noteikt balstu reakcijas trīslo-
cīklu rāmim sekojošu izejas parametru gadī-
jumā: $q = 4 \text{ kN/m}$, $P = 10 \text{ kN}$, $h_1 = 3 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$, $\ell = 4 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$.

Atrisinājums. Lai noteiktu balstu A un B re-
akcijas, sastādām momentu līdzsvara vienādo-
jumus pret punktiem A un B, kā arī momentu
summas pret locīklu C pa kreisi un pa labi no
tās. Tādā veidā iegūstam četrus neatkarīgus
vienādojumus četru balstu reakciju noteikšanai:

$$\sum M_A = P \cdot h_2 + q \cdot a \cdot \left(\ell + \frac{a}{2} \right) - V_B \cdot \ell = 0,$$

$$\sum M_B = V_A \cdot \ell + P \cdot h_2 + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0,$$

$$\sum M_c^{kr} = -H_A \cdot (h_1 + h_2) - P \cdot h_1 = 0,$$

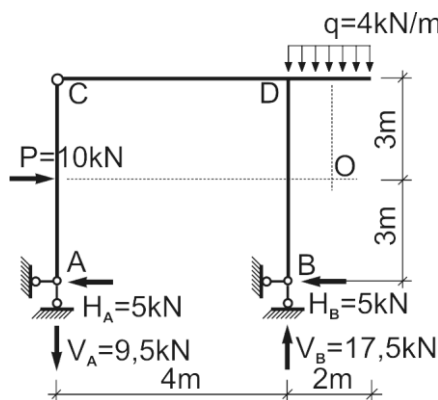
$$\sum M_c^{lab} = q \cdot a \cdot \left(\ell + \frac{a}{2} \right) - V_B \cdot \ell - H_B (h_1 + h_2) = 0.$$

Ievietojot vienādojumus konkrētās skaitliskās vērtības un izsakot nezināmos V_A , V_B , H_A un H_B , iegūstam:

$$V_A = -9,5 \text{ kN}; \quad V_B = 17,5 \text{ kN};$$

$$H_A = -5 \text{ kN}; \quad H_B = -5 \text{ kN}.$$

Iegūto rezultātu pārbaudei izmantojam spēku projekciju līdzsvara vienādojumus uz horizontālo un vertikālo asi (vai momentu summu pret punktu O). Šajā gadījumā aprē-
ķināto reakciju virzieni nav mainīti un reakcijas V_A , H_A un H_B tiek ņemtas ar mīnus



zīmi. Iegūstam sakarības:

$$\sum X = P + H_A + H_B \stackrel{?}{=} 0;$$

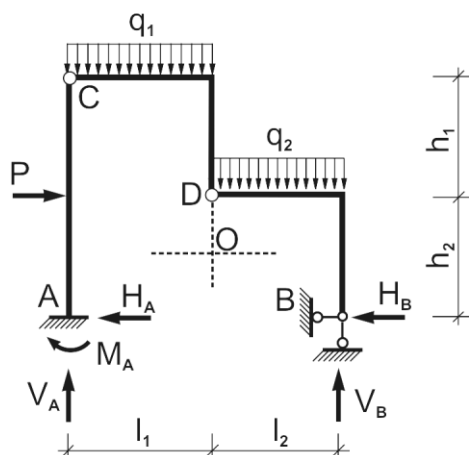
$$\sum X = -5 + 10 - 5 = 0;$$

$$\sum Y = V_A + V_B - qa \stackrel{?}{=} 0;$$

$$\sum Y = -9,5 + 17,5 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Tātad spēku projekciju summas uz x un y asīm
ir vienādas ar nulli un sistēma ir līdzsvarā.

Jāatzīmē, ka veicot iekšējo piepūļu aprēķinu, balstu reakcijas apskatāmajai sistēmai ir lietderīgi pielikt pareizajos virzienos, tas ir negatīvajām reakcijām mainīt virzienu un zīmi.



Piemērs 2.9. Noteikt balstu reakcijas zīmējumā attēlotajam rāim patvaļīgām izejas parametru vērtībām un to konkrētam gadījumam: $P = 10 \text{ kN}$, $q_1 = 6 \text{ kN/m}$,

$$q_2 = 4 \text{ kN/m}, l_1 = 4 \text{ m}, l_2 = 2 \text{ m},$$

$$h_1 = 1 \text{ m}, h_2 = 2 \text{ m}.$$

Atrisinājums. Jānosaka piecas nezināmas balstu reakcijas V_A , H_A , M_A , V_B un H_B . Šim nolūkam ir nepieciešami pieci neatkarīgi vienādojumi.

Nezināmo balstu reakciju V_B un H_B noteikšanai izmantosim momentu summas pa labi

no locīklēm C un D:

$$\sum M_C^{lab} = q_1 l_1^2 / 2 + q_2 l_2 (l_1 + l_2 / 2) - V_B (l_1 + l_2) + H_B (h_1 + h_2) = 0;$$

$$\sum M_D^{lab} = q_2 l_2^2 / 2 + H_B h_2 - V_B l_2 = 0.$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam:

$$V_B = \frac{h_2}{l_1 h_2 - l_2 h_1} \left[q_1 \frac{l_1^2}{2} + q_2 \left(-\frac{l_2^2 h_1}{2 h_2} + l_1 l_2 \right) \right],$$

$$H_B = \frac{1}{h_2} \left[\left(-q_2 \frac{l_2^2}{2} + V_B l_2 \right) \right].$$

Balsta reakcijas H_A noteikšanai izmantojam spēku projekciju summu uz x asi, kuru pielīdzinām nullei:

$$\sum X = P - H_A - H_B = 0.$$

No šī vienādojuma iegūstam

$$H_A = P - H_B.$$

Sastādot spēku projekciju summu uz vertikālo asi Y, no līdzsvara nosacījuma iegūstam vienādojumu

$$\sum Y = V_A - q_1 l_1 - q_2 l_2 + V_B = 0.$$

Tātad balsta A vertikālā reakcija V_A ir

$$V_A = q_1 l_1 + q_2 l_2 - V_B.$$

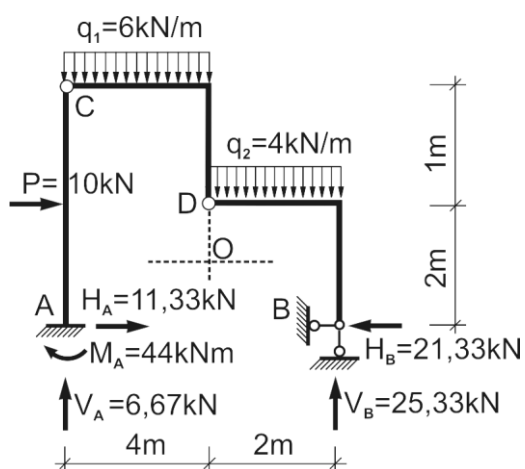
Momentu summa rāmja daļai pa kreisi no locīklas C

$$\sum M_C^{kr} = -Ph_1 + M_A + H_A(h_1 + h_2) = 0$$

dod iespēju noteikt momenta vērtību un arī virzienu iespēļēmā

$$M_A = Ph_1 - H_A(h_1 + h_2).$$

Esam ieguvuši izteiksmes visu nezināmo balstu reakciju noteikšanai.



Ievietojot konkrētos uzdevuma izejas datus iegūtajās izteiksmēs, nosakām sekojošas balstu reakciju vērtības:

$$V_A = 6,67 \text{ kN};$$

$$H_A = -11,33 \text{ kN};$$

$$V_B = 25,33 \text{ kN};$$

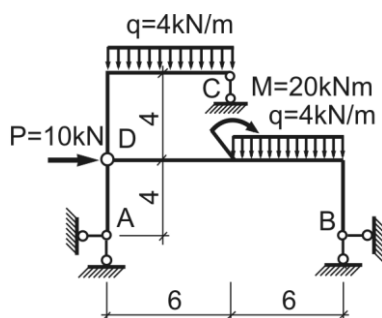
$$H_B = 21,33 \text{ kN};$$

$$M_A = 44 \text{ kNm}.$$

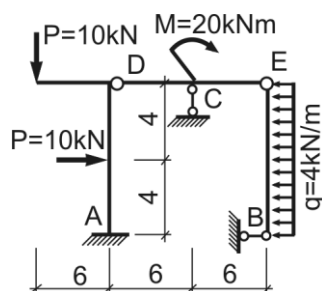
Iegūto rezultātu pārbaudei izmantojam momentu summu pret punktu O. Tai jābūt vienādai ar nulli. Varam pārliecināties, ka nosacījums izpildās.

Uzdevums 2.5

Noteikt balstu reakcijas rāmim.



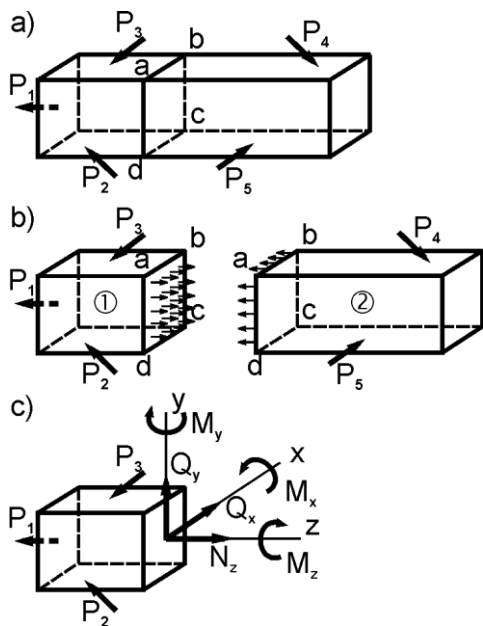
Uzdevums 2.6



3. ŠĶĒLUMU METODE STIEŅU SISTĒMU IEKŠĒJO PIEPŪĻU NOTEIKŠANAI

3.1. Šķēlumu metode telpiskai sistēmai

Teorētiskās mehānikas pētījumu rezultātā ir pierādīts, ka slogota ķermeņa atsevišķo daļu savstarpējās iedarbības iekšējos izkliedētos elastīgos spēkus jebkurā šķēlumā var aizstāt ar iekšējo spēku **galveno vektoru** un **galveno momentu**. Sadalot galveno vektoru un galveno momentu komponentēs iegūstam iekšējās piepūles. Iekšējo piepūļu noteikšanai lietojam šķēlumu metodi. Šīs metodes autori ir vācu inženieri A. Riters un D. Švedlers, kuri XIX gs. vidū pielietoja šo metodi piepūļu noteikšanai kopņu stieņos. Tā kā iekšējās piepūles darbojas starp atsevišķām noslogotas konstrukcijas vai tās elementu daļām tad, lai noteiktu šīs piepūles kādā noteiktā līdzsvarota ķermeņa vietā, šai vietā domās izdara šķēlumu un vienu no atšķeltajām daļām atmet (parasti atmet to ķermeņa daļu, kurai pielikts vairāk ārējo spēku). Atšķelto daļu savstarpējā iedarbība tiek aizstāta ar iekšējām piepūlēm, kuras līdzsvaro stieņa atšķeltajai daļai pieliktos ārējos spēkus. Svarīgi ņemt vērā, ka reakcijas, kuras rodas konstrukcijas balstos, arī uzskatāmas par ārēji pieliktām piepūlēm.



att. 3.1

šķēlumā abcd.

Pēc aksiomas „par darbības un pret darbības vienādību” iekšējās piepūles, kas šķēlumā abcd darbojas gan uz stieņa kreiso gan labo daļu, ir savstarpēji vienādas, bet pretēji vērstas.

Šķēlumu metode, kura tiek lietota stieņu iekšējo piepūļu noteikšanai, turpmāk tiks plaši pielietota, lai atrastu sakarības starp ārējo slodzi un iekšējām piepūlēm. Ārējos spēkus,

Aplūkosim prizmatisku stieni (att. 3.1a), uz kuru darbojas ārēji spēki P_1, P_2, P_3, P_4 un P_5 . Izdarot brīvi izvēlētu šķēlumu abcd, stieni sadalām divās daļās (att. 3.1b). Lai saglabātu kreisās daļas līdzsvaru, tai šķēlumā abcd jāpieliek spēki, kuri līdzsvaro ārējos spēkus P_1, P_2 un P_3 . Šķēlumā pieliktie spēki aizstāj labās ķermeņa daļas iedarbību uz kreiso daļu. Gluži tāpat, lai saglabātu labās daļas līdzsvaru, tai šķēlumā abcd jāpieliek piepūles, kuras līdzsvaro spēkus P_4 un P_5 un aizstāj kreisās ķermeņa daļas iedarbību uz labo daļu.

Arī nesašķelta stieņa šķēlumā abcd (att. 3.1a) jādarbības analogām piepūlēm. Pretējā gadījumā ārējo spēku iedarbības rezultātā stienis pa šo šķēlumu sašķeltos divās daļās. Šīs piepūles, kuras tad arī sauc par **iekšējām piepūlēm**, atbilst ķermeņa kreisās un labās daļas savstarpējai iedarbībai

kuri pielikti nošķeltajai ķermeņa daļai, līdzsvaro iekšējās piepūles šķēluma plaknē. Tas ļauj nošķeltajai daļai ① vai ② (att. 3.1b) pielietot līdzsvara noteikumus, kas vispārīgā gadījumā telpiskai spēku sistēmai dod sešus līdzsvara vienādojumus:

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= 0; & \sum P_{iy} &= 0; & \sum P_{iz} &= 0; \\ \sum M_{ix} &= 0; & \sum M_{iy} &= 0; & \sum M_{iz} &= 0.\end{aligned}$$

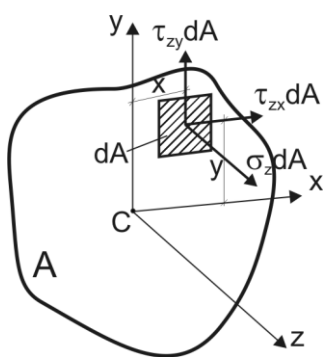
Vispārīgā gadījuma līdzsvara vienādojumi ļauj aprēķināt šķērssgriezumā radušos trīs spēkus N_z , Q_x un Q_y (iekšējo spēku galvenā vektora komponentes), kas darbojas koordinātu asu virzienos, un trīs momentus M_x , M_y un M_z (iekšējo spēku galvenā momenta komponentes). Minētie seši iekšējo spēku faktori (**iekšējās piepūles**) tiek saukti šādi (att. 3.1c):

N_z — **aksiāls spēks (ass spēks)** stieņa ass virzienā;

Q_x un Q_y — **šķērsspēki**, kuri darbojas šķērssgriezumā perpendikulāri stieņa asij x un y asu virzienos;

M_x un M_y — **lieces momenti**;

M_z — **vērpes moments**.



att. 3.2

Zinot iekšējās piepūles iespējams noteikt iekšējo piepūļu sistēmas statisko ekvivalentu, t.i., atrast iekšējo elastības spēku galveno vektoru un galveno momentu.

Lai noteiktu iekšējo piepūļu saistību ar spriegumiem jebkurā patvaļīgā šķēlumā, stieņa šķērssgriezumā izvēlamies patvaļīgu bezgala mazu laukumiņu dA (att. 3.2). Pieņemot, ka spriegumi jebkurā šķēluma punktā ir zināmi, konstatējam, ka uz elementārlaukumu dA darbojas elementārspēki $\sigma_z dA$, $\tau_{zx} dA$ un $\tau_{zy} dA$. Projicējot visus elementāros spēkus uz asīm x , y , z , kuru sākuma punkts C izvietots šķēluma smaguma centrā, un summējot šo spēku momentus pret šīm asīm pa visu šķēluma laukumu

A , iegūstam

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma_z dA; & Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA; & Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA; \\ M_x &= \int_A \sigma_z y dA; & M_y &= \int_A \sigma_z x dA; & M_z &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA.\end{aligned}$$

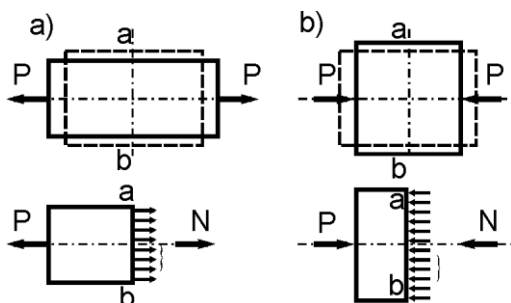
Integrēšana tiek veikta pa laukumu A .

Konkrētos slogojumu gadījumos dažas vai pat lielākā daļa no iekšējām piepūlēm var būt vienādas ar nulli.

Iekšējās piepūles, kuras rodas stieņa šķērssgriezumā, pilnībā nosaka tā deformācijas.

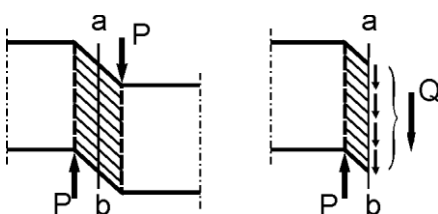
3.2. Vienkāršākie deformāciju veidi

Atsevišķu stieņu deformācijas aina var būt visai sarežģīta, taču ikvienu deformāciju var uzskatīt par vairāku vienkāršu deformāciju apvienojumu.



att. 3.3

aksiāls spēks vērsts no šķēluma plaknes uz aplūkojamās daļas «iekšpusi», uz ķermeni iedarbojas spiede (att. 3.3b).

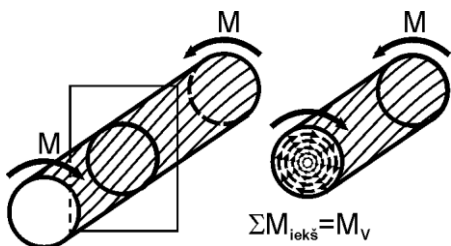


att. 3.4

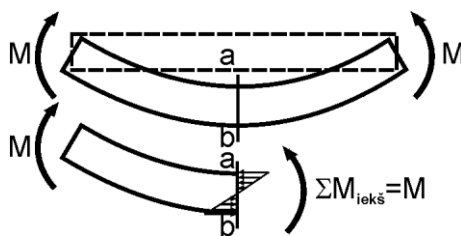
2. **Bīde (cirpe).** Šāda deformācija rodas tad, ja stieņa šķērsgriezumā iekšējie elastības spēki reducējami uz vienu spēku — šķērsspēku Q , kas darbojas šķēluma plaknē (att. 3.4).

3. **Vērpe.** Stieņa vērpes gadījumā iekšējos elastības spēkus var aizstāt ar spēkpāri, kura darbības plakne sakrīt ar šķērsgriezuma plakni (att. 3.5). Šī spēkpāra momentu, sauc par vērpes momentu M_v .

4. **Liece.** Lieces gadījumā iekšējo elastības spēku statistiskais ekvivalents arī ir spēkpāris, bet tā darbības plakne ir perpendikulāra stieņa šķērsgriezuma plaknei (att. 3.6). Šāda spēkpāra momentu sauc par lieces momentu M .



att. 3.5



att. 3.6

3.3. Šķēlumu metode plakanai sistēmai

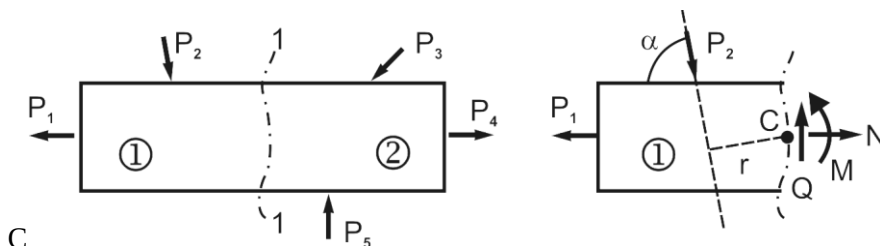
Gadījumos, kad stienim pieliktie ārējie spēki atrodas vienā plaknē (att. 3.7), to līdzsvaršanai vispārīgā gadījumā nepieciešamas trīs iekšējās piepūles: ass spēks N , šķērsspēks Q un lieces moments M .

Lai noteiktu piepūles N , Q un M , sastādām atšķeltajai stieņa daļai spēku projekciju

summas uz koordinātu asīm un momentu summu pret šķēluma smaguma centru. Lai atšķeltā stieņa daļa būtu līdzsvarā, šīm summām jābūt vienādām ar nulli. Tā tiek iegūti atšķeltās stieņa daļas līdzsvara vienādojumi, kurus atrisinot arī tiek noteiktas meklējamās iekšējās piepūles.

Att. 3.7 parādītā slogojuma gadījumā projicējot visus spēkus, kuri darbojas uz atšķelto stieņa daļu, uz asi, kas sakrīt ar stieņa asi un pielīdzinot šo spēku summu nullei, iegūstam:

$$-P_1 + N + P_2 \cos \alpha = 0.$$



att. 3.7

No šī vienādojuma izsakām nezināmo asspēku. Tas ir:

$$N = P_1 - P_2 \cos \alpha.$$

Vispārīgā gadījumā:

$$N = \sum_i P_{iz},$$

kur P_{iz} ir stieņa atšķeltajai daļai pielikto spēku projekcijas uz stieņa asi.

Ass spēks N izvēlētajā šķēlumā ir visu uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku projekciju uz asi, kas sakrīt ar stieņa asi, algebriska summa.

To spēka projekciju, kura izraisa atšķeltās stieņa daļas stiepi, uzskata par pozitīvu (lieto ar pluss zīmi), bet to, kura izsauc spiedi – par negatīvu (lieto ar mīnus zīmi).

Analogi summējot spēku projekcijas uz vertikālu asi, iegūstam vienādojumu

$$Q - P_2 \sin \alpha = 0$$

un izteiksmi

$$Q = P_2 \sin \alpha.$$

Vispārīgā gadījumā:

$$Q = \sum_i P_{iy},$$

kur P_{iy} ir stieņa atšķeltajai daļai pielikto spēku projekcijas uz stieņa asij perpendikulāru asi.

Šķērsspēks Q izvēlētajā šķēlumā ir visu uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku projekciju uz stieņa asij perpendikulāru asi algebriska summa.

To spēka projekciju, kas griež apskatāmo stieņa daļu pulksteņa rādītāja kustības virzie-

nā attiecībā pret šķēluma smaguma centru, uzskatīsim par pozitīvu, bet kas griež pretējā virzienā – par negatīvu.

Lieces momentu M nosaka, pielīdzinot nullei visu spēku, spēkpāru, izkļiedētās slodzes izraisīto momentu attiecībā pret šķēluma smaguma centru algebrisku summu. Šķēluma smaguma centrs att. 3.7 ir punkts C. Iegūstam vienādojumu

$$M + P_2 r = 0.$$

Tātad momenta M vērtību izvēlētajā stieņa šķēlumā nosaka izteiksme

$$M = -P_2 r.$$

Svarīgi atcerēties, ka moments pret punktu ir spēka un attāluma starp punktu un spēka darbības līniju (pleca) reizinājums (attālums ir perpendikula no punkta pret taisni garums).

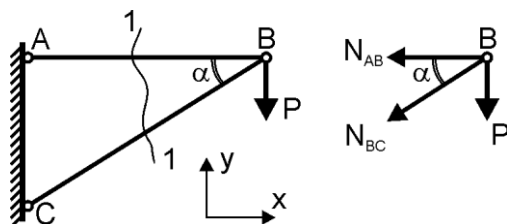
Vispārīgā gadījumā:

$$M = \sum_i M_{ix},$$

kur M_{ix} ir stieņa atšķeltajai daļai pielikto spēku izraisīto momentu un spēkpāru momentu summa pret šķēluma smaguma centru.

Lieces moments M izvēlētajā šķēlumā ir vienāds ar **visu** uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku (spēkpāru, izkļiedēto slodžu) momentu algebrisku summu pret šķēluma smaguma centru.

Lieces momentu zīmes tiek definētas konkrētiem slogojuma veidiem.



Piemērs 3.1. Noteikt piepūles zīmējumā parādītās sistēmas stieņos AB un BC.

Atrisinājums. Veicot šķēlumu 1-1, sistēmu sadalām divās daļās. Atmetam sistēmas kreiso daļu un pieprasām labās daļas līdzsvaru. Stieņu piepūles to asu virzienos pieņemam par pozitīvām (zīmējumā no mezgla izejošas bultas).

Sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumus sistēmas atšķeltajai daļai uz horizontālo x un vertikālo y asi:

$$\sum X = -N_{AB} - N_{BC} \cos \alpha = 0;$$

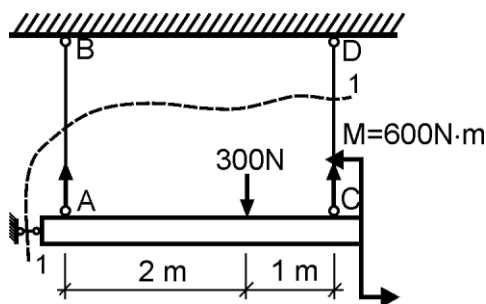
$$\sum Y = -P - N_{BC} \sin \alpha = 0.$$

Atrisinot šos vienādojumus attiecībā pret nezināmajām piepūlēm N , iegūstam

$$N_{AB} = P \cot \alpha;$$

$$N_{BC} = -P / \sin \alpha.$$

Tātad viens no stieņiem (stienis AB) ir stiepts, bet otrs stienis (stienis BC) spiests. Izmainot leņķi α starp stieņiem AB un BC, izmainās arī piepūles šajos stieņos.



Piemērs 3.2. Noteikt piepūles zīmējumā attēlotās sistēmas stieņos AB un CD.

Atrisinājums. Izdarām zīmējumā parādīto šķēlumu 1-1. Sastādot atšķeltās daļas visu spēku projekciju summu uz horizontālu asi, konstatējam, ka saitē pa kreisi no balsta A piepūles nav.

Pielīdzinot nullei visu atšķeltās daļas momentu pret punktu A summu, iegūstam

vienādojumu

$$\sum M_A = -300 \cdot 2 + N_{CD} \cdot 3 + 600 = 0.$$

Tātad $N_{CD} = 0$.

Pielīdzinot nullei visu spēku projekciju uz vertikālo asi summu, iegūstam

$$\sum Y = N_{AB} - 300 = 0$$

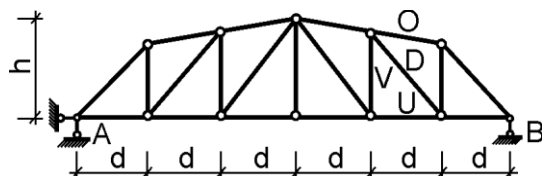
un līdz ar to $N_{AB} = 300 \text{ N}$.

3.4. Piepūļu noteikšana plakanās kopnēs

3.4.1. Vispārīgi jēdzieni

Par **kopni** sauc sistēmu, kas sastāv no taisniem, savā starpā galos savienotiem stieņiem. Savienojuma vietas sauc par mezgliem. Mezgli parasti ir stingri – metināti vai kniedēti. Kopņu uzdevums, līdzīgi kā sijām, ir pārsegt vērā ņemamus laidumus. Kopnes dod iespēju, salīdzinājumā ar sijām, taupīt materiālu, jo sijās tas tiek izmantots neracionāli. Kopnes vienmēr ir vieglākas par atbilstošām sijām pie uzdotas slodzes un laiduma (attāluma starp balstiem).

Mezglus, kas pārnes slodzi uz balstiem, sauc par balsta mezgļiem, pārējos — par starpmezglīm. Katrs kopnes stienis savieno divus mezglus. Stieņi, kuri ierobežo kopnes kontūru no augšas, veido kopnes *augšējo joslu*, bet stieņi, kuri ierobežo kopnes kontūru no apakšas, *apakšējo joslu*. Stieņus, kuri atrodas starp augšējo un apakšējo joslu, sauc par *režģi*. Režģa stieņi saista abas joslas. Režģa vertikālos stieņus sauc par *statiem*, bet slīpos — par *atgāžņiem*. Atgāžņus iedala uz centru krītošos un uz centru augošos.



att. 3.8

Attālumu starp kopnes balstu locīkļu centriem sauc par *laidumu*. Attālumu starp joslas blakus mezgļiem sauc par *paneļa garumu*. Vislielāko attālumu starp kopnes augšējo un apakšējo joslu sauc par *kopnes augstumu*. Laidumu apzīmē ar burtu **l**, paneļa garumu

— ar **d**, kopnes augstumu — ar **h** (att. 3.8).

Izšķir telpiskas un plakanas kopnes. Plakanās kopnes kā atsevišķa konstrukcija praksē

sastopamas reti. Telpisku sistēmu izveido, savienojot plakanas kopnes ar saitēm. Aprēķinot telpisku sistēmu, kas sastāv no plakanām kopnēm, parasti pieņem, ka katra kopne darbojas atsevišķi. Šeit aplūkosim tikai plakanas kopnes.

Nosakot piepūles kopnes stieņos tiek izmantotas sekojošas **izejas hipotēzes**:

1. *stieņi galos savā starpā savienoti ar ideālām locīklām;*

Pētījumi rāda, ka papildus spriegumi, kurus rada stingrie savienojumi, nav būtiski, jo sastāda tikai dažus procentus no spriegumiem locīklveida kopnēs.

2. *visa slodze pielikta tikai kopnes mezglos (arī pašsvars);*

Pamatojoties uz šo un iepriekšējo pieņēmumu visos kopnes stieņos ir iespējama tikai ass stiepe vai spiede (vienīgā iespējamā iekšējā piepūle ir aksiālspēks N).

3. *kopnei deformējoties locīklu pārvietojumi ir tik mazi, ka tos var neņemt vērā attiecībā uz kopnes formas maiņu.*

Tas dod iespēju pielietot kopnēm spēku darbības neatkarības principu.

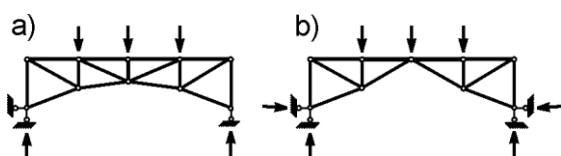
Sijās normālie spriegumi sadalās nevienmērīgi pa tās augstumu, tāpēc arī siju nestspēja tiek izmantota nepilnīgi. Turpretī kopnēs centriski spiesto vai stiepto stieņu spriegumi jebkurā stieņa šķēlumā ir vienādi, līdz ar to stieņa materiāls var tikt izmantots maksimāli ekonomiski. Tādēļ arī kopnes ir vieglākas par sijām, it sevišķi pie lieliem laidumiem.

Kopnes var balstīties uz diviem vai vairāk balstiem. Vairumam kopņu ir divi balsti, no kuriem viens ir nekustīgs locīklu balsts, otrs — kustīgs locīklu balsts.

Kopnes izmanto ēku jumtos, stāvu pārsegumos, karkasos, tiltos, celtnos, torņos un citās konstrukcijās. Visbiežāk kopnes izgatavo no tērauda vai dzelzsbetona.

3.4.2. Kopņu klasifikācija

Daudzveidīgās kopņu sistēmas iedala atsevišķos tipos pēc dažādām pazīmēm.



Pēc **balstu reakciju virziena** vertikālas slodzes gadījumā izšķir kopnes bez balstbīdes, jeb **sijveida** kopnes (att. 3.9a) un kopnes ar balstbīdi, jeb **lokveida** kopnes (att. 3.9b). Pie balstbīdes kopnēm pieder arī iekārtās kopnes.

Pēc **joslų veida** izšķir **paralēlo joslu** (att. 3.10a,b,c), **trīsstūrveida** (att. 3.10d), **trapeceveida** (att. 3.10e) un **parabolveida** (poligonālās) kopnes (att. 3.10f),.

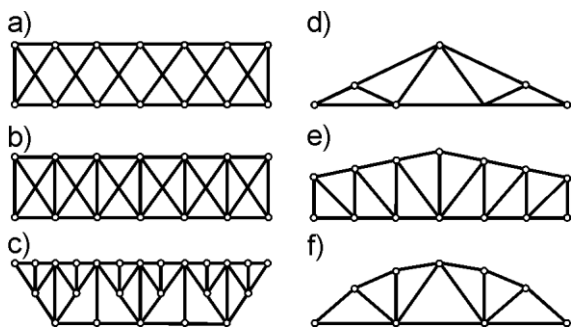
Paralēlo joslu kopnes tiek lietotas tiem, estakādēm, tilta celtnu sijām. Trīsstūrveida un trapeceveida kopnes galvenokārt izmanto ēku jumtos. Liela laiduma tiltos un ēku jumtos lieto parabolveida kopnes.

Pēc **režģa veida** izšķir kopnes ar **vienkāršu režģi** un kopnes ar **saliktu režģi**. Pie vienkārša režģa kopnēm pieder kopnes ar trīsstūrveida režģi, kurām viena virziena atgāžņi mainās ar cita virziena atgāžņiem (att. 3.10d), kopnes ar trīsstūrveida režģi un papildstatiem (att. 3.10f), kopnes ar atgāžņu režģi, kurām atgāžņi novietoti pārmaiņus ar statiem, pie tam atgāžņi var būt uz vidu krītoši (att. 3.10e) vai uz vidu kāpjoši (att. 3.8), un kopnes ar pusatgāžņu režģi (K veida režģi), kurām panelī viena atgāžņa vietā ir

divi

īsaķi atgāžņi.

Saliktu režģi iegūst, kombinējot divus vai vairākus vienkāršus režģus. Rombisko kopni (att. 3.10a) iegūst no diviem trīsstūra režģiem, krustveida kopni (att. 3.10b) iegūst no



att. 3.10

diviem atgāžņu režģiem.

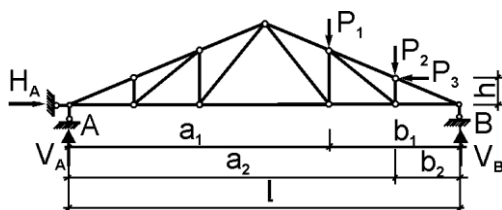
Ja trīsstūrveida režģa vai atgāžņu režģa kopni papildina ar īsiem atgāžņiem un statiem (šprengļiem), kas slogotās joslas pusē paneli sadala divās vai vairākās daļās, tad kopni sauc par **šprengļu kopni** (att. 3.10c). Šprengļi, tāpat kā papildstati kopnēs ar trīsstūrveida režģi, uzņem tikai vietējo slodzi, kas pielikta tā paneļa robežās, kurā šie papildu elementi atrodas.

Bez minētajiem iespējami arī citi, mazāk tipiski režģu veidi.

3.4.3. Kopņu analītiskais aprēķins

Balstu reakcijas un iekšējās piepūles visos kopnes stieņos nosaka no statikas līdzsvara vienādojumiem, kurus var sastādīt kā projekciju, tā momentu vienādojumu veidā.

Balstu reakciju aprēķins. Siju kopnēm nekustīgā balsta reakcijas horizontālo komponenti aprēķina no vienādojuma $\sum X = 0$, bet balstu reakciju vertikālās komponentes aprēķina tāpat kā divbalstu sijām, t. i., no vienādojumiem $\sum M_A = 0$ un $\sum M_B = 0$. Vertikālo balstu reakciju pārbaudi veic izmantojot vienādojumu $\sum Y = 0$.



att. 3.11

Kā piemēru balstu reakciju aprēķinam izmantosim kopni (att. 3.11), uz kuru darbojas kā vertikāla tā horizontāla slodze.

No nosacījuma $\sum X = 0$ nosakām, ka balsta A reakcijas horizontālā komponente $H_A = P_3$. Reakcija ir pozitīva, tātad tā

darbojas pieņemtajā virzienā.

Sastādām momentu vienādojumus pret balstiem A un B:

$$\sum M_A = -V_B l + P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 h = 0;$$

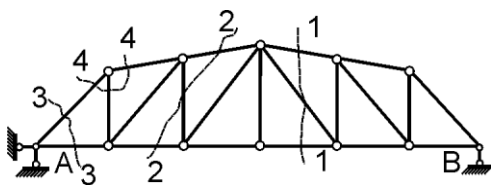
$$\sum M_B = V_A l - P_1 b_1 - P_2 b_2 - P_3 h = 0.$$

No šiem vienādojumiem nosakām vertikālās balstu reakcijas V_A un V_B . Pārbaudei varam izmantot momentu summu pret spēku P_2 un P_3 darbības līniju krustpunktu.

Ja uz kopni darbojas slīpi vērsti spēki, tad tos vispirms aizstāj ar to vertikālajām un

horizontālajām komponentēm.

Lai aprēķinātu piepūles kopnes stieņos izmanto **šķēlumu metodi** - atšķel kādu kopnes daļu (vai atsevišķu mezglu) un apskata šīs daļas līdzsvaru ārējo spēku un iekšējo piepūļu darbības rezultātā. Piepūles, kuras darbojas šķēlumā, aizstāj atmetās kopnes daļas iedarbību uz apskatāmo daļu.



att. 3.12

Piepūles attēlo ar bultām, kuras vērstas prom no mezgla, t.i., pieņem, ka visi stieņi ir stiepti. Ja aprēķinu rezultātā tiek iegūta pozitīva piepūles vērtība, stienis ir stiepts, bet, ja tiek iegūta negatīva vērtība, tad piepūles faktiskais virziens ir pretējs pieņemtajam un stienis ir spiests.

Šķēlumi, projekciju asis un momentpunkti pēc iespējas jāizvēlas tā, lai katrs līdzsvara vienādojums saturētu tikai vienu nezināmu piepūli un nebūtu jārisina vienādojumu sistēma ar vairākiem nezināmajiem.

Ieteicams izvēlēties tādus šķēlumus, lai kopne tiktu sadalīta divās daļās tā, ka tiek pārgriezti ne vairāk kā trīs stieņi (šķēlumi 1-1 un 2-2 att. 3.12) vai arī tiek izgriezts kāds no mezgliem (šķēlumi 3-3 un 4-4).

Atkarībā no izvēlēta šķēluma veida un pielietotajiem līdzsvara vienādojumiem iegūstam dažādas kopnes stieņu iekšējo piepūļu noteikšanas metodes.

Momentpunktu metode. Metode izmantojama gadījumos, ja ir iespējams pāršķelt kopni tā, lai tiktu šķelti tikai trīs stieņi, no kuriem ik divi pa pāriem krustojas vienā punktā. Kopni ar šķēlumu sadala divās daļās un vienu daļu atmet (parasti to, kurai pielikts lielāks skaits ārējo spēku). Atlikušās daļas līdzsvaru jānodrošina pagaidām nezināmajām piepūlēm pārgrieztajos stieņos (iekšējās piepūles var noteikt tikai pārgrieztajos stieņos). Atšķeltajai kopnes daļai pārgrieztos stieņu asu virzienos pieliek trīs nezināmas piepūles, attēlojot tās kā stiepes spēkus (virziens no mezgliem). Šie spēki aizstāj atmetās kopnes daļas iedarbību uz apskatāmo daļu. Nezināmās iekšējās piepūles trijos pārgrieztajos stieņos nosaka no momentu līdzsvara vienādojumiem.

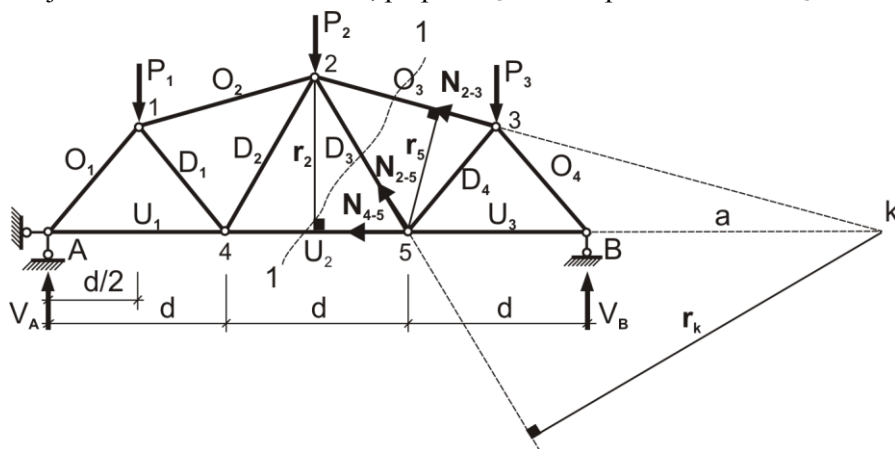
Līdzsvara vienādojumi jā sastāda tā, lai katrā vienādojumā būtu tikai viena nezināma iekšējā piepūle. Tādēļ, lai noteiktu kādu no nezināmajām piepūlēm, momentu vienādojums jā sastāda pret punktu, kurā krustojas pārējo divu piepūļu darbības līnijas. Šo punktu sauc par **momentpunktu**, jeb **Ritera punktu**. Bieži vien **momentpunktu metodi** sauc arī par **Ritera metodi** bijušā RTU profesora un celtniecības fakultātes dekāna Jakoba Ritera (strādāja Rīgā no 1873. līdz 1882. gadam) vārdā.

Atsevišķos gadījumos var šķelt arī vairāk nekā trīs stieņus, kuros piepūles nav zināmas. Tādā gadījumā aprēķināt piepūli vienā no tiem no viena vienādojuma var tikai gadījumā, ja visi pārējie stieņi krustojas vienā punktā (vai piepūles kādos stieņos jau ir zināmas). Momentu vienādojums jā sastāda attiecībā pret šo pārējo stieņu krustpunktu.

Piemērs 3.3. Aprēķināt piepūles att. 3.13 parādītajai kopnei ar šķēlumu 1-1 pāršķeltajos stieņos.

Atrisinājums. Atmetam kopnes kreiso daļu un analizējam labās daļas līdzsvaru. Nezi-

nāmās piepūļu vērtības kopnes labajai daļai pieliekam pozitīvā virzienā (no mezgliem), pieņemot, ka stieņi ir stiepti. Gan stieņus, gan piepūles atbilstošajos stieņos augšējās joslas stieņiem ir pieņemts apzīmēt ar burtu O, apakšējās joslas stieņiem ar U, statiem ar V, atgāžņiem ar D. Otrs stieņu un piepūļu apzīmēšanas variants ir balstīts uz mezglu numerācijas izmantošanu. Piemēram, piepūli O_3 varam apzīmēt arī kā N_{2-3} .



att. 3.13

Lai iegūtu piepūles vērtību augšējās joslas stienī O_3 , par momentpunktu jāņem punkts, kurā krustojas divu pārējo pārgrieztu stieņu darbības līnijas, tas ir mezgls 5. Šādā gadījumā līdzsvara vienādojums saturēs tikai vienu nezināmu piepūli – O_3 :

$$\sum M_5 = P_3 \cdot d / 2 - V_B \cdot d - O_3 \cdot r_5 = 0,$$

kur r_5 – piepūles O_3 plecs pret mezglu 5 (minimālais attālums no spēka darbības līnijas līdz punktam, pret kuru tiek rēķināts moments).

Iegūtā piepūles O_3 vērtība

$$O_3 = (P_3 / 2 - V_B) d / r_5$$

ir negatīva, tātad stienis O_3 ir spiests (raksturīgi stieņiem, kuri veido augšējo joslu).

Lai iegūtu piepūles vērtību apakšējās joslas stienī U_2 par momentpunktu līdzīgā veidā jāņem punkts, kurā krustojas divu pārējo pārgrieztu stieņu darbības līnijas. Tas ir mezgls 2:

$$\sum M_2 = V_B \cdot 3d / 2 - P_3 \cdot d - U_2 \cdot r_2 = 0.$$

Iegūtā piepūles U_2 vērtība

$$U_2 = (3V_B / 2 - P_3) d / r_2$$

ir pozitīva, tātad stienis U_2 ir stiepts (raksturīgi stieņiem, kas veido apakšējo joslu).

Nosakot piepūli atgāznī D_3 , momentpunkts atrodas ārpus kopnes robežām – punktā k:

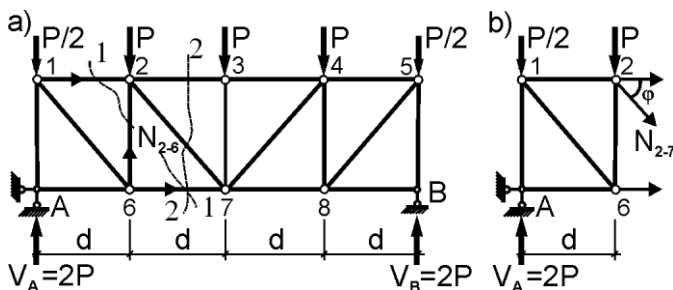
$$\sum M_k = P_3 \cdot (a + d / 2) - V_B \cdot a - D_3 \cdot r_k = 0.$$

Iegūstam piepūles vērtību

$$D_3 = [P_3(a + d/2) - V_B a] / r_k.$$

Atgāžņi var būt gan stiepti gan spiesti.

Projekciju metode. Lietojot projekciju metodi, kopni ar šķēlumu sadala divās daļās un apskatāmajai kopnes daļai pielieto projekciju līdzsvara vienādojumus uz vienu vai divām asīm. Projekciju metodi ir lietderīgi lietot, piemēram, ja kādā kopnes stienī piepūli nevar noteikt ar momentpunktu metodi, kā tas ir kopnes ar paralēlām joslām gadījumā.



att. 3.14

Piemērs 3.4. Noteiksim piepūles statā 2-6 un atgāznī 2-7 attēlā 3.14 dota- jai kopnei ar paralēlām joslām.

Atrisinājums. Piepūles režģa stieņos lietderīgi noteikt izmantojot projekciju metodi. Lai noteiktu piepū-

li statā 2-6 šķēlam kopni ar šķēlumu 1-1 un apskatām kopnes kreisās daļas līdzsvaru. Sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumu uz vertikālu asi

$$\sum Y = P/2 - V_A - N_{2-6} = 0,$$

no kura, ņemot vērā, ka $V_A = 2P$, iegūstam

$$N_{2-6} = -3P/2.$$

Tātad stienis N_{2-6} ir spiests.

Lai noteiktu piepūli atgāznī 2-7, šķēlam kopni ar šķēlumu 2-2 (att. 3.14b) un sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumu uz vertikālu asi kreisajai kopnes daļai

$$\sum Y = V_A - P/2 - P - N_{2-7} \sin \varphi = 0,$$

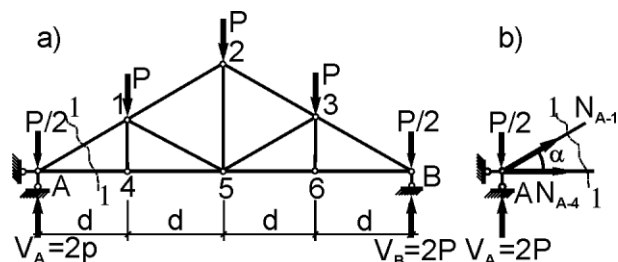
no kura iegūstam

$$N_{2-7} = P/2 \sin \varphi.$$

Stienis N_{2-7} ir stiepts. Nosakot N_{2-7} vērtību, līdzsvara vienādojumā tika izmantota piepūles N_{2-7} vertikālā komponente $N_{2-7} \sin \varphi$.

Mezglu izgriešanas metode. Mezglu izgriešanas metode ir projekciju metodes speciālgadījums, kad šķēlumu izvēlas tā, lai no kopnes atdalītu atsevišķu mezglu. Mezglu izgriešanas metodi var lietot, ja apskatāmajā mezglā saejošajos stieņos ir ne vairāk kā divas nezināmas piepūles, jo mezglam var sastādīt tikai divus neatkarīgus projekciju līdzsvara vienādojumus. Šīs metodes trūkums ir tas, ka kļūda, kas pielaista aprēķinot piepūli kādā no stieņiem, var iespaidot pārējo stieņu piepūļu aprēķinu. Tādēļ drošāk iekšējo piepūļu noteikšanai lietot momentpunktu un projekciju metodes, bet mezglu

izgriešanas metodi atstāt pārbaužu veikšanai. Mezglu izgriešanas metodi ieteicams lietot tikai atsevišķiem mezgliem, kuriem šīs metodes pielietošana ir lietderīga.



att. 3.15.

Piemērs 3.5. Noteiksim attēlā 3.15 parādītajai trīsstūrveida kopnei piepūles stieņos A-1 un A-4, izmantojot mezglu izgriešanas metodi.

Atrisinājums. Lai aprēķinātu piepūli stienī A-1, sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumu uz vertikālu asi kre-

sajai atšķeltajai kopnes daļai (att. 3.15b):

$$\sum Y = P/2 - 2P - N_{A-1} \sin \alpha = 0$$

No šī vienādojuma iegūstam

$$N_{A-1} = -3P/2 \sin \alpha.$$

Tātad, stienis A-1 ir spiests un pareizais piepūles N_{A-1} virziens ir pretējs izvēlētajam (tas ir vērsts uz mezglu A).

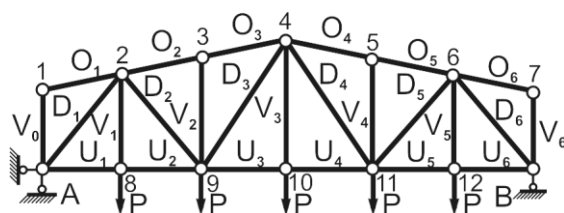
Lai aprēķinātu piepūli stienī A-4, sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumu uz horizontālu asi:

$$\sum X = N_{A-4} + N_{A-1} \cos(\alpha) = N_{A-4} - 3P \cos \alpha / 2 = 0.$$

No šī vienādojuma iegūstam, ka

$$N_{A-4} = 3P \cos \alpha / 2.$$

Stienis A-4 ir stiepts.



att. 3.16

Turpinot att. 3.15 parādītās kopnes aprēķinu ar mezglu izgriešanas metodi kā nākošo varētu izvēlēties mezglu 4, pēc tam mezglu 1, mezglu 2, mezglu 5, un tā tālāk, kamēr piepūles visos stieņos būtu noteiktas. Diemžēl kļūda, kas radusies no-sakot piepūles kāda mezgla stieņos, radīs kļūdu arī visu pārējo pēc tam

analizējamo mezglu piepūļu aprēķinā.

Piepūļu noteikšanas speciālie gadījumi. Daļā kopnes stieņu iekšējās piepūles var noteikt bez speciāliem aprēķiniem atbilstoši sekojošām īpašībām (var pierādīt izmantojot mezglu izgriešanas metodi):

1. Ja neslogotā mezglā saiet divi stieņi, tad piepūles šajos stieņos ir vienādas ar nulli;

Šim nosacījumam attēlā 3.16 atbilst mezgli 1 un 7 un līdz ar to $V_0 = O_1 = O_6 = V_6 = 0$.

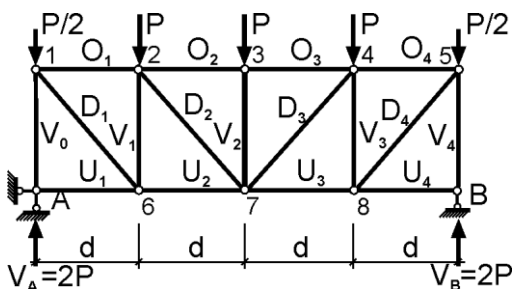
2. Gadījumā, kad mezglā saiet divi stieņi un spēks, kas vērsts viena stieņa virzienā, tad piepūle šajā stienī ir vienāda ar spēku pēc moduļa un tam pretēji vērsta (attiecībā pret mezglu), bet piepūle otrā stienī ir vienāda ar nulli;

Šim nosacījumam attēlā. 3.17 atbilst mezgli A un B: $V_0=V_4=2P$ un ir spiesti, jo piepūlei attiecībā pret mezglu ir jābūt pretēji vērstai spēkam, tas ir virzienā uz mezglu, $U_1=U_4=0$.

3. Gadījumā, kad neslogotā mezglā saiet trīs stieņi, no kuriem divi atrodas uz vienas taisnes, tad piepūles šajos stieņos ir vienādas pēc moduļa un pretēji vērstas (attiecībā pret mezglu), bet piepūle trešajā stienī ir vienāda ar nulli;

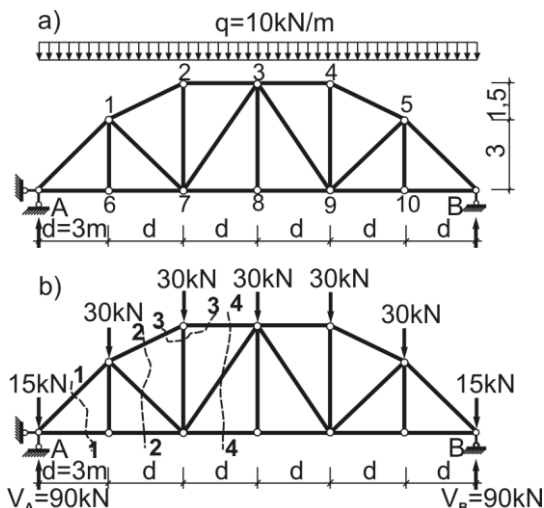
Šim nosacījumam attēlā. 3.16 atbilst mezgli 3 un 5 un līdz ar to ir spēkā nosacījumi $O_2=O_3$, $O_4=O_5$, $V_2=V_4=0$.

4. Gadījumā, kad mezglā saiet trīs stieņi, no kuriem divi atrodas uz vienas taisnes un spēks, kas vērsts trešā stieņa virzienā, tad piepūle trešajā stienī ir vienāda ar spēku pēc moduļa un tam pretēji vērsta, bet piepūles pirmajos divos stieņos ir vienādas pēc moduļa un pretēji vērstas.



att. 3.17

sniega vai vēja spiedienam). Elementos, kas ir nullstieņi attiecībā uz vienu slodzi, citas slodzes gadījumā var rasties piepūles. Sastopami arī tādi stieņi, kuros piepūles nerodas neatkarīgi no slodzes veida. Šādiem stieņiem ir konstruktīva nozīme un tos lieto citu stieņu, it īpaši garu spiesto stieņu brīvā garuma samazināšanai.



att. 3.18

Šim nosacījumam attēlā. 3.16 atbilst mezgli 8, 10 un 12.

Līdz ar to $U_1=U_2$, $U_3=U_4$, $U_5=U_6$, $V_1=V_3=V_5=P$ (stiepti stieņi). Analogs mezgls attēlā 3.17 ir mezgls 3.

Nullstieņi. Aprēķinot kopnes, sastopami gadījumi, kad dažos stieņos pie dotās slodzes iekšējās piepūles nerodas. Tādus stieņus sauc par nullstieņiem. Kopnes aprēķina dažādām slodzēm (pašsvaram,

Piemērs 3.6. Aprēķināt piepūles att. 3.18 dotās laužas kontūras kopnes stieņos. Kopne slogota pa augšējo joslu ar vienmērīgi izkliedētu slodzi $q=10\text{kN/m}$. Kopnes augstums $h=4,5\text{m}$, bet laidums $l=6d=18\text{m}$.

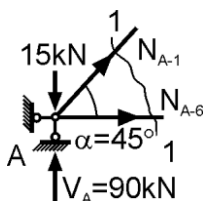
Atrisinājums. Uzsākot kopnes aprēķinu izkliedētā slodze jāpārveido par koncentrētiem spēkiem, kas pielikti kopnes mezglos. Ja izkliedētā slodze izvietota paneļos uz abām pusēm no mezgla, koncentrētā spēka lielums ir $q \cdot d=30\text{ kN}$, ja uz vienu

pusi – $q \cdot d/2 = 15 \text{ kN}$ (att. 3.18b).

Nosakot balstu reakcijas iegūsim, ka abas reakcijas ir vienādas ar 90 kN. Tā kā gan kopne, gan slodze ir simetriskas, pietiek noteikt piepūles vienai kopnes pusei, piemēram, kreisajai. Labajā pusē simetriski novietotos stieņos piepūles būs analogas.

Aprēķinu ir lietderīgi sākt novērtējot, vai kādā no mezgliem neizpildās piepūļu noteikšanas speciālgadījumu noteikumi. Atbilstoši piepūļu noteikšanas speciālgadījumu trešajam punktam (neslogotā mezglā saiet trīs stieņi) konstatējam, ka :

$$N_{1-6} = N_{3-8} = 0; \quad N_{A-6} = N_{6-7}; \quad N_{7-8} = N_{8-9}.$$



Pārējo piepūļu noteikšanai varam izmantot dažādas metodes.

Piepūles stieņos A-1 un A-6 varam noteikt ar šķēlumu 1-1 izgriežot mezglu A un sastādot tam spēku projekciju līdzsvara vienādojumus uz vertikālu un horizontālu asi. Sākotnēji pieņemam, ka stieņi ir stiepti, t.i. piepūles vērstas no mezgla A.

Projekciju summa uz vertikālu asi dod vienādojumu

$$\sum Y = 15 - 90 - N_{A1} \sin 45^\circ = 0,$$

no kura iegūstam

$$N_{A1} = (15 - 90) / \sin(45^\circ) = -106,1 \text{ kN}.$$

Tātad, stienis A-1 ir spiests un pareizais piepūles N_{A-1} virziens ir pretējs pieņemtajam (tātad uz mezglu).

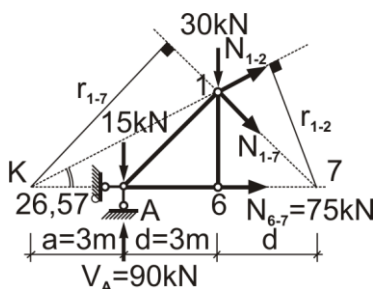
Lai aprēķinātu piepūli stienī A-6, sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumu uz horizontālu asi:

$$\sum X = N_{A6} + N_{A1} \cos 45^\circ = 0,$$

no kura iegūstam

$$N_{A6} = -N_{A1} \cdot \cos 45^\circ = 75 \text{ kN}.$$

Stienis A-6 ir stiepts.



Lai noteiktu piepūles N_{1-2} un N_{1-7} izvēlamies šķēlumu 2-2. Piepūles N_{1-2} aprēķinam par momentpunktu izvēlamies punktu, kurā krustojas divi pārējie pārgrieztie stieņi, tas ir punktu 7, un sastādām momentu līdzsvara vienādojumu:

$$\sum M_7 = N_{1-2} \cdot r_{1-2} + V_A \cdot 6 - 30 \cdot 3 - 15 \cdot 6 = 0.$$

Nemot vērā, ka $r_{12} = 4,03 \text{ m}$, no šī vienādojuma iegūstam:

$$N_{1-2} = -89,44 \text{ kN}.$$

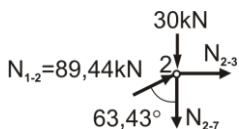
Tā kā rezultāts ir negatīvs, tad stienis 1-2 ir spiests.

Piepūles N_{1-7} noteikšanai izmantojamais momentpunkts K atrodas ārpus kopnes robežām. Sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu k, iegūstam:

$$\sum M_k = N_{1-7} \cdot r_{1-7} + 15 \cdot 3 + 30 \cdot 6 - V_A \cdot a = 0.$$

Nemot vērā, ka $r_{1-7}=6,36$ m, iegūstam:

$$N_{1-7} = 7,08 \text{ kN}.$$



Pieņūpū N₂₋₃ un N₂₋₇ noteikšanu veicam izgriežot ar šķēlumu 3-3 mezglu 2. Zināmo pieņūpi N₁₋₂ pieliekam pareizā virzienā, t.i. virzienā uz mezglu, jo stienis 1-2 ir spiests.

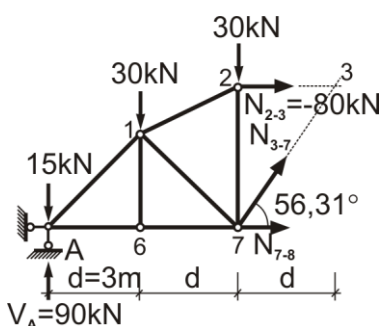
Mezglam 2 sastādām spēku projekciju līdzsvara vienādojumus uz vertikālu un horizontālu asi:

$$\sum Y = -N_{2-7} - 30 + N_{1-2} \cdot \cos 63,43^\circ = 0;$$

$$\sum X = N_{2-3} + N_{1-2} \cdot \sin 63,43^\circ = 0.$$

No šiem vienādojumiem iegūstam:

$$N_{2-7} = 10 \text{ kN} \text{ un } N_{2-3} = -80 \text{ kN}.$$



Pieņūpū N₃₋₇ un N₇₋₈ noteikšanai izmantojam šķēlumu 4-4. Tā kā trešajā panelī augšējā un apakšējā kopnes josla ir paralēlas, pieņūpi N₃₋₇ noteikšanai lietderīgi izmantot spēku projekciju summu uz vertikālu asi:

$$\sum Y = N_{3-7} \cdot \sin 56,31^\circ + V_A - 15 - 30 - 30 = 0,$$

no kuras iegūstam:

$$N_{3-7} = -18 \text{ kN}.$$

Tātad stienis 3-7 ir spiests.

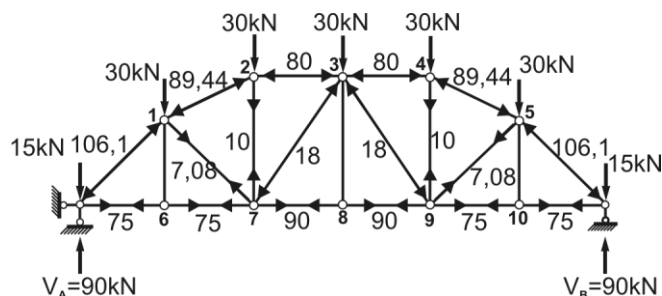
Pieņūpi N₇₋₈ varam iegūt par momentpunktu izmantojot mezglu 3. Tādā gadījumā iegūstam:

$$\sum M_3 = N_{7-8} \cdot 4,5 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + 15 \cdot 9 - V_A \cdot 9 = 0.$$

No šī vienādojuma nosakām, ka

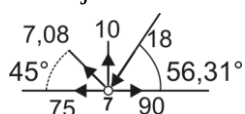
$$N_{7-8} = 90 \text{ kN}.$$

Esam aprēķinājuši pieņūpi kopnes kreisās puses stieņos. Simetriski slogotas simetriskas kopnes gadījumā simetriskos stieņos pieņūpi ir vienādas.



Aprēķina rezultātus attēlojot grafiskā veidā stieptos stieņus parādam ar bultām vērstām no mezgliem, spiestos ar bultām vērstām uz mezgliem, nullstieņus bez bultām. Katram stienim pievienojam piepūles skaitlisko vērtību (pozitīvu neatkarīgi

no tā vai stienis ir stiepts vai spiests). Jāparāda arī pieliktās ārējās slodzes un balstu reakcijas.



Atrasto piepūļu pārbaudi varam veikt izmantojot mezglu izgriešanas metodi. Piemēram, izgriežot 7 mezglu, pārbaudei iegūsim sekojošus līdzsvara vienādojumus:

$$\sum X = 75 + 7,08 \cos 45^\circ + 18 \cos 56,31^\circ - 90 = 0;$$

$$\sum Y = 10 + 7,08 \sin 45^\circ - 18 \sin 56,31^\circ = 0.$$

Kopnes aprēķins starpmezglu slodzes gadījumā. Praksē sastopami gadījumi, kad slodze pielikta starp mezgliem un darbojas tieši uz kopnes stieni. Aprēķinot kopni, uz kuru darbojas starpmezglu slodze, šo slodzi aizstāj ar divām komponentēm, kuras tiek pieliktas mezgliem slogotā paneļa galos. Pēc tam nosaka aksiālspēkus visos kopnes stieņos, tai skaitā arī ar starpmezglu slodzi slogotajos. Stieņos, kuriem pielikta starpmezglu slodze, darbojas ne tikai aksiālspēki, bet arī lieces momenti, un šie stieņi tiek vienlaicīgi stiepti (spiesti) un liekti. Lai aprēķinātu lieces momentu jebkurā apskatāmā stieņa šķēlumā, stieni uzskata par brīvi balstītu divbalstu siju, uz kuru darbojas starpmezglu slodze.

Pilnu spriegumu stienī, kas slogots ar starpmezglu slodzi, aprēķina kā summu, kuru sastāda kopnes stieņa aksiālspēkam atbilstošais spriegums un liektas sijas normālspriegums:

$$\sigma = N/A \pm M/W,$$

kur N - ass spēks stienī;

A - stieņa šķērsgriezuma laukums;

M - lieces moments;

W - stieņa šķērsgriezuma pretestības moments.

Lai izvairītos no kopnes stieņu lieces, starpmezglu slodzi parasti cenšas pārnest uz kopnes mezgliem ar konstruktīviem paņēmieniem.

3.4.4. Piepūļu salīdzinājums dažāda veida kopnēm

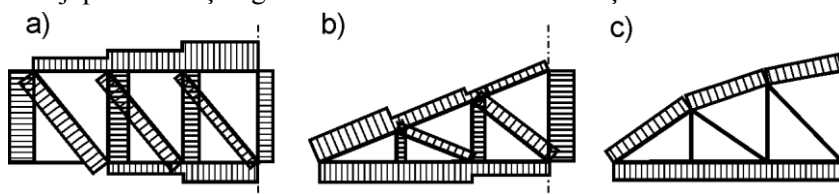
Salīdzinot dažāda veida kopnes, var konstatēt, ka ekonomiski izdevīgākas ir tādas kopnes, kurām mazāks svars, mazāks mezglu skaits un vienkāršāks mezglu izveidojums.

Kopnes svars atkarīgs kā no stieņu šķērsgriezuma, tā arī no to summārā garuma. Salīdzināsim trīs simetrisku siju kopņu tipus — paralēlo joslu, trīsstūrveida un parabolveida kopni, kam laidums, augstums un paneļu skaits vienāds, pieņemot, ka uz tām darbojas

vienāda lieluma simetriska lejupvērsta mezglu slodze pielikta pa augšējo joslu. Šādās kopnēs augšējā josla ir spiesta, apakšējā josla — stiepta, bet statos un atgāžņos aksiāls spēku zīmes ir pretējas. Kopnes augstumam samazinoties, joslu stieņos piepūles pieaug.

Aksiāls spēku epīras katram kopņu veidam (puskopnei) parādītas att. 3.19a, b, c. Epīrās katra iesvītrotā laukuma platums noteiktā mērogā attēlo arī attiecīgā kopnes stieņa teorētisko šķērsriezuma laukumu.

Paralēlo joslu kopnes. Šīm kopnēm (att. 3.19a) piepūles joslās vidējos paneļos ir lielākas nekā malējos, bet piepūles režģa stieņos — vidējos paneļos mazākas nekā malējos. Uz vidu kāpjošie atgāžņi ir spiesti, bet uz vidu krītošie atgāžņi — stiepti. Aksiāls spēkiem statos un atgāžņos zīmes ir pretējas. Tērauda kopnēm ieteicamāks ir režģis, kurā garākie stieņi (atgāžņi) ir stiepti, bet īsākie stieņi (stati) — spiesti, jo īsākiem stieņiem mazāk jāpalielina šķērsriezums noturības zuduma dēļ.



att. 3.19

Paralēlo joslu kopnēm stieņu kopējais garums ir lielāks, bet piepūles stieņos un stieņu šķērsriezumi — mazāki nekā tāda paša laiduma trīsstūrveida kopnēs. To pašsvars ir mazāks nekā trīsstūrveida kopnēm.

Ja joslu stieņu garums atbilst paneļa garumam, tad katrā mezglā jāizveido salaide, ja joslu stieņus ņem vairāku paneļu garumā, tad šo stieņu materiāls malējos paneļos tiek nepilnīgi izmantots, toties salaižu skaits samazinās. Šo kopņu elementus var standartizēt.

Paralēlo joslu kopnes lieto tilta celtni sijām, ēku karkasos, jumta kopņu balstīšanai, tiltu būvniecībā tiltiem ar laidumu līdz 50 m.

Trīsstūrveida kopnes. Šīm kopnēm (att. 3.19b) spēki joslās vidējos paneļos ir mazāki nekā malējos, bet spēki režģa stieņos — vidējos paneļos lielāki nekā malējos. Uz vidu kāpjošie atgāžņi ir stiepti, bet uz vidu krītošie atgāžņi — spiesti. Tā kā piepūles un līdz ar to arī stieņu šķērsriezumi katrā panelī ir citādi, tad katrā mezglā jāizveido savienojums. Balstu mezglu konstrukcija ir sarežģīta, jo malējos joslu stieņos ir vislielākās piepūles un leņķis starp joslām ir šaurs.

Salīdzinājumā ar citiem kopņu tipiem trīsstūrveida kopnēm stieņu kopējais garums gan ir mazāks, bet joslu stieņu šķērsriezumi ir vislielākie un tās ir vissmagākās.

Trīsstūrveida kopnes lieto divslīpu jumtiem, ja nepieciešams samērā stāvs jumts.

Parabolveida kopnes. Šīm kopnēm (att. 3.19c) augšējās joslas mezgli atrodas uz parabolām. Piepūles visos augšējās joslas stieņos ir vienādas, tāpat arī visos apakšējās joslas stieņos, bet režģa stieņos piepūles nerodas. Ja simetriska slodze pielikta arī apakšējās mezglos, tad visos statos rodas nelielas, vienādas piepūles, bet atgāžņos piepūles nerodas. Šī kopne darbojas līdzīgi lokam ar savilci. Visu augšējās joslas stieņu šķērsriezumi, tāpat arī visu apakšējās joslas stieņu šķērsriezumi ir vienādi, režģa stieņu šķērsriezumi ir nelieli. Paraboliskām kopnēm izliece ir lielāka nekā pārējiem kopņu tipiem. Katrā augšējās joslas mezglā jāizveido salaide.

Ja konstruē kopni, kurā tikai katrs otrais augšējās joslas mezgls atrodas uz parabolas, iegūst pusparabolisku kopni. Salīdzinājumā ar parabolisko kopni piepūles stieņos šajā kopnē izmainās nedaudz, bet salaižu skaits augšējā joslā ir divas reizes mazāks.

Parabolisko kopņu svars ir mazāks nekā pārējiem kopņu tipiem. Tās lieto tiltu būvniecībā tiltiem ar laidumu līdz 150 m, kā arī liela laiduma jumtu konstrukcijām.

Rūpniecības ēku jumtiem lieto arī metāla trapecveida kopnes ar trīsstūra režģi, jo tām ir vienkāršāks mezglu izveidojums un spēki joslās mazāki nekā trīsstūrveida kopņu joslās.

4. MATERIĀLU MEHĀNISKĀS ĪPAŠĪBAS

Konstrukciju droša ekspluatācija lielā mērā atkarīga no pielietoto materiālu fizikāli mehāniskajām īpašībām. Šīs īpašības tiek pētītas laboratorijās, noslogojot paraugstieņus līdz sagrūšanai.

Svarīgākās materiālu mehāniskās īpašības, kuru kvantitatīvos raksturotājus nosaka eksperimentāli, ir

- **elastība** — materiāla spēja atgūt sākotnējo formu un izmērus pēc slodzes noņemšanas;
- **plastiskums** — materiāla spēja pie noteiktām slodžu vērtībām nesagrūstot iegūt lielas paliekošās deformācijas;
- **stiprība** — materiāla spēja nesagrūstot pretoties slodžu iedarbībai tikmēr, kamēr spriegumi nesasniedz noteiktu kritisku robežlielumu;
- **cietība** — materiāla spēja pretoties cita ķermeņa iespiešanai tajā.

Materiāliem, kurus lieto paaugstinātu temperatūru apstākļos, piemēram, tvaika katlos, turbīnās, kurtuvēs u.c., mehāniskās īpašības nosaka pie augstām temperatūrām.

Mūsdienās pielietojamo konstruktīvo materiālu īpašību mehānisko pārbaudžu dažādību nosaka plašais šo materiālu sortiments un to ekspluatācijas īpatnības. Pēc ārējo spēku pielikšanas rakstura tās iedalās statiskajās pārbaudēs, dinamiskajās pārbaudēs (kā ar ciklisku tā arī ar triecienvēda slodzi) un materiāla ilgzturības pārbaudēs, kad slodze iedarbojas ilglaicīgi.

Mehāniskās pārbaudes var klasificēt pēc deformāciju veida. Paraugstieņu pārbaudes tiek veiktas **stiepē, spiedē, cirpē, vērpē** un **liecē**. Visplašāk pielieto materiālu statiskās pārbaudes stiepē, jo šajās pārbaudēs iegūtie mehāniskie raksturotāji ļauj samērā precīzi noteikt materiāla izturēšanos arī citos deformāciju veidos; pie tam stiepes pārbaudes vieglāk realizēt.

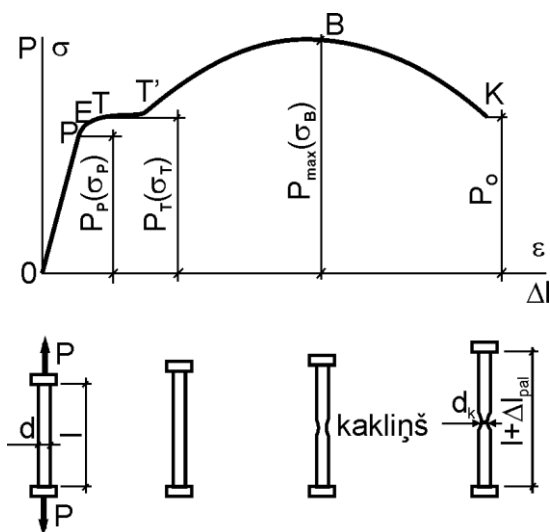
Pārbaudi spiedē izdara galvenokārt tādiem materiāliem kā akmens, betons, ķieģeļi, u.c., kuri arī konstrukcijās vairumā gadījumu strādā spiedes apstākļos.

Pēc mehāniskajām īpašībām materiālus var iedalīt divās pamatgrupās — **plastiskos** un **trauslos** materiālos. Plastiskie materiāli pirms sagrūšanas iegūst lielas paliekošās deformācijas. Trausliem materiāliem praktiski līdz sabrukumam paliekošās deformācijas neveidojas. Parastos apstākļos plastiski materiāli ir mazoglekļa tērauds, bronza, varš, bet trausli materiāli — dažas speciālas tērauda šķirnes, čuguns, akmens, stikls, ķieģeļi.

4.1. Mazoglekļa tērauda stiepes diagramma un tās raksturīgie punkti

Lai iegūtu uzskatāmu priekšstatu par materiāla izturēšanos stiepes vai spiedes apstākļos, konstruē līkni, kas raksturo sakarību starp pārbaudāmā paraugstieņa pagarinājumu (saīsinājumu) un darbojošos spēku lielumu, t.s. stiepes vai spiedes diagrammu. Šādu diagrammu var iegūt, pārbaudot materiāla paraugstieni speciālā mašīnā, kas apgādāta ar ierīcēm, kuras automātiski pieraksta paraugstieņa stiepes un spiedes gaitu. Uz diagrammas abscisu ass atliek pārbaudāmā paraugstieņa absolūto pagarinājumu vai saīsinājumu Δl , uz ordinātu ass — pārvietojumam atbilstošo spēka P vērtību.

Pārbaudāmā paraugstieņa šķēlumos aksiālspēks ir skaitliski vienāds ar ārējo, stiepes spēku P lielumu: $N = P$.

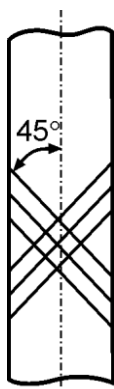


att. 4.1

Mazoglekļa tērauda paraugstieņa stiepes diagramma redzama att. 4.1. Zem diagrammas parādīta paraugstieņa forma atbilstoši dažādām spēka vērtībām. Līdz spēka lielumam, kas atbilst diagrammas punktam P, pastāv lineāra sakarība starp pagarinājuma un spēka lielumiem — materiāls pakļaujas Huka likumam, t.i., deformācija proporcionāla spēkam. Aiz punkta P Huka likums vairs nav spēkā: pagarinājums aug intensīvāk nekā spēks — taisne OP pāriet līknē PET, kuras izliekums vērsts uz augšu. Spriegumu, kas atbilst diagrammas punktam P un ir vienāds ar

$$\sigma_P = P_P / A \quad (A \text{ — paraugstieņa}$$

šķērsgriezuma sākotnējais laukums) sauc par materiāla proporcionalitātes robežu.



att. 4.2

Punkts E atbilst materiāla elastības robežai. Elastības robeža ir lielākais spriegums, pie kura paliekošā deformācija salīdzinājumā ar elastīgo deformāciju vēl ir tik niecīga, ka materiālu var uzskatīt par elastīgi deformētu.

Līkne PET punktā T pāriet horizontālā vai gandrīz horizontālā taisnē TT', kas norāda uz ievērojamu paraugstieņa garuma pieaugumu, spēkam P nemainoties vai ļoti nedaudz pieaugot. Par šo posmu mēdz teikt, ka materiāls tek.

Spriegumu $\sigma_T = P_T / A$ (to nosaka diagrammas posma TT' ordināte), pie kura sākas materiāla tecēšana, sauc par tecēšanas robežu. Pie šīs sprieguma vērtības būtiski aug paliekošās (plastiskās) deformācijas. Spriegumiem sasniedzot tecēšanas robežu, paraugstieņa pulētā virsma pakāpeniski kļūst blāva un matēta. Uz virsmas parādās līnijas, kas vērstas apmēram 45° leņķī pret paraugstieņa asi (att. 4.2). Šīs līnijas sauc par Černova — Lidersa līnijām, to parādīšanās liecina par materiāla kristālu nobīdes veidošanos.

Aiz posma TT' diagrammā (att. 4.1) seko lēzens līknes posms T'B. Materiāls atkal sāk pretoties deformācijas pieaugumam, bet sakarība starp deformāciju un spēku, protams, vairs nepakļaujas Huka likumam. Līdz ar elastīgo pagarinājumu paraugstienis iegūst arī ievērojamu paliekošo pagarinājumu.

Diagrammas posmu T'B sauc par nocietināšanās zonu. Kaut gan šajā posmā deformācijas attīstās pietiekami intensīvi, pretstatā posmam TT' materiāls atkal sāk pretoties deformācijām.

Diagrammas punkts B atbilst maksimāli iespējamai spēka vērtībai $P_{\max}$. Sasniedzot šo

spēka vērtību, paraugstienī veidojas krass vietējs sašaurinājums, t.s. kakliņš, iezīmējas topošā pārrāvuma vieta. Paraugstienis stipri pagarinās uz kakliņa plastiskās deformācijas rēķina. Kakliņa šķērsriezums samazinās, tāpēc paraugstieņa pārraušanai vajadzīgs spēks, kas ir mazāks par $P_{\max}$. To parāda diagrammas posms BK, kas noliecas uz leju, tuvāk abscisu asij. Faktiskie spriegumi kakliņa šķēlumā nesamazinās, bet visu laiku aug, jo kakliņa šķērsriezuma laukums samazinās intensīvāk nekā spēks P . Paraugstieņa sagrūšana notiek pie noteiktas spēka vērtības P_0 , kas ir mazāka par $P_{\max}$.

Lielums $\sigma_K = P_0/A_K$, kur A_K — paraugstieņa šķērsriezuma laukums pārrāvuma vietā, nosaka pārraušanas faktisko spriegumu.

Par plastisku materiālu (tiem pieder arī mazoglekļa tērauds) stiprības raksturotāju stiepes gadījumā uzskata tecēšanas robežu $\sigma_T = P_T/A$, jo lielu paliekošo deformāciju rašanās samazina konstrukcijas elementa stiprību.

Pārbaudes laikā konstatētā lielākā spēka $P_{\max}$ un paraugstieņa šķērsriezuma sākotnējā laukuma A attiecību $\sigma_B = P_{\max}/A$ sauc par materiāla nosacīto stiprības robežu. Šo robežspriegumu var uzskatīt par lielāko nosacīto, t.i., pret šķērsriezuma sākotnējo laukumu attiecināto, spriegumu, kuru materiāls izturējis pārbaudes laikā. Nosacītās stiprības robežas lielums vienmēr ir diezgan ievērojami mazāks par pārraušanas faktisko spriegumu. Nosacītās stiprības robežas, bet nevis faktisko spriegumu izmantošana par plastiska materiāla stiepes praktisku raksturotāju izskaidrojama ar to, ka par stieņa stiprību var spriest tikai pēc tā šķērsriezuma sākotnējā laukuma, jo tikai tam var iegūt noteiktus datus (no rasējuma vai izmērot paraugstieni).

Lai vērtētu stieņa stiprību pēc pārraušanas faktiskā sprieguma lieluma, jāzina kakliņa šķērsriezuma laukums pārrāvuma vietā. Šo laukumu nevar precīzi nosacīt iepriekš, projektējot un izgatavojot stieni. Turklāt nosacītās stiprības robežas lielums, reizināts ar projektējamā vai izgatavojamā stieņa šķērsriezuma sākotnējo laukumu, sniedz pietiekami precīzu priekšstatu par tā vislielākā stiepes spēka lielumu, kuru stienis var izturēt nesagrūstot. Šis spēks raksturo stieņa stiprību.

No stiepes diagrammas, kas zīmēta P un Δl koordinātēs, dalot visas ordinātu vērtības ar A , bet abscisu vērtības ar l , var iegūt diagrammu, kas zīmēta σ un ε koordinātēs, kur

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Paraugstieņa šķērsriezuma sākotnējais laukums A un sākotnējais garums l ir pastāvīgi lielumi, tāpēc jaunajās koordinātēs zīmētās stiepes diagrammas izskats ir tāds pats kā P un Δl koordinātēs (att. 4.1), tikai ordinātu un abscisu mērogi ir citādi.

Stiepes diagramma σ un ε koordinātēs ir ērtāka un labāk atspoguļo materiāla īpašības, jo šī diagramma nav atkarīga no pārbaudāmā paraugstieņa ģeometriskajiem izmēriem — tā garuma l un šķērsriezuma laukuma A .

4.2. Plastiskuma raksturotāji. Uzkalde

Mazoglekļa tēraudu un citus plastiskus materiālus pārbaudot stiepē, vienlaikus ar proporcionalitātes robežas, tecēšanas robežas un nosacītās stiprības robežas vērtībām no-

saka arī paliekošo relatīvo pagarinājumu δ un šķērsriezuma laukuma relatīvo sašaurinājumu ψ pārrāvuma vietā. Šie lielumi ir materiāla plastiskuma raksturotāji. Abus šos lielumus izsaka procentos pēc formulām

$$\delta = \frac{\Delta l_{pal}}{l} \cdot 100\%;$$

$$\psi = \frac{A - A_K}{A} \cdot 100\%,$$

kur Δl_{pal} — paliekošais pagarinājums pārrāvuma gadījumā;

A_K — šķērsriezuma laukums pārrāvuma vietā.

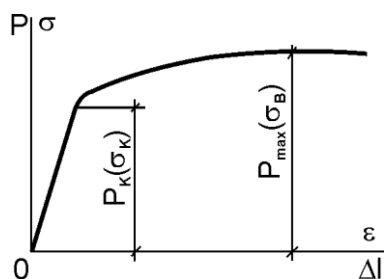
Paraugstienim ar apaļu šķēlumu $A_K = \frac{\pi d_K^2}{4}$;

Jo lielākas ir δ un ψ vērtības, jo materiāls ir plastiskāks un tas līdz sagrūšanai sasniedz lielākas plastiskās deformācijas. Parametra δ vērtība ir jo lielāka, jo vairāk diagramma izstiepta abscisu ass virzienā, savukārt ψ vērtība ir jo lielāka, jo garāks ir diagrammas posms BK (att. 4.1), kuram atbilst kakliņa rašanās un attīstība.

Noskaidrots, ka lielumi δ un ψ ir atkarīgi no paraugstieņa garuma un šķērsriezuma izmēru attiecības. Tāpēc, lai eksperimentālajās pārbaudēs iegūtu salīdzināmus rezultātus, pielieto standartizētus stieņus, visbiežāk apaļus, ar sākotnējā garuma un diametra attiecību $l/d = 10$ vai $l/d = 5$.

Paliekošais relatīvais pagarinājums «īsiem» stieņiem (δ_5) vienmēr ir lielāks nekā «garīem» stieņiem (δ_{10}). Tas notiek tādēļ, ka plastiskās deformācijas zona (kakliņa zona) «īsjā» paraugstienī aizņem relatīvi vairāk vietas nekā «garajā» paraugstienī.

Jo plastiskāks ir materiāls, jo vairāk darba vajadzīgs tā pārraušanai, jo lielāku trieciena kinētisko enerģiju šis materiāls var absorbēt. Tāpēc materiāli, kuru plastiskuma raksturotāji δ un ψ ir augsti, labi uzņem triecienveida slodzes.

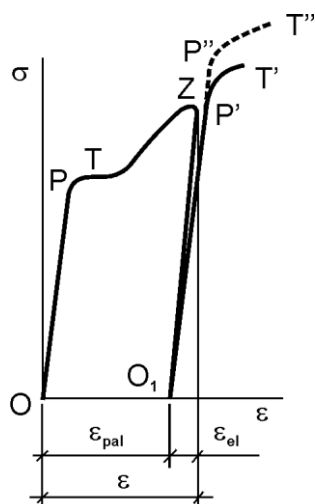


att. 4.3

Att. 4.1 redzamā stiepes diagramma raksturīga mazoglekļa tēraudiem. Vairumam citu plastisku materiālu, piemēram, varam, bronzai, dažām speciālo tēraudu šķirnēm, diagrammā nav spilgti izteikta tecēšanas posma.

Attēlā 4.3 redzama bronzas stieņa stiepes diagramma. Lai šajā gadījumā iegūtu raksturotāju, kas atbilst tecēšanas robežai, par nosacīto tecēšanas robežu pieņemts uzskatīt spriegumu, pie kura pārbaudāmā paraugstieņa paliekošais pagarinājums

atbilst 0,2% no paraugstieņa sākotnējā garuma. Aptuveni tādu pagarinājumu ir ieguvusi mazoglekļa tērauda paraugstienis, sasniedzot tecēšanas robežu. Nosacīto tecēšanas robežu apzīmē ar $\sigma_{0,2}$.



att. 4.4

Ja mīksta tērauda paraugstieni noslogo līdz spriegumam, kas ir mazāks par elastības robežu, un pēc tam atslogo, paraugstienis neiegūst nekādas paliekošās deformācijas un tā mehāniskās īpašības pēc atslogošanas nemainās.

Turpretī, ja paraugstieni iepriekš noslogo līdz spriegumam, kas ir augstāks par tecēšanas robežu, atkārtotās noslodzes paraugstieņa mehāniskās īpašības atšķiras no sākotnējām. Pieņemsim, ka plastiska, mīksta tērauda paraugstienis noslogots līdz spriegumam, kas pārsniedz tecēšanas robežu (stiepes diagrammā šo spriegumu raksturo punkts Z att. 4.4). Tad, noņemot slodzi, diagrammā parādās atslodzes līnija ZO_1 . Tā ir paralēla diagrammas posmam OP, kura robežās materiālam izpildās Huka likums. Pēc atslodzes paraugstienis saglabā noteikta lieluma paliekošo deformāciju ε_{pal} bet pilnās deformācijas elastīgā daļa ε_{el} izzūd. No līniju OP un ZO_1 paralelītes var secināt, ka elastīgās deformācijas paraugstienī rodas

arī aiz proporcionalitātes robežas, pie tam šīs deformācijas tāpat kā iepriekš atbilst Huka likumam.

Tātad pilnā deformācija aiz tecēšanas robežas sastāv no paliekošās jeb plastiskās un elastīgās deformācijas:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{gal} + \mathcal{E}_{el}.$$

Paraugstieni slogojot atkārtoti, deformēšanās līkne attiecībā pret sākotnējo ir izmainījies. Tai atbilst līnija $O_1P'T'$ (att. 4.4). Kā redzams, materiāla proporcionalitātes robeža paaugstinās un iegūst apmēram tā sprieguma vērtību, kurš darbojās paraugstienī pirms pirmās atslogošanas. Ja paraugstienim pēc atslogošanas jau noteiktu laiku «atpūties» un pēc tam atkal to izstiep, proporcionalitātes robeža paaugstinās vēl vairāk (līnija $O_1P''T''$). Acīm redzot, iepriekš virs tecēšanas robežas slogota paraugstieņa paliekošais pagarinājums δ ir ievērojami mazāks nekā tā paša paraugstieņa paliekošais pagarinājums, vienreiz noslogojot līdz pārraušanai.

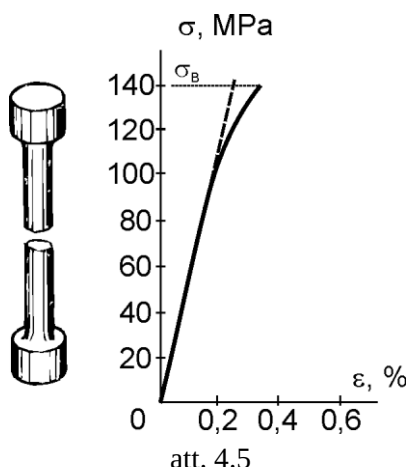
Proporcionalitātes robežas paaugstināšanu un plastiskuma samazināšanu, ko panāk, materiālu iepriekš noslogojot virs tecēšanas robežas, sauc par uzkaldi. Uzkaldes ietekme uz tēraudu analoga rūdīšanas ietekmei. Dažādās tehnikas nozarēs uzkaldinājumam ir atšķirīga nozīme. Dažreiz uzkaldinājums ir vēlams un to rada apzināti, piemēram, ar uzkaldi (aukstā vilkšana) iegūst lielas izturības vadus, uzkalcina arī pacēlāju ķēdes.

Citos gadījumos uzkalcinājums ir kaitīgs un to cenšas novērst. Piemēram, tērauda konstrukciju elementu uzkalcinājuma likvidēšanai ieteicams konstrukciju elementus sakarsēt līdz $T = 200 \dots 300 \text{ }^{\circ}\text{C}$ un lēnām atdzesēt. Nevēlams ir arī uzkalcinājums, kas rodas, materiāla loksnē sitot caurumus kniedēm. Lai noņemtu uzkalcināto slāni, pirms kniedēšanas caurumi jāpārurbj uz lielāka diametra urbi.

Uzkaldināta materiāla nosacītā stiprības robeža paliek tāda pati kā pirms uzkalšanas.

4.3. Trauslu materiālu stiepes diagramma

Trauslu materiālu stiepes diagrammas ievērojami atšķiras no jau aplūkotajām plastisku materiālu stiepes diagrammām. Te nav tecēšanas posma, paraugstieņu pārraušana notiek pie niecīgām paliekošajām deformācijām neveidojoties kakliņam. Trauslie materiāli slukti pretojas stiepei. Daži trauslie materiāli nepakļaujas Huka likumam jau noslogošanas sākumposmā, t.i., pie maziem spriegumiem. Tomēr to stiepes spriegumu robežas, kuri darbojas trauslu materiālu konstrukcijās, minētā novirze ir neliela, un aprēķinos to neievēro.



Trausla materiāla (čuguna) paraugstieņa stiepes diagramma redzama att. 4.5.

Par trauslu materiālu stiprības raksturotāju pieņem pārrāvuma momentam atbilstošā vislielākā stiepes spēka $P_{\max}$ un paraugstieņa šķērsriezuma sākotnējā laukuma A attiecību. Šo attiecību sauc par stiprības robežu un apzīmē ar σ_B , tātad

$$\sigma_B = \frac{P_{\max}}{A}.$$

Plastiskiem materiāliem par stiprības raksturotāju pieņem nosacīto stiprības robežu — nosacīto spriegumu, ko aprēķina pēc lielākā spēka, kuru paraugstienis iztur pārbaudes laikā. Šis spēks, pie

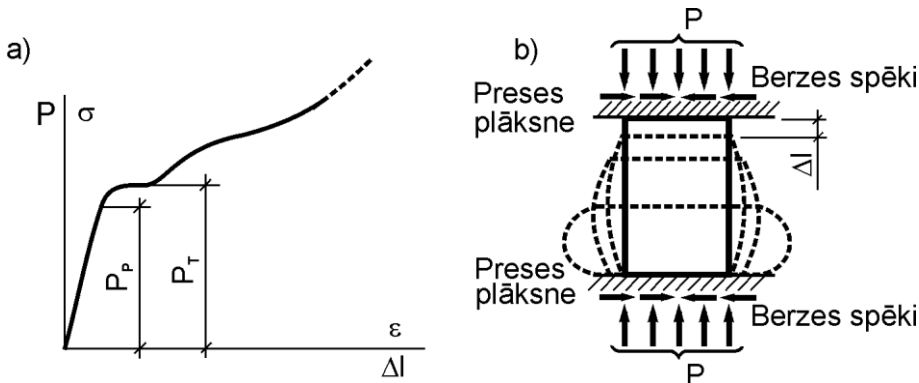
kura tikai sākas kakliņa veidošanās, bet paraugstieņa pārraušana vēl nenotiek, neatbilst faktiskā pārraušanas spēka lielumam. Trausliem materiāliem par stiprības raksturotāju pieņem stiprības robežu — spriegumu, kas atbilst pārrāvumam. Tā kā, pārbaudot trauslu materiālu paraugstieņus stiepē, kakliņa veidošanās nav novērojama un šķērsriezuma laukums pārbaudes laikā gandrīz nemainās, pārraušanas spēks atbilst pārbaudes laikā konstatētajam vislielākajam spēkam; stiprības robeža ir gandrīz vienāda ar faktisko spriegumu, kas darbojas paraugstieņa pārraušanas brīdī.

4.4. Plastisku un trauslu materiālu spiedes diagramma. Stiprības raksturotāji

Plastiska materiāla (mazoglekļa tērauda) tipiska spiedes diagramma parādīta att. 4.6a. Pārbaudes sākumā materiāls izturas tāpat kā stiepes pārbaudē, pie tam proporcionalitātes un tecēšanas robežu vērtības ir aptuveni vienādas. Toties tecēšanas posma garums izrādās ievērojami mazāks nekā stiepes diagrammā.

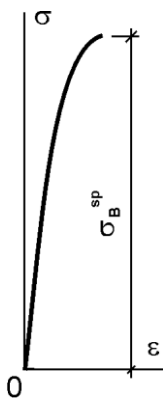
Turpinot palielināt slodzi, rodas ievērojamas paliekošās deformācijas, kuru rezultātā paraugs stipri saīsinās, bet tā šķērsriezuma izmēri pieaug. Cilindriskis paraugstienis, pastāvot berzei starp tā pamatiem un preses plāksnēm, iegūst mucveida formu (att. 4.6b). Tālāka slodzes pieauguma rezultātā paraugstienis saplok, pie tam bez redzamām sagrūšanas pazīmēm. Paraugstienim saplokot, tā šķērsriezuma laukums spiedes spēka pieauguma dēļ palielinās (att. 4.6b). Šis process liek secināt, ka šeit neeksistē graujošais spēks tādā nozīmē kā stiepes gadījumā, tāpēc termins «nosacītā stiprības robeža» plastisku materiālu spiedē zaudē jēgu.

Plastiskos materiālus parasti spiedē nepārbauda. Pamatojoties uz stiepes un spiedes tecēšanas robežu vienādību, pretestību spidei pieņem tādu pašu kā pretestību stiepei.



att. 4.6

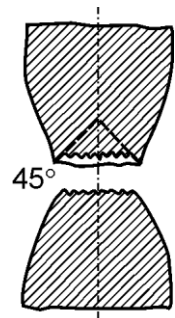
Trauslie materiāli (akmens, čuguns) spiedē, tāpat kā stiepē, sagrūst pie ļoti mazām palielošo deformāciju vērtībām; spiedes diagrammai (att. 4.7) ir aptuveni tāds pats raksturs kā stiepes diagrammai, bet stiprības robeža spiedē ir daudz augstāka nekā stiepē, t.i., trauslie materiāli spidei pretojas daudz labāk nekā stiepei. Stiprības robežu spiedē apzīmē ar σ_B^{sp} .



att. 4.7

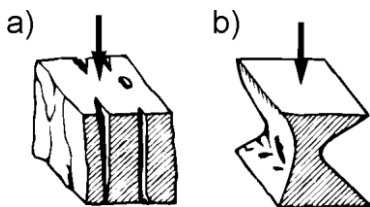
Paraugstieņu sagrūšanas veids stiepē un spiedē ir dažāds. Noskaidrots, ka materiāla sagrūšana slodzes iespaidā var notikt, pārvarot materiāla pretestību atraušanai vai bīdei (cirpei).

Vienkāršas stiepes gadījumā plastisku materiālu paraugstieņi sagrūst cirpes dēļ, maksimālajiem tangenciālajiem spriegumiem τ_{max} darbojoties šķēlumos, kas vērsti 45° leņķī pret paraugstieņa asi. Plastiska materiāla pārrāvuma vietā (att. 4.8) vienā paraugstieņa daļā parasti rodas padziļinājums, bet otrā — tam atbilstošs nošķelts konuss, kura veiduļu slīpuma leņķis pret paraugstieņa asi ir apmēram 45° . Padziļinājuma dibens arī nav līdzens, jo tajā rodas «zobiņi» ar aptuveni tādiem pašiem leņķiem. Tangenciālie spriegumi rada arī plastiskās deformācijas, piemēram, tērauda tecēšanu.



att. 4.8

Parastos deformēšanas apstākļos trauslie materiāli kā stiepē, tā spiedē sagrūst atraušanās rezultātā. Stiepes gadījumā paraugstieņa pārrāvums notiek pa šķēsgriezumu, kur darbojas tikai normālie spriegumi. Spiedes gadījumā, palielinoties šķērsizmēriem, atraušanās notiek paraugstieņa asij paralēlos laukumiņos, t.i., paralēli spēka virzienam.



att. 4.9

Piemēram, spiežot akmens kubu (preses plāksnēm piespiestās virsmas berzes samazināšanai klātas ar parafīnu), paraugs sagrūst tāpēc, ka garenšķēlumos notiek atraušanās (att. 4.9a). Ja starp preses plāksnēm un parauga virsmām pastāv ber-

ze, process kļūst sarežģītāks. Paraugs sagrūstot iegūst att. 5.9b attēloto formu — sānu daļas izdrūp un paraugs atgādina divas nošķeltas, ar mazajiem pamatiem kopā saliktas piramīdas. Arī šajā gadījumā sagrūšana notiek atraujoties, tikai pa plaknēm, kas vērstas slīpi attiecībā pret parauga asi.

4.1. tabulā sakopotas galveno konstrukcijās lietojamo materiālu stiprību raksturojošo parametru skaitliskās vērtības.

Tabula 4.1

Konstrukcijās lietojamo materiālu mehāniskie raksturotāji [4]

Materiāls	Tecēšanas robeža σ_T		Nosacītā stiprības robeža (vai stiprības robeža) stiepē σ_B^{st}		Stiprības robeža spiedē σ_B^{sp}	
	MPa (N/mm ²)	kG/cm ²	MPa (N/mm ²)	kG/cm ²	MPa (N/mm ²)	kG/cm ²
Tēraudi:						
mazoglekļa	≥206	≥2100	372...461	3800...4700	—	—
speciālie	≥352	≥3600	637...1175	6500...12000	—	—
Tērauda stieple	≥392	≥4000	1470...1763	15000...18000	—	—
Čuguns (pelēkais)	—	—	117...275	1200...2800	392...1080	4000...11000
Varš	—	—	196...490	2000... 5000	—	—
Alumīnija sakausējumi	196...373	2000...3800	216... 480	2200...4900	—	—
Priede šķiedru virzienā	—	—	78...98	800...1000	39...59	400...600
Ozols šķiedru virzienā	—	—	98...118	1000...1200	49...69	500...700
Granīts	—	—	4...8	40...80	118...254	1200...2600
Smilšakmens	—	—	1,5...3	15...30	39...147	400...1500
Kieģeļi	—	—	—	—	8...29	80...300
Betoni	—	—	—	—	5...58	50...600
Tekstolīts	—	—	83...98	850...1000	226...245	2300...2500
Getinakss	—	—	79...98	800...1000	235...333	2400...3400
Stikls	—	—	—	—	24,5	250
Vinilplasts	—	—	39...59	400...600	—	—
Celuloids	—	—	44...49	450...500	—	—
Polivinilhlorīds	—	—	4,4...5	45...50	—	—
Kaprons	—	—	59...64	600...650	—	—

Jāatzīmē, ka ne jau vienmēr iespējams tieši noteikt materiāla mehāniskos raksturotājus. Kā jau minēts, mehānisko pārbaužu veikšanai nepieciešami speciāli paraugstieņi ar noteiktu formu un izmēriem, kas atkarīgi no materiāla (metāls, akmens, plastmasa, koks) un deformācijas veida (stiepe, spiede). Bieži vien vajadzīgās formas un izmēru paraugstieņu izgatavošana nav iespējama, piemēram, ja jāpārbauda jau izgatavotas konstrukcijas materiāla mehāniskie raksturotāji. Šajos gadījumos materiālu mehāniskos raksturotājus var noteikt tikai netieši.

Materiālu mehāniskie raksturotāji netieši jānosaka arī tad, ja nav pienācīgo pārbaudes

iekārtu, piemēram, izgatavojot vai montējot konstrukciju ārpus rūpnīcas telpām.

Visdrošākā dažu konstrukcijās lietojamu materiālu (piemēram, mazoglekļa tēraudu, tēraudu ar vidēju oglekļa saturu) mehānisko raksturotāju noteikšanas netiešā metode ir šo materiālu pārbaude uz cietību. Pamatojoties uz neskaitāmos eksperimentos katrai materiālu grupai noteiktajām sakarībām, pēc cietības pārbaudes rezultātiem var aptuveni, bet prakses vajadzībām pietiekami precīzi spriest par citiem materiāla raksturotājiem (tecēšanas robežu, nosacīto stiprības robežu, stiprības robežu).

Cietības pārbaudi veic, pārbaudāmajā detaļā iespiežot etalonķermeni, kas izgatavots no noteiktas cietības materiāla. Šajā pārbaudē par cietību uzskata materiāla spēju pretoties vietējai plastiskajai deformācijai detaļas virsmas tuvumā. Cietības pārbaude ar iespiešanas metodi neizraisa pārbaudāmās detaļas sagrūšanu vai bojājumus. Tieši tāpēc šī pārbaudes metode guvusi plašu pielietojumu.

4.5. Pieļaujamie spriegumi un drošības koeficienti

Zinot materiālu mehāniskos raksturotājus stiepē un spiedē, var pāriet pie jautājuma par pieļaujamā sprieguma lielumu.

Pieļaujamā sprieguma lielumam jābūt noteiktai daļai no tiem spriegumiem, kuri ir materiālam bīstami dotajos konstrukcijas darba apstākļos. Pieļaujamos spriegumus stiepē un spiedē, ja tie ir vienādi, apzīmē ar $[\sigma]$. Ja minēto pieļaujamo spriegumu lielumi ir dažādi, tad lieto šādus apzīmējumus: $[\sigma_{st}]$ — pieļaujamais spriegums stiepē, $[\sigma_{sp}]$ — pieļaujamais spriegums spiedē.

Tā kā trauslie materiāli sabrūk pie mazām paliekošajām deformācijām, par bīstamo jeb robežspriegumu tiem uzskata spriegumu, kas atbilst sagrūšanas momentam, t.i., stiprības robežu σ_B . Pieļaujamo spriegumu trausliem materiāliem nosaka kā daļu no stiprības robežas:

stiepes gadījumā

$$[\sigma_{st}] = \frac{\sigma_B^{st}}{[n_B]}, \quad (4.1)$$

spiedes gadījumā

$$[\sigma_{sp}] = \frac{\sigma_B^{sp}}{[n_B]}. \quad (4.2)$$

Trausliem materiāliem stiprības robežas stiepē un spiedē ir dažādas ($\sigma_B^{sp} > \sigma_B^{st}$), tāpēc pieļaujamie spriegumi arī ir dažādi — spiedē tie ir ievērojami lielāki nekā stiepē.

Plastisko materiālu sagrūšana stiepes gadījumā notiek pie ievērojamām paliekošajām deformācijām, turklāt deformāciju intensīvs pieaugums sākas pie spriegumiem, kas atbilst materiāla tecēšanas robežai. Šajā gadījumā par bīstamo jeb robežspriegumu pieņemts uzskatīt tecēšanas robežu σ_T un pieļaujamo spriegumu noteikt kā zināmu tās daļu, t.i.,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}. \quad (4.3)$$

Pieļaujamo spriegumu spiedē plastiskiem materiāliem pieņem tādu pašu kā stiepē, jo tecēšanas robežas vērtība kā stiepē, tā spiedē ir aptuveni vienāda.

Plastiskiem materiāliem, kuru stiepes diagrammai nav tecēšanas posma (att. 4.3), sakarībā (4.3) jāievieto nosacītā tecēšanas robeža $\sigma_{0,2}$.

Formulās (4.1), (4.2) un (4.3) ietilpst koeficienti $[n_B]$ vai $[n_T]$, kas atbilst bīstamā sprieguma (σ_B vai σ_T) un pieļaujamā sprieguma attiecībai:

$$[n_B] = \frac{\sigma_B}{[\sigma]}; \quad [n_T] = \frac{\sigma_T}{[\sigma]}. \quad (4.4)$$

Šos koeficientus sauc par normatīvajiem drošības koeficientiem. Tā kā pieļaujamais spriegums ir mazāks par bīstamo spriegumu, drošības koeficienti vienmēr ir lielāki par vienu. Jāpiebilst, ka normatīvais koeficients atšķiras no faktiskā drošības koeficienta, kas ir bīstamā jeb robežsprieguma un konstrukcijas darbības laikā sasniegtā maksimālā sprieguma attiecība:

$$n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{\max}}; \quad n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}.$$

Maksimālie spriegumi, kas rodas konstrukciju elementos, vispārīgā gadījumā nesakrīt ar pieļaujamiem spriegumiem, parasti $\sigma_{\max} < [\sigma]$, tāpēc faktiskie drošības koeficienti nedrīkst būt mazāki par normatīvajiem koeficientiem, t.i.,

$$n_B \geq [n_B]; \quad n_T \geq [n_T]. \quad (4.5)$$

Nosakot drošības koeficientu, jāievēro lietojamā materiāla daba, aprēķinu precizitāte, slodzes raksturs, konstrukcijas īpatnības, darba apstākļi un ekonomiskie apsvērumi.

Viendabīgiem, plastiskiem materiāliem, kam piemīt pietiekami pastāvīgas mehāniskās īpašības, drošības koeficientu $[n_T]$ var pieņemt samērā mazu; trausliem, pēc sastāva nevienadabīgiem materiāliem, kuru stiprības robeža svārstās plašā diapazonā (čuguns, akmens), drošības koeficients $[n_B]$ jāpieņem daudz augstāks. Ja konstrukcija uzņem statiskas slodzes, var pieņemt tēraudam $[n_T]=1,4\dots1,8$, čugunam $[n_B]=3\dots4,5$, trausliem, viendabīgiem leģētu rūdītu tēraudu tipa materiāliem $[n_B]=3\dots4$.

Kapitālām konstrukcijām drošības koeficients $[n]$ jāpieņem augstāks nekā pagaidu konstrukcijām. Dažām konstrukcijām jāsamazina svars, šajos gadījumos drošības koeficienta $[n]$ samazināšana jākompensē ar aprēķinu lielāku precizitāti un lietojamo materiālu augstāku kvalitāti. Konstrukcijām, kas strādā augstās un zemās temperatūrās, koeficients $[n]$ jāpieņem citāds nekā normālā temperatūrā strādājošām konstrukcijām, jo materiāla mehāniskās īpašības izmainās temperatūras izmaiņu iespaidā.

Dinamiskās slodzes gadījumā drošības koeficients jāpieņem augstāks nekā tad, ja slodze ir statiska.

Pieļaujamo spriegumu pareiza noteikšana ir sarežģīts un atbildīgs uzdevums. Praktiskai projektēšanai izstrādātas speciālas pieļaujamo spriegumu normas, kas ir obligātas.

Dažu materiālu pieļaujamo spriegumu vērtības atrodamas 4.2 tabulā. Šīs vērtības atbilst konstrukcijas darbībai noteiktos apstākļos: ar statisku slodzi, parastā temperatūrā, u.t.t. Dažos gadījumos no šīm vērtībām jāatkāpjas saskaņā ar normu noteikumiem vai aprēķināmā objekta konstrukcijas un uzdevuma īpatnībām.

Tabula 4.2

Materiālu pieļaujamie spriegumi statiskai slodzei [4]

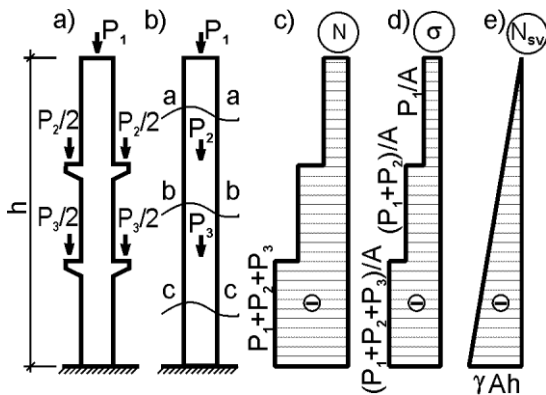
Materiāls	Pieļaujamie spriegumi			
	[σ^{st}] stiepē		[σ^{sp}] spiedē	
	MPa; N/mm ² ;	kG/cm ²	MPa; N/mm ² ;	kG/cm ²
Pelēkais čuguns (lējums)	Līdz 39	400	118...147	1200...1500
Tēraudi:				
CT.0 un CT.2	137	1400	137	1400
CT.3	157	1600	157	1600
Oglekļa tēraudi mašīnbūvē	59...245	600...2500	59...245	600...2500
Leģētie tēraudi mašīnbūvē	98...392	1000...4000	98...392	1000...4000
Varš	29...118	300...1200	29...118	300...1200
Bronza	59...118	600...1200	59...118	600...1200
Alumīnijs	29...78	300...800	29...78	300...800
Dūralumīnijs	78...147	800...1500	78...147	800...1500
Priede šķiedru virzienā	6,9...9,8	70...100	9,8...11,8	100...120
šķērsvirzienā	-	-	1,48...1,96	15...20
Ozols šķiedru virzienā	8,8...12,8	90...130	12,8...14,7	130...150
šķērsvirzienā	-	-	1,96...3,47	20...35
Ķieģeļu mūris	līdz 0,2	līdz 2	0,6...2,4	6...25
Akmens mūris	līdz 0,3	līdz 3	0,4...4	4...40
Betons (atkarībā no sastāva)	0,2...1,5	2...15	1,5...26,0	15...270
Tekstolīts	29...39	300...400	49...88	500...900

Spriegumus, kas slodzes ietekmē rodas konstrukcijas elementos, sauc par darba spriegumiem. Drošai, normālai konstrukcijas darbībai šie spriegumi nedrīkst pārsniegt pieļaujamos. Dažos gadījumos atļauts pārsniegt pieļaujamos spriegumus par 5%, ja to pamato konstruktīvi apsvērumi.

5. STIEPE UN SPIEDE

5.1. Iekšējo piepūļu un pārvietojumu noteikšana

Vienkāršākais stieņa sloojuma veids ir centriskā stiepe (spiede). Tas ir gadījums, kad stieņa galos šķērsriezuma smaguma centrā pielikti stieņa ass virzienā vērsti spēki P . Iekšējo piepūļu noteikšanai izmantojam šķēlumu metodi. Izdarot stieņa asij perpendikulāru šķēlumu, konstatējam, ka $N = P$, jo visu spēku projekciju summai uz stieņa ass virzienu jābūt vienādai ar nulli. Praksē bieži sastopami gadījumi, kad stienis (piem., kolonna) tiek slogots pakāpienveidīgi. Tāds gadījums shematiski attēlots att. 5.1. Izdarot trīs neatkarīgus šķēlumus $a - a$, $b - b$ un $c - c$, nosakām ass spēka N vērtības katrā atšķirīgi slogotajā kolonnas posmā (att. 5.1c). Šķēlumā $a - a$ ass spēku N nosaka sakarība $-N - P_1 = 0$, šķēlumā $b - b$ sakarība $-N - P_1 - P_2 = 0$, bet šķēlumā $c - c$ sakarība $-N - P_1 - P_2 - P_3 = 0$.



att. 5.1

Att. 5.1.d attēlota normālspriegumu σ epīra pa kolonnas augstumu. Tā kā kolonas šķērsriezumu nosacīti pa visu augstumu var uzskatīt par konstantu, tad sprieguma σ epīra ir proporcionāla ass spēka N epīrai un to nosaka sakarība

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

kur, A – kolonas šķērsriezuma laukums. Tradicionālo būvmateriālu – betona, metāla, akmens gadījumos

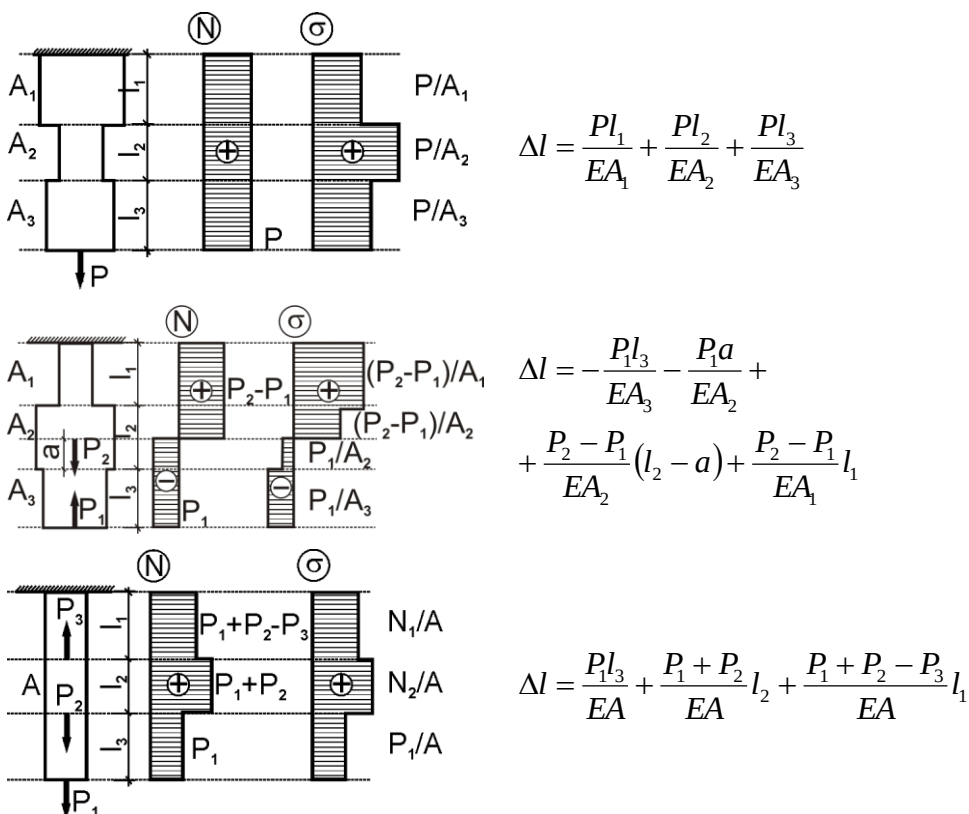
aktuāls ir jautājums par pašsvara izraisītām papildus piepūlēm darinājumā. Kolonas gadījumā pašsvara izraisītais ass spēks ir proporcionāls materiāla īpatnējam svaram γ , augstumam h un šķērsriezuma laukumam A . Tātad pašsvara radītais ass spēks $N_{sv} = \gamma \cdot A \cdot h$ (att. 5.1e). Reālās konstrukcijās, kas strādā stiepē vai spiedē, pašsvara iespaidu parasti neievēro.

Saskaņā ar Huka likumu stieņa absolūtais pagarinājums (saīsinājums), kas rodas stiepes (spiedes) gadījumā, atkarīgs ne tikai no ass spēka lieluma, bet arī no stieņa ģeometriskajiem parametriem (šķērsriezuma laukuma, garuma) un materiāla īpašībām (elasības moduļa). Pakāpjveida sloojuma gadījumā kopējais stieņa pagarinājums (saīsinājums) veidojas kā atsevišķu posmu pagarinājumu summa

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}.$$

Att. 5.2 parādīti trīs dažāda profila stieņi atšķirīgos sloojuma apstākļos, uzkonstruētas iespējamās ass spēka N un normālsprieguma σ epīras (epīra ir grafisks kāda fizikāla lieluma skaitliskās vērtības attēlojums uz stieņa ass) kā arī dotas sakarības stieņu pagarinājumu Δl noteikšanai. Lielumu EA nosacīti sauc par **šķēluma stingumu pie stiepes**

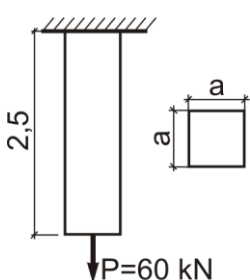
(spiedes). Praksē bieži lieto modificētu lielumu EA/l un to sauc par stieņa vai tā daļas stingrību. Stieņa stingrībai apgriezto lielumu l/EA sauc par **padevīguma koeficientu** un tas raksturo stieņa pagarinājumu vienu vienību liela spēka gadījumā.



att. 5.2

Piemērs 5.1. Noteikt zīmējumā attēlotā 2,5 m gara tērauda stieņa šķērsgriezuma izmēru a , ja zināms tā pagarinājums $\Delta l = 2$ mm. Cik lieli būs spriegumi stienī?

Atrisinājums. No Huka likuma, pieņemot ka ārējā slodze P pa stieņa šķērsgriezumu sadalās vienmērīgi (ass spēks N ir vienāds ar P), iegūstam:



$$\Delta l = Pl/EA.$$

Šai sakarībā nezināmais ir šķērsgriezuma laukums A . To izsakot no Δl izteiksmes un ņemot vērā, ka $A = a^2$, iegūstam

$$a = \sqrt{\frac{Pl}{E\Delta l}} = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 2,5}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 1,9 \text{ cm}$$

(izmantots $E = 210$ GPa).

Stieņa šķērsgriezumā darbojas tikai normālspriegums σ un tā skaitliskā vērtība ir

$$\sigma = N/A = N/a^2 = 60 \cdot 10^3 / (0,019)^2 = 166 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 166 \text{ MPa}.$$

Noskaidrosim par cik relatīvi ir izmainījies stieņa šķērsgriezuma laukums. Šim nolūkam izmantosim Puasona koeficienta vērtību

$$\mu = 0,28.$$

Stieņa garendeformācija ir

$$\varepsilon_g = \sigma/E = (166/210) \cdot 10^{-3} = 0,79 \cdot 10^{-3},$$

bet šķērsdeformācija

$$\varepsilon_{sk} = -\mu\varepsilon_g = -0,28 \cdot 79 \cdot 10^{-5} = -0,221 \cdot 10^{-3}.$$

Deformētā stieņa šķērsgriezuma laukumu nosaka sakarība

$$A_d = (a + \varepsilon_{sk}a)^2 = a^2 + 2\varepsilon_{sk}a^2 + \varepsilon_{sk}^2a^2 = a^2(1 + 2\varepsilon_{sk} + \varepsilon_{sk}^2).$$

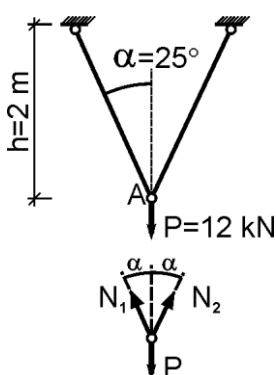
Ņemot vērā, ka ε_{sk}^2 ir augstākas kārtas mazs lielums, iegūstam sekojošu deformētā stieņa šķērsgriezuma laukumu

$$A_d = a^2(1 + 2\varepsilon_{sk}).$$

Tādā gadījumā stieņa šķērsgriezuma laukuma relatīvā izmaiņa ir

$$\begin{aligned} \frac{A_d - A}{A} &= \frac{a^2(1 + 2\varepsilon_{sk}) - a^2}{a^2} = (1 + 2\varepsilon_{sk} - 1) = 2\varepsilon_{sk} = \\ &= -2 \cdot 0,221 \cdot 10^{-3} = -0,0442\% \end{aligned}$$

Šis rezultāts rāda, ka elastīgās deformēšanās robežās šķērsgriezuma laukuma izmaiņa ir nebūtiska un visai pamatots ir pieņēmums, ka stieņa šķērsgriezums slodzes iedarbības rezultātā praktiski nemainās.



Piemērs 5.2. Noteikt stieņu sistēmas locīklas A pārvietojumu. Sistēmu veido kaprona aukla ar diametru 2 cm ($E=2 \cdot 10^4$ kG/cm²).

Atrisinājums. Izgriežot mezglu A un sastādot spēku līdzsvara vienādojumu uz horizontālo asi

$$N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \text{ iegūstam, ka } N_1 = N_2.$$

No spēku projekciju uz vertikālo asi līdzsvara vienādojuma

$$N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - P = 0$$

iegūstam:

$$N_1 = N_2 = P / 2 \cos \alpha.$$

Auklu pagarinājumi ir:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = N_1 l / EA = [P / (2 \cos \alpha) \cdot h / \cos \alpha] / EA = Ph / (2EA \cos^2 \alpha),$$

bet punktā A vertikālais pārvietojums Δh_A ir

$$\Delta h_A = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha = Ph / (2EA \cos \alpha).$$

Izmantojam sekojošas skaitliskās vērtības:

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kG/cm}^2 \approx 2 \cdot 10^4 \cdot 9,81 \text{ N} / 10^{-4} \text{ m}^2 \approx 1,96 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 = 1,96 \text{ GPa};$$

$$A = \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \text{ cm}^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; \quad \cos 25^\circ = 0,906.$$

Iegūstam:

$$\Delta l_1 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 1,96 \cdot 10^9 \cdot 0,906^2} = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,37 \text{ cm}$$

$$\Delta h_A = 2,37 \cdot 0,906 = 2,15 \text{ cm}.$$

Tātad stiepes spēka P pielikšanas punkts A (sk att.) kaprona auklu pagarinājuma dēļ pārvietosies uz leju par 2,15 cm.

Nomainot auklu materiālu ar citu (piem. tērauda troses) varēsim analogā veidā noteikt punkta A pārvietojumu. Pie dotās slodzes tas būs būtiski mazāks.

5.2. Stiprības aprēķini stiepē un spiedē

Aksiālā stiepē vai spiedē stieņa stiprība ir nodrošināta, ja katrā stieņa šķērsgrīzumā ievērota prasība

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (5.1)$$

kur N — aksiāls spēka absolūtā vērtība šķēlumā;

A — šķērsgrīzuma laukums;

$[\sigma]$ — stieņa materiāla pieļaujamais stiepes vai spiedes spriegums.

Šajā formulā izteikts stiepta vai spiesta stieņa stiprības nosacījums:

vislielākais faktiskais spriegums σ konstrukcijas elementā nedrīkst pārsniegt pieļaujamo spriegumu $[\sigma]$.

Pamatojoties uz nosacījumu (5.1) risināmi trīs atšķirīgi uzdevumu tipi.

1. **Stiprības pārbaude** (pārbaudes aprēķins). Dots ass spēks N un stieņa šķēluma laukums A . Konstruktoram uzdevums ir pārbaudīt, vai darba spriegums $\sigma = N/A$ visos šķēlumos ir mazāks par pieļaujamo spriegumu $[\sigma]$.

Tiek noteikta procentuālā atšķirība starp šiem spriegumiem. Gadījumos, kad darba spriegums kaut vienā šķēlumā pārsniedz pieļaujamo par vairāk kā 5%, konstrukcijas elementa stiprību uzskata par nepietiekamu.

Pārbaudes aprēķinu bieži veic citādi — pēc zināmā bīstamā sprieguma $\sigma_{\text{bīst}}$ (stiprības robežas vai tecēšanas robežas) lieluma un aprēķinātā faktiskā sprieguma $\sigma = N/A$ lieluma nosaka faktisko drošības koeficientu un salīdzina to ar normatīvo drošības koeficientu $[n]$:

$$n = \frac{\sigma_{bist}}{\sigma} \geq [n]. \quad (5.2)$$

Ja atšķirība starp faktisko un normatīvo drošības koeficientu pārsniedz $\pm 5\%$, konstrukcija ir vai nu nepietiekami stipra ($n < 0,95[n]$), vai neekonomiska ($n > 1,05[n]$).

Drošības koeficientu $[n]$ vērtības dotas attiecīgajās normās vai arī konstruktors tās izvēlas, vadoties no pieredzes analoģu konstrukciju projektēšanā un ekspluatācijā.

2. Šķērsgriezuma izvēle (projekta aprēķins). No stiprības nosacījuma iespējams noteikt nepieciešamos konstrukcijas elementu izmērus, kuri garantē konstrukcijas drošu ekspluatāciju. Šķērsgriezuma laukumu jebkurā šķēlumā nosaka sakarība

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}, \quad (5.3)$$

kur N – asspēka vērtība attiecīgajā šķēlumā.

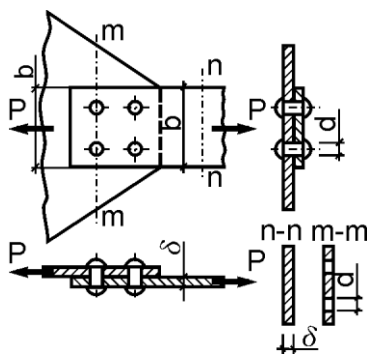
Veicot stiprības aprēķinu spiedē tiek pieņemts, ka nepastāv iespēja stienim zaudēt noturību. Noturības noteikšana ir svarīga, patstāvīga konstrukciju aprēķinu problēma.

3. Pieļaujamās slodzes noteikšana. Pieļaujamā asspēka $[N]$ lielumu nosaka sakarība

$$[N] \leq [\sigma]A \quad (5.4)$$

un elementiem ar konstantu šķērsgriezumu tā viennozīmīgi nosaka pieļaujamās slodzes lielumu.

Sarežģītāki ir gadījumi elementiem ar mainīgu šķērsgriezuma laukumu un nevienmērīgu slodzes sadalījumu pa šķēlumu. Piemēram, ar kniedēm vai skrūvēm piestiprinātā metāla strēmelē rodas ar caurumiem vājināti šķēlumi (att. 5.3), kuros iespējama strēmeles pārrūkšana. Stiprības aprēķinos jāizmanto visā stieņa garumā mazākais šķērsgriezuma laukums, kur vājinājums ir vislielākais. Att. 5.3 attēlotajam savienojumam šāds šķēlums ir m-m. Vietās, kur stienī izveidoti urbumi, iefrēzējumi u.c., spriegumi šķēlumā nesadalās vienmērīgi. Ap tiem veidojas vietējie spriegumi, kuri būtiski pārsniedz šķēluma laukumam atbilstošos vidējos spriegumus $\sigma_{vid} = N/A$. Šādu situāciju sauc par spriegumu koncentrāciju. Kā rāda teorija un prakse, plastisku materiālu gadījumos spriegumu koncentrācija stieņu stiprību neietekmē un aprēķinos to var neņemt vērā. Līdzīgi ir arī trau-



att. 5.3

lu, bet nevienmērīgu (čuguns) materiālu gadījumā. Toties traušiem un samērā viendabīgiem materiāliem spriegumu koncentrācija jāievēro un jāpalielina drošības koeficients.

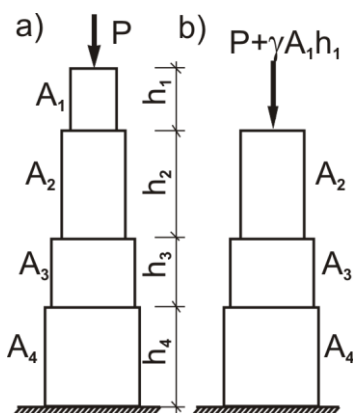
Liela izmēra konstrukcijās no materiāla ar lielu īpatnējo svaru aktuāls kļūst stiprības aprēķins, ievērojot stieņa pašsvaru. Stienim, kura garums ir l un šķērsgriezuma laukums A , pilnais svars ir $P_{sv} = \gamma Al$. Ievērojot stieņa pašsvaru, asspēks šķērsgriezumos ir mainīgs lielums, kurš maksimālo vērtību sasniedz atbalsta vietā (sk. att. 5.1e). Ass

spēks jebkurā patvaļīgā šķēlumā attālumā x no balsta ir $N = P_{\bar{a}r} + \gamma Ax$, kur $P_{\bar{a}r}$ – sum-mārā ārējā slodze attiecīgajā šķēlumā. Spriegums šai šķēlumā ir

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P_{\bar{a}r}}{A} + x\gamma$$

Šai sakarībā otrais saskaitāmais (pašvara radītais spriegums) nav atkarīgs no šķēluma laukuma lieluma.

Stieņa stiprība jāpārbauda pēc lielākajiem spriegumiem, tātad pēc sprieguma balstā (att. 5.4). Tādā gadījumā stiprības nosacījums, ievērojot stieņa pašsvaru ir:



5.4. att.

$$\sigma_{\max} = \frac{P_{\bar{a}r}}{A} + \gamma l \leq [\sigma]$$

No šīs sakarības izsakot parametru A , iegūstam nepieciešamo stieņa šķērsgriezuma laukumu, kurš nodrošina stieņa stiprību, ievērojot stieņa pašsvaru:

$$A \geq \frac{P_{\bar{a}r}}{[\sigma] - \gamma \cdot l}$$

Ja lielums $\gamma \cdot l$ ir mazs salīdzinot ar $[\sigma]$, to var vērā neņemt. Gadījumos, kad stieņu garums l ir liels vai arī liels ir īpatnējais svars γ , stieņu pašsvars ir vērā ņemams. Tērauda stieņiem to pašsvars atstāj iespaidu tikai tad, ja stieņi ir ļoti gari, piemēram, šahtu celtuvju

vai ķēžu aprēķinos. Vairumā gadījumu tērauda svaru var neievērot. Tas pats attiecas uz koka stieņiem.

Akmens celtnēs, kurās kolonas strādā uz spiedi, pašvara ietekme ir ievērojama jau nelielā augstumā. Nemainīga šķērsgriezuma stieņi izrādās neekonomiski, jo stiprības pārbaude veicama vienā šķēlumā (konstrukciju balstā), kur darba spriegums ir vislielākais. Visos citos šķēlumos šie spriegumi ir mazāki. Tādos gadījumos jāizmanto mainīga šķērsgriezuma stieņi. (sk. att. 5.4) Parasti stieņus veido pakāpjveida formā, pie kam ikvienas pakāpes šķērsgriezuma laukumu izvēlas tā, lai vislielākais spriegums sakristu ar pieļaujamo. Pirmās pakāpes šķērsgriezuma laukumu nosaka sakarība

$$A_1 \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma \cdot h_1}$$

Uz otrās pakāpes galu darbojas spēks $P + \gamma A_1 h_1$.

Tātad otrās pakāpes šķērsgriezuma laukumu nosaka sakarība

$$A_2 \geq \frac{P + \gamma A_1 h_1}{[\sigma] - \gamma \cdot h_2}$$

Analogi nosakām šķērsgriezuma laukumu arī trešajai un ceturtajai pakāpei.

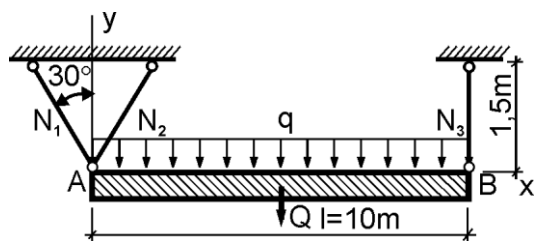
Ja uz stieni neiedarbojas ārēji spēki, bet darbojas tikai pašsvars, tad stieņa patvaļīgā šķēlumā spriegums ir $\sigma = \gamma x$. No nosacījuma $\gamma x = [\sigma]$ var aprēķināt stieņa kritisko ga-

rumu x_{kr} , pie kura stienis sabrūk (pārtrūkst) pašsvara dēļ.

Tā, piemēram, tērauda troses kritisko garumu nosakot izmantojam sekojošus raksturlielumus: $\gamma = 78 \text{ kN/m}^3$ un $\sigma_B = 400 \text{ MPa}$. Tādā gadījumā

$$x_{kr} = \frac{\sigma_B}{\gamma} = \frac{400 \text{ MN m}^3}{78 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ MN}} = 5,33 \cdot 10^3 \text{ m} = 5,33 \text{ km}.$$

Tātad iekārta vairāk kā piecus kilometrus gara tērauda trose pārtrūkst no pašsvara.



att. 5.5

Piemērs 5.3. Viendabīga sija AB iekārta trijos apaļa šķērsgriezuma ($d=2 \text{ cm}$) tērauda stieņos. Sijas svars $Q=10 \text{ kN}$. Noteikt vienmērīgi izkliedētas slodzes pieļaujamo intensitāti $[q]$, ja stieņu materiālam pieļaujamais spriegums $[\sigma]=160 \text{ MPa}$. Aprēķināt stieņu pagarinājumu, ja $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Atrisinājums. Nosakām spēkus stieņos. Vienmērīgi izkliedētās slodzes, sijas svara Q un stieņos darbošos spēku N_1 , N_2 un N_3 iedarbības rezultātā sija atrodas līdzsvarā (att. 5.5).

Sastādām līdzsvara vienādojumus:

$$\sum M_A = -Q \frac{l}{2} - ql \frac{l}{2} + N_3 l = 0.$$

Lai aprēķinātu momentu, ko rada vienmērīgi izkliedēta slodze, jāpieņem, ka šīs slodzes kopspēks vienāds ar ql un pielikts noslodzes posma vidū, t.i., attālumā $l/2$ no punkta A.

Arī spēks Q pielikts sijas vidū.

Sastādot spēku projekciju līdzsvara vienādojumus uz horizontālu un vertikālu asi, iegūstam

$$\sum P_{ix} = 0; N_2 \sin 30^\circ - N_1 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum P_{iy} = 0; N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ - Q - ql + N_3 = 0.$$

Atrisinot šos trīs vienādojumus nosakām piepūles tērauda stieņos

$$N_3 = \frac{ql + Q}{2}; N_1 = N_2 = \frac{ql + Q}{4 \cos 30^\circ} = \frac{ql + Q}{3,46}.$$

Kā redzams, spēks N_3 ir lielāks nekā N_1 un N_2 . Tāpēc pieļaujamo slodzi ierobežo stieņa 3 stiprības nosacījums

$$\sigma = \frac{N_3}{A} \leq [\sigma],$$

kur

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ cm}^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

Ievietojam N_3 vērtību:

$$\sigma = \frac{N_3}{A} = \frac{ql + Q}{2A} \leq [\sigma].$$

No šīs nevienādības, zinot pieļaujamo spriegumu $[\sigma]$, var aprēķināt vienmērīgi izkliedētās slodzes pieļaujamo intensitāti $[q]$ (pārejot uz kPa, kN un m):

$$[q] = \frac{2 \cdot A \cdot [\sigma] - Q}{l} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^3 - 10}{10} = 9 \text{ kN/m}.$$

Nosakām spēkus stieņos:

$$N_1 = N_2 = \frac{ql + Q}{l} = \frac{9 \cdot 10 + 10}{3,46} = 28,9 \text{ kN};$$

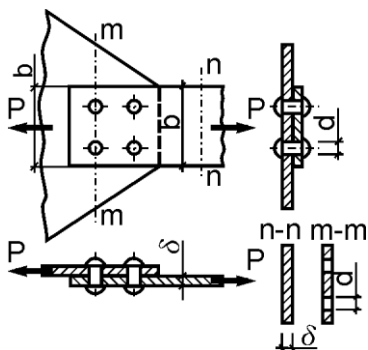
$$N_3 = \frac{ql + Q}{2} = \frac{9 \cdot 10 + 10}{2} = 50 \text{ kN}.$$

Aprēķinām stieņu pagarinājumus:

$$l_1 = l_2 = \frac{1,5}{\cos 30^\circ} = \frac{1,5}{0,866} = 1,73 \text{ m};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{AF} = \frac{28,9 \cdot 1,73}{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,8 \text{ mm};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{AF} = \frac{50 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 1,2 \text{ mm}.$$



Piemērs 5.4. Tērauda strēmele ar kniedēm piestiprināta tērauda plāksnei. Savienojumā darbojas stiepes spēki $P=160 \text{ kN}$. Strēmeles biezums $\delta=10 \text{ mm}$, kniežu diametrs $d=20 \text{ mm}$, pieļaujamais stiepes spriegums $[\sigma]=160 \text{ MPa}$. Cik lielam jābūt strēmeles platumam b ?

Atrisinājums. Aksiāls spēks strēmeles šķēlumos ir $N = P = 160 \text{ kN}$. Atbilstoši formulai (5.3)

$$A_{\text{neto}} \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 10^3}{160} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 10 \text{ cm}^2.$$

Strēmeles laukumu vājina divi kniežu urbumi, kuriem šķēlumā atbilst divi taisnstūri δd . Tāpēc (pēc noteikumiem $\delta=1 \text{ cm}$, $d=2 \text{ cm}$)

$$A_{neto} = \delta b - 2\delta d = \delta(b - 2d) = b - 4.$$

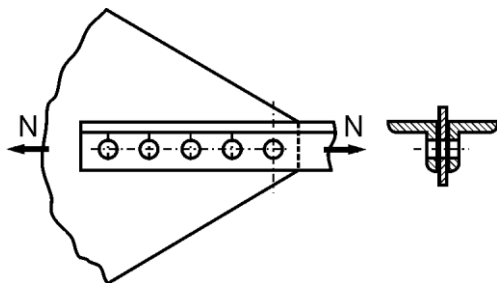
Salīdzinot abas F_{neto} izteiksmes, atrodam, ka

$$b - 4 \geq 10,$$

no kurienes

$$b \geq 10 + 4 = 14 \text{ cm},$$

t.i., strēmeles platumam jābūt vismaz 140 mm.



Piemērs 5.5. Divi vienādsānu stūreņi, kuru izmēri ir 75X75X8 mm, ar kniedēm ($d=20$ mm) piestiprināti plāksnei. Stiepjotais spēks (aksiāls spēks) stūreņos ir $N = 310$ kN. (Katra stūreņa bruto laukums $A_{bruto} = 11,5 \text{ cm}^2$. Pārbaudīt stūreņu stiprību, ja pieļaujamais spriegums $[\sigma] = 160$ MPa.

Atrisinājums. Divu stūreņu šķērsriezuma laukums, ievērojot divus kniedēšanas urbumus, kam šķēlumā ir taisnstūra forma ($0,8 \times 2,0 \text{ cm}^2$), ir

$$A_{neto} = 2 \cdot 11,5 - 2 \cdot 0,8 \cdot 2,0 = 19,8 \text{ cm}^2.$$

Vājinātajā šķēlumā darbojas spriegums

$$\sigma = \frac{N}{A_{neto}} = \frac{310 \cdot 10^{-3}}{19,8 \cdot 10^{-4}} = 156,5 \text{ MPa}.$$

Šis spriegums ir par 2,2% mazāks nekā pieļaujamais spriegums $[\sigma] = 160$ MPa, tātad aprēķina rezultāti ir apmierinoši.

Piemērs 5.6. Kādu spiedes spēku drīkst pielikt īsai čuguna caurulei, kuras ārējais diametrs ir 20 cm un sieniņu biezums 2,5 cm, ja pieļaujamais spiedes spriegums $[\sigma_{sp}] = 80$ MPa?

Atrisinājums. Caurules šķērsriezuma laukums, ja $d_{ār} = 20 \text{ cm}$ un

$$d_{iekš} = 20 - 2 \cdot 2,5 = 15 \text{ cm}, \text{ ir}$$

$$A = \frac{\pi d_{ār}^2}{4} - \frac{\pi d_{iekš}^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_{ār}^2 - d_{iekš}^2) = 137,4 \text{ cm}^2.$$

Pēc formulas (7.4) pieļaujamā slodze

$$[P] = [N] \leq [\sigma] F = 80 \cdot 10^3 \cdot 137,4 \cdot 10^{-4} = 1100 \text{ kN}.$$

5.3. Spriegumi stieņa slīpos šķēlumos

Centriski stiepta stieņa asij perpendikulāros šķēlumos rodas tikai normālie spriegumi. Toties slīpos šķēlumos darbojas gan normālie, gan tangenciālie spriegumi.

Noslogotā elastīgā ķermenī caur jebkuru punktu iespējams novilkt bezgalīgi daudz šķēlumu un praktiski katrā tādā šķēlumā būs atšķirīgi normālie un tangenciālie spriegumi. Tādēļ runājot par spriegumiem kādā ķermeņa punktā svarīgi norādīt šķēluma stāvokli kurā darbojas spriegumi. Normālo un tangenciālo spriegumu kopums, kas darbojas visos bezgalīgi daudzajos šķēlumos, kurus var novilkt caur punktu, nosaka spriegumstāvokli šajā punktā. Izpētīt spriegumstāvokli punktā nozīmē atrast sakarības kuras do to iespēju noteikt spriegumus jebkurā caur šo punktu novilkta šķēlumā.

Lai noteiktu spriegumus patvaļīgi orientētā stieņa šķēlumā sadalīsim stieni divās daļās (att. 5.6) ar plakni, kura pagriezta par leņķi α pret stieņa asij perpendikulāro šķēlumu (leņķis tiek mērīts pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam). Šķērsgriezuma ab laukums A vienāds ar slīpā šķēluma cd laukuma A_α projekciju uz stieņa asij perpendikulāro plakni, t.i.

$$A = A_\alpha \cos \alpha .$$

Tātad

$$A_\alpha = A / \cos \alpha .$$

Atmetam stieņa augšējo daļu un atlikušajai daļai plaknē cd pieliekam spēkus, kuri kompensē atmetās daļas iedarbību. Spriegumus p_α šajā šķēlumā, kuri nav tam perpendikulāri, bet vērsti stieņa ass un tātad arī pieliktās slodzes virzienā, līdzsvaro šo slodzi un ir spēkā līdzsvara vienādojums

$$p_\alpha A_\alpha - P = 0 .$$

Tātad $p_\alpha = P / A_\alpha$ un ievietojot A_α iepriekš noteikto izteiksmi, iegūstam

$$p_\alpha = P \cos \alpha / A .$$

Tā kā P/A ir stieņa normālais spriegums šķērsgriezuma plaknē, tad

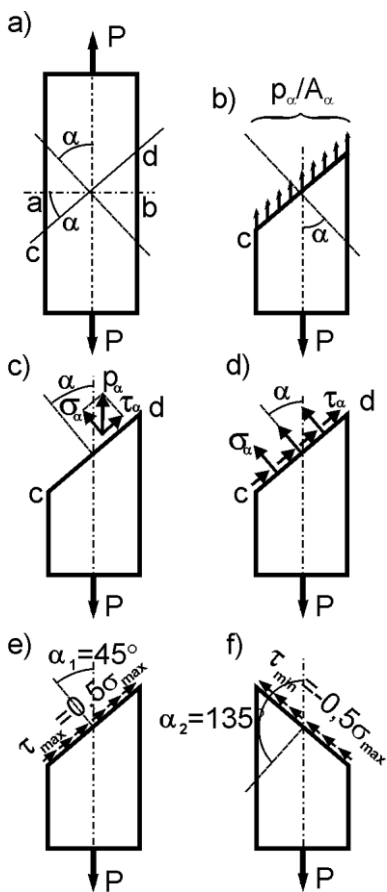
$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha .$$

Pilno spriegumu p_α šķēlumā cd varam sadalīt normālajā un tangenciālajā komponentē. Tā iegūstam

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos \alpha \cos \alpha = \\ &= \sigma \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= p_\alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= 0,5 \sigma \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pilnais spriegums p_α ir spriegumu σ_α un τ_α ģeometriskā summa



att. 5.6

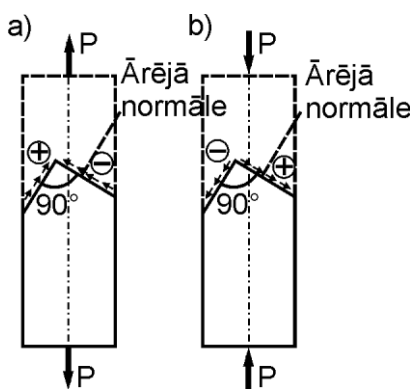
metriskā summa

$$p_{\alpha} = \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2}.$$

Analizējot spriegumu σ_{α} un τ_{α} izmaiņu mainoties šķēluma plaknes slīpumam pret stieņa asi, konstatējam:

- pilnais spriegums p_{α} jebkurā slīpā šķēlumā ($\alpha \neq 0$) pēc absolūtās vērtības vienmēr ir mazāks par spriegumu σ stieņa šķērsgrīzumā;
- šķērsgrīzumā pilnais spriegums ir vienāds ar normālo spriegumu šai šķēlumā;
- stieņa šķērsgrīzumā tangenciālo spriegumu nav;
- normālais spriegums jebkurā slīpā šķēlumā ($\alpha \neq 0$) vienmēr mazāks par normālo spriegumu stieņa šķērsgrīzumā (jo $\cos^2 \alpha < 1$);
- maksimālie normālie spriegumi $\sigma_{\max} = \sigma$ ir stieņa šķērsgrīzumā, bet maksimālie tangenciālie spriegumi ir šķēlumos, kuri vērsti 45° leņķī pret šķērsgrīzumu (ja $\sin 2\alpha = 1$, tad $\alpha = 45^{\circ}$); maksimālā tangenciālā sprieguma vērtība šai plaknē ir $\tau_{\max} = 0,5 \sigma_{\max}$;
- minimālā tangenciālā sprieguma vērtība ir šķēlumā, kas vērsts 135° leņķī pret šķērsgrīzumu (ja $\sin 2\alpha = -1$, tad $\alpha = 135^{\circ}$) un tā vērtība ir $\tau_{\min} = -0,5 \sigma_{\max}$;

Tātad $\tau_{\max}$ un $\tau_{\min}$ darbojas savstarpēji perpendikulāros šķēlumos un ir vērsti uz vienu vai pretējām pusēm (att. 5.7). Par tangenciālo spriegumu pozitīvo virzienu pieņem virzienu, kas sakrīt ar pulksteņa rādītāja kustības virzienu skaitot no ārējās normāles. Šim pieņēmumam nav būtiskas nozīmes.



att. 5.7

Tangenciālo spriegumu absolūto vērtību vienādību savstarpēji perpendikulāros šķēlumos sauc par tangenciālo spriegumu pāru likumu.

Pētījumi apstiprina, ka vērtējot stieņa stiprību aksiālā slogojumā (stiepē vai spiedē), noteicošie ir spriegumi šķērsgrīzumos.

Vienasīgas stiepes vai spiedes gadījumā šajos šķēlumos darbojas tikai normālie spriegumi un to vērtības ir maksimālās attiecībā pret pārējiem šķēlumiem. Šos spriegumus sauc par galvenajiem spriegumiem, bet šķēlumus par galvenajiem šķēlumiem vai galvenajām plaknēm.

Piemērs 5.7. Noteikt nepieciešamo ar spēku $P=90$ kN slogota stieņa šķērsgrīzuma diametru, tā, lai maksimālais bīdes spriegums nepārsniegtu 80 MPa.

Atrisinājums. Stieņa vienasīga centriska slogojuma gadījumā maksimālie bīdes spriegumi veidojas zem 45° pret stieņa asi orientētos šķēlumos un to vērtība ir $\sigma_1/2$. Tātad pieļaujamajam bīdes spriegumam (80 MPa) atbilst galvenais spriegums $\sigma_1 = 160$ MPa. Saskaņā ar sprieguma definīciju šāds spriegums veidojas stieņa šķērsgrīzumā, kura laukums ir $A = P/\sigma_1 = 90 \cdot 10^3 / 160 \text{ m}^2 = 0,5625 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$.

Tātad stieņa diametru nosaka sakarība:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,5625 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = \sqrt{7,164 \cdot 10^{-4}} = 2,68 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2,68 \text{ cm}.$$

Piemērs 5.8. Noteikt maksimālos normālos un bīdes spriegumus spiestā stienī, ja zināms, ka kādā no šķēlumiem spriegumi ir: $\sigma_\alpha = -60 \text{ MPa}$; $\tau_\alpha = 24 \text{ MPa}$.

Atrisinājums. Spriegumus slīpos šķēlumos nosaka sakarības:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = 0,5 \sigma_1 \sin 2\alpha.$$

No šīm sakarībām varam noteikt šķēluma, kurā darbojas dotie spriegumi σ_α un τ_α , orientāciju pret stieņa asi. Izdalot šīs sakarības, iegūstam:

$$\tau_\alpha / \sigma_\alpha = 0,5 \sin 2\alpha / \cos^2 \alpha = \operatorname{tg} \alpha.$$

Tātad

$$\operatorname{tg} \alpha = 24 / (-60) = -0,4 \text{ un } \cos^2 \alpha = 1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0,862.$$

Maksimālais normālspriegums ir:

$$\sigma_1 = \sigma_\alpha / \cos^2 \alpha = -69,6 \text{ MPa}.$$

Ņemot vērā, ka maksimālais bīdes spriegums ir 0,5 no galvenā sprieguma, iegūstam:

$$|\tau_{\max}| = 0,5 |\sigma_1| = 34,8 \text{ MPa}.$$

6. STIĒŅA ŠĶĒRSGRIEZUMA LAUKUMA ĢEOMETRISKIE RAKSTUROTĀJI

6.1. Plakanu figūru laukumu smaguma centri un statistiskie momenti

Veicot konstrukciju aprēķinus bieži mehānikā nākas izmantot plakanu figūru laukumu ģeometriskos raksturotājus. Līdzās stieņveida konstrukciju elementu garumiem un šķērssgriezuma laukumiem, kurus varam uzskatīt par izmantotā materiāla daudzuma raksturotājiem, svarīgi ievest parametrus, kuri raksturotu materiāla izvietojumu ap stieņa asi. Tātad jāatrod parametri, kuri ļautu raksturot stieņa šķērssgriezuma formu.

Stieņa šķērssgriezuma formai nav nozīmes risinot tādas statikas uzdevumus kā balstu reakciju un iekšējo piepūli (statiski noteicamām sistēmām) noteikšana, bet forma un līdz ar to arī figūru laukumu ģeometriskie raksturotāji ir būtiski, aprēķinot konstrukcijas elementu **stiprību**, **stingumu** un **noturību**.

Šādi speciāli laukumu ģeometriskie raksturotāji ir vairāki. Laukumu ģeometriskos raksturotājus apgūšanu sāksim ar statistiskajiem momentiem.

*Par figūras laukuma **statisko momentu** pret kādu no asīm, kas atrodas figūras plaknē, sauc lielumu, ko iegūst summējot, pa visu figūras laukumu elementāro laukumiņu reizinājumus ar šo laukumiņu attālumiem līdz attiecīgajai asij (att. 6.1).*

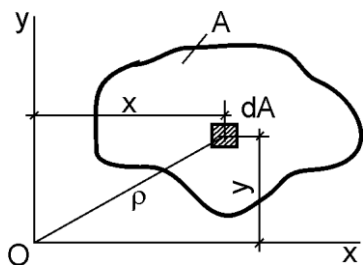
Statisko momentu apzīmē ar **S** un indeksu, kurš norāda asi, pret kuru tiek sastādīts moments. No definīcijas izriet, ka figūras laukuma statistiskais moments ir noteiktais integrālis, veicot integrēšanu pa visu figūras laukumu.

Tātad statistiskais moments pret x asi ir

$$S_x = \int_A y dA, \quad (6.1)$$

bet pret y asi

$$S_y = \int_A x dA. \quad (6.2)$$



att. 6.1

Gadījumos, kad figūras laukums sastāv no vienkāršākām ģeometriskām figūrām — taisnstūriem, trīsstūriem, riņķiem, u.c., nosakot pilnā laukuma statisko momentu, integrēšanu var aizstāt ar summēšanu:

$$S_x = \sum_A y_i \Delta A_i; \quad S_y = \sum_A x_i \Delta A_i, \quad (6.3)$$

kur ΔA_i — vienkāršo figūru laukumi;

y_i un x_i — vienkāršo figūru laukumu smaguma centru koordinātes.

Formulās (6.3) tiek summēti vienkāršo laukumu statistiskie momenti:

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}, \quad (6.4)$$

$$S_y = S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}.$$

Tātad sarežģītas figūras laukuma statistiskais moments pret kādu no asīm ir tā at-

sevišķo daļu statisko momentu algebriska summa pret to pašu asi.

Šīs summas aizstājot ar visa laukuma statisko momentu pret tām pašām asīm, iegūstam

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c, \quad (6.5)$$

kur: A — visas figūras laukums;

y_c un x_c — pilnā laukuma smaguma centra koordinātes.

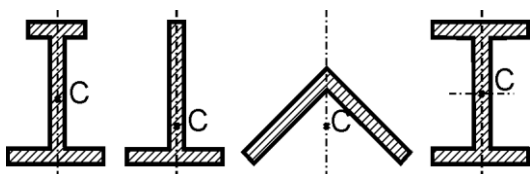
Līdz ar to iegūstam sakarības saliktu figūru laukuma smaguma centra koordināšu noteikšanai:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{A} = \frac{S_{1y} + S_{2y} + \dots + S_{ny}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \\ y_c &= \frac{S_x}{A} = \frac{S_{1x} + S_{2x} + \dots + S_{nx}}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

kur S_x — visa šķērsriezuma laukuma statistiskais moments pret x asi;

$S_{1x}, S_{2x}, \dots, S_{nx}$ — kopējā laukuma atsevišķo daļu laukumu statistiskie momenti pret x asi.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ — atsevišķo daļu laukumi, bet $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ figūras pilnais laukums.



att. 6.2.

Daži no taisnstūrveida laukumiem salikti šķēlumi parādīti att.6.2.

Statiskā momenta vērtība ir atkarīga no asu stāvokļa, pret kurām nosaka statisko momentu. Tā kā figūras laukumam vienmēr ir pozitīva vērtība, bet smaguma centra koordinātes var būt gan

pozitīvas, gan negatīvas atkarībā no tā, kurā ass pusē atrodas laukuma lielākā daļa, tad statistiskie momenti var būt gan **pozitīvi**, gan **negatīvi**, gan arī **nulle**. Tātad jāeksistē vienai noteiktai asij, pret kuru laukuma statistiskais moments ir nulle. Ja ņem vērā, ka statistiskais moments nosakāms reizinot figūras laukumu (un tas nav nulle) ar tā smaguma centra attālumu no konkrētās ass, varam secināt, ka statiskā momenta vērtība var būt nulle tikai tādā gadījumā, ja šķēluma smaguma centra koordināte pret attiecīgo asi ir nulle.

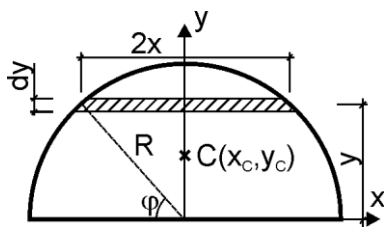
Tātad koordinātu asīs, kuras iet caur šķēluma smaguma centru statistiskais moments ir nulle. Asi, kas iet caur figūras laukuma smaguma centru, sauc par **centrālo asi**.

Simetriska laukuma statistiskais moments pret simetrijas asi vienmēr ir vienāds ar nulli. Tas nozīmē, ka simetriskām figūrām smaguma centrs atrodas uz simetrijas ass.

Statisko momentu mērvienības atbilst garuma mērvienību kubam ($\text{mm}^3, \text{cm}^3, \text{m}^3$, u.c.).

No sakarībām (6.5) secinām, ka, lai noteiktu figūras smaguma centra koordinātes izvēlētajā koordinātu sistēmā, jāzina šīs figūras laukums un tās statistiskie momenti pret attiecīgajām asīm.

Piemērs 6.1 Noteikt pusriņķa ar rādiusu r smaguma centra koordinātes.



Atrisinājums. Šim nolūkam izmantosim sakarības (6.5). Vispirms, izmantojot sakarību

$$S_x = \int_A y dA,$$

noteiksim šķēluma (pusriņķa) statisko momentu pret x asi.

Sadalām šķēlumu bezgalīgi plānās kārtiņās ar platumu $2x$ un biezumu dy , kuras var uzskatīt par elementāriem taisnstūriem. Tādā gadījumā $dA = 2xdy$.

Izsakot koordinātes x un y caur rādiusu R un leņķi φ :

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi$$

nosakām, ka

$$dy = d(R \sin \varphi) = R \cos \varphi d\varphi.$$

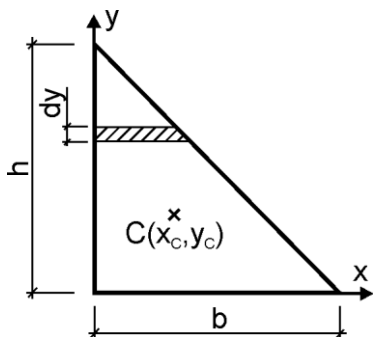
Ievietojot attiecīgās sakarības S_x izteiksmē, iegūstam

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^{\pi/2} (R \sin \varphi) \cdot (2R \cos \varphi) R \cos \varphi d\varphi = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) = 2R^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} R^3. \end{aligned}$$

Zinot šķēluma statisko momentu S_x un laukumu $A = \pi R^2/2$, varam noteikt smaguma centra koordināti y_c :

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{2}{3} R^3 \frac{1}{\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi} = 0,424R.$$

Tā kā pusriņķim y ass ir simetrijas ass, tad smaguma centrs atrodas uz šīs ass. Tātad pusriņķa smaguma centrs atrodas $0,424R$ attālumā no tā pamata uz tā simetrijas ass.



Piemērs 6.2. Noteikt taisnlenķa trīsstūra smaguma centra koordinātes asīs, kuru virzieni sakrīt ar trīsstūra katetēm.

Atrisinājums. Līdzīgi kā iepriekšējā piemērā nosakām $dA = xdy$.

Trīsstūra hipotenūzu nosaka sakarība $x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right)$

(taisne caur diviem punktiem).

Tātad

$$S_x = b \int_0^h y \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{bh^2}{6}.$$

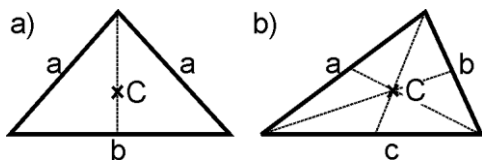
Trīsstūra smaguma centra koordināti y_c nosaka attiecība S_x / A un tātad

$$y_c = \frac{bh^2}{6} \bigg/ \frac{bh}{2} = \frac{h}{3}.$$

Analogā veidā (tikai elementārlaukumiņu orientējot paralēli y asij) iegūstam, ka

$$x_c = \frac{b}{3}.$$

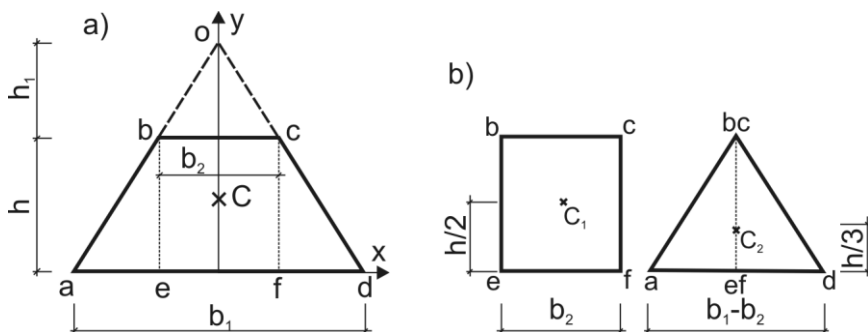
Tātad taisnleņķa trīsstūrim smaguma centra koordinātes attiecīgi ir 1/3 daļa no katešu garumiem. (Var pierādīt, ka smaguma centrs ir šāda trīsstūra mediānu krustpunksts).



Līdzīgā veidā varam noteikt smaguma centra koordinātes jebkura veida trīsstūrim.

Studentam iesakām patstāvīgi noteikt smaguma centra koordinātes attēlā parādītajiem trīsstūriem.

Piemērs 6.3. Noteikt vienādsānu trapeces smaguma centra koordinātes.



Atrisinājums. Veiksim šo uzdevumu divos atšķirīgos veidos.

Pirmajā gadījumā (att. a) papildināsim trapeci **abcd** līdz vienādsānu trīsstūrim **aod**. Nosakot divu trīsstūru **aod** un **boc** statiskos momentus, varam iegūt trapeces **abcd** statisko momentu kā šo divu figūru statisko momentu starpību:

$$\begin{aligned} S_x &= S_x^{\Delta aod} - S_x^{\Delta boc} = \\ &= \frac{(h+h_1) \cdot b_1}{2} \cdot \frac{h+h_1}{3} - \frac{h_1 \cdot b_2}{2} \cdot \left(h + \frac{h_1}{3}\right) = \frac{h^2}{6} (b_1 + 2b_2). \end{aligned}$$

Tā kā trapeces laukums A_{tr} ir nosakāms kā divu trīsstūra laukuma starpība, tad

$$A_{tr} = A_{\Delta aod} - A_{\Delta boc} = h \cdot (b_1 + b_2) / 2$$

Trapeces smaguma centra koordināti y nosaka sakarība:

$$y_c = \frac{S_x}{A_{tr}} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right).$$

Tā kā trapece ir vienādsānu, tad y ass ir tās simetrijas ass un $x_c = 0$.

Trapeces statisko momentu var noteikt arī kā to veidojošo vienkāršāko figūru statisko momentu summu (att. b). Šai nolūkā sadalām trapeci trīsstūrī, kas apvieno divus trīsstūrus **abe** un **fcd** un taisnstūrī **ebcf**. Tā kā šo figūru smaguma centru koordinātes ir zināmas, tad arī to statisko momentu noteikšana nerada grūtības.

Trapeces statistiskais moments ir

$$S_x = (b_1 - b_2) \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} + b_2 \cdot h \cdot \frac{h}{2} = \frac{h^2}{6} (2b_2 + b_1).$$

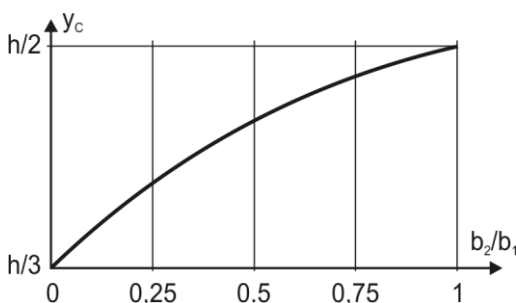
Tāpat izteiksmes kas iegūtas ar abiem paņēmieniem ir identiskas.

Trapeces laukums ir viduslīnijas un augstuma reizinājums un līdz ar to tās smaguma centra koordināti y nosaka sakarība

$$y_c = \frac{(2b_2 + b_1)h^2}{3 \cdot (b_1 + b_2)h} = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right) = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b_2/b_1}{1 + b_2/b_1} \right)$$

Tā kā trapece ir simetriska attiecībā pret vertikālo asi, tad tās smaguma centru jāatrodas uz šīs ass (y ass) un līdz ar to $x_c = 0$.

Pie nosacījuma, ka $0 \leq b_2 \leq b_1$ varam konstatēt, ka trapeces smaguma centra attālums



y_c no trapeces pamata var mainīties in-

tervālā $\left[\frac{h}{3} \div \frac{h}{2} \right]$, t.i. y_c mainās starp

trīsstūra un taisnstūra smaguma centru novietojumiem, pie kam šī izmaiņa nav lineāra (sk. att.), jo sakarība

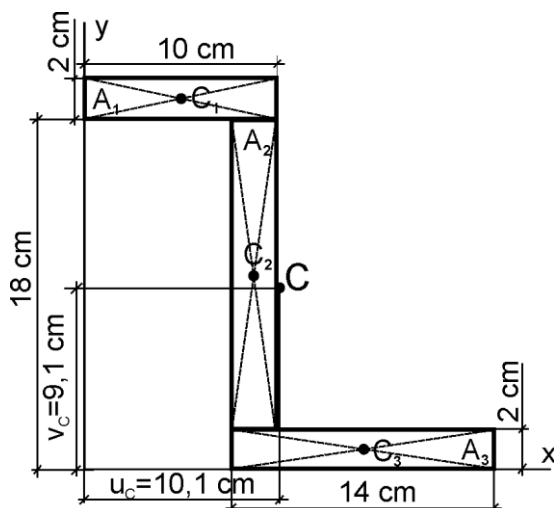
$$y_c = \frac{h}{3} \left[1 + \frac{b_2/b_1}{1 + b_2/b_1} \right]$$

nav lineāra attiecībā pret parametru b_2/b_1 .

Studentiem iesakām patstāvīgi noteikt smaguma centra koordinātes neregulārai trapecei.

Piemērs 6.4. Noteikt Z veida šķēluma laukuma smaguma centra koordinātes. Koordinātu asu novietojums un šķēluma izmēri doti attēlā.

Atrisinājums. Šķēlumu sadalām trijās daļās, kuru laukumi ir A_1 , A_2 un A_3 . Aprēķinām šo taisnstūru laukumus un nosakām to smaguma centru koordinātes:



$$A_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ cm}^2; \quad x_1 = 5 \text{ cm}; \quad y_1 = 19 \text{ cm};$$

$$A_2 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ cm}^2; \quad x_2 = 9 \text{ cm}; \quad y_2 = 10 \text{ cm};$$

$$A_3 = 14 \cdot 2 = 28 \text{ cm}^2; \quad x_3 = 15 \text{ cm}; \quad y_3 = 1 \text{ cm}.$$

Aprēķinām taisnstūru laukumu statiskos momentus:

$$S_{1y} = A_1 x_1 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ cm}^3;$$

$$S_{1x} = A_1 y_1 = 20 \cdot 19 = 380 \text{ cm}^3;$$

$$S_{2y} = A_2 x_2 = 32 \cdot 9 = 288 \text{ cm}^3;$$

$$S_{2x} = A_2 y_2 = 32 \cdot 10 = 320 \text{ cm}^3;$$

$$S_{3y} = A_3 x_3 = 28 \cdot 15 = 420 \text{ cm}^3;$$

$$S_{3x} = A_3 y_3 = 28 \cdot 1 = 28 \text{ cm}^3.$$

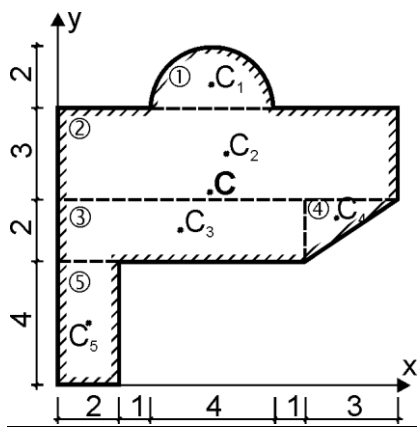
Atbilstoši formulām (6.6) nosakām šķēluma laukuma smaguma centra

koordinātes:

$$x_C = \frac{S_{1y} + S_{2y} + S_{3y}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{100 + 288 + 420}{20 + 32 + 28} = \frac{808}{80} = 10,1 \text{ cm};$$

$$y_C = \frac{S_{1x} + S_{2x} + S_{3x}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{380 + 320 + 28}{20 + 32 + 28} = \frac{728}{80} = 9,1 \text{ cm}.$$

Tā kā figūra nav simetriska pret izvēlētajām asīm xy (un asis xy neiet caur figūras smaguma centru), tad neviena no smaguma centra koordinātēm nav nulle.



Piemērs 6.5. Noteikt smaguma centra koordinātes koordinātu asīs xy attēlā parādītajai figūrai (izmēri doti cm).

Atrisinājums. Vispirms izvēlamies dotās figūras sadalījumu vienkāršās elementārās figūrās, kurām viegli nosakāms laukums un smaguma centra novietojums (izvēle nav viennozīmīga). Viens no sadalījuma variantiem parādīts attēlā.

Vispirms nosakām katras elementārās figūras laukumu un smaguma centra koordinātes. Iegūstam sekojošas vērtības:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ cm}^2; \quad x_{C1} = 5 \text{ cm}; \quad y_{C1} = 9 + 0,424 \cdot 2 = 9,848 \text{ cm};$$

$$A_2 = 33 \text{ cm}^2; \quad x_{C2} = 5,5 \text{ cm}; \quad y_{C2} = 7,5 \text{ cm};$$

$$A_3 = 16 \text{ cm}^2; \quad x_{C3} = 4 \text{ cm}; \quad y_{C3} = 5 \text{ cm};$$

$$A_4 = 3\text{cm}^2; \quad x_{C4} = 9\text{cm}; \quad y_{C4} = 5,33\text{cm};$$

$$A_5 = 8\text{cm}^2; \quad x_{C5} = 1\text{cm}; \quad y_{C5} = 2\text{cm}.$$

Izmantojot sakarības (6.6), iegūstam

$$x_C = \frac{6,28 \cdot 5 + 33 \cdot 5,5 + 16 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 8 \cdot 1}{6,28 + 33 + 16 + 3 + 8} = 4,71 \text{ cm}$$

$$y_C = \frac{6,28 \cdot 9,848 + 33 \cdot 7,5 + 16 \cdot 5 + 3 \cdot 5,33 + 8 \cdot 2}{6,28 + 33 + 16 + 3 + 8} = 6,36 \text{ cm}$$

Noteiktais dotās figūras **smaguma centrs C** parādīts zīmējumā un tā koordinātes dotajās asīs ir $x_C = 4,71\text{cm}$, $y_C = 6,36\text{cm}$.

6.2. Laukumu inerces momenti

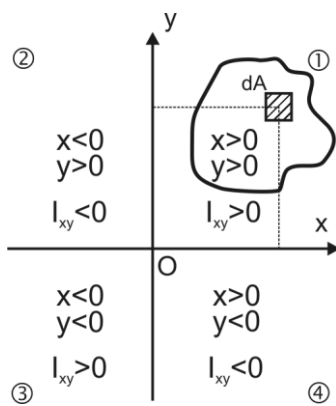
Nosakot stieņu lieces vai vērpes izraisītos pārvietojumus, nākas izmantot speciālus stieņu šķēluma ģeometriskos raksturotājus – inerces momentus.

Par figūras laukuma **aksiālo inerces momentu** sauc lielumu, ko iegūst, pa visu figūras laukumu **A** summējot elementāro laukumiņu **dA** reizinājumus ar šo laukumiņu attālumu līdz dotajai asi kvadrātiem (att. 6.1).

Tātad aksiālos inerces momentus pret asīm **x** un **y** nosaka integrāļi:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A x^2 dA. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Aksiālie inerces momenti neatkarīgi no koordinātu asu izvietojuma vienmēr ir pozitīvi un nevar būt vienādi ar nulli. Aksiālos inerces momentus mēra vienībās, kas atbilst garuma mērvienību ceturtajai pakāpei (mm^4 , cm^4 , m^4 , u.c.).



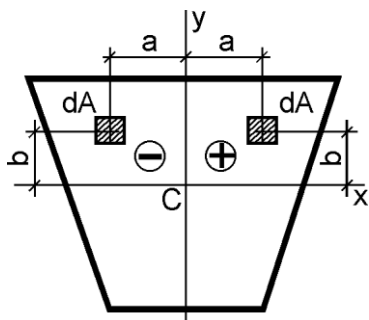
att. 6.3

Nesimetriska šķērsriezuma siju liecē sastopams parametrs ko iegūst, pa visu figūras laukumu summējot elementāro laukumiņu reizinājumus ar attālumiem līdz divām savstarpēji perpendikulārām asīm. Šo lielumu sauc par laukuma **centrbēdzes inerces momentu** un to nosaka sakarība:

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (6.8)$$

Centrbēdzes inerces momenta mērvienība arī ir garuma mērvienība ceturtajā pakāpē. Atšķirībā no aksiālajiem inerces momentiem centrbēdzes inerces moments var būt gan pozitīvs, gan negatīvs vai arī nulle. Figūrai atrodoties **x** un **y** asu pozitīvajā kvadrantā ① vai kvadrantā ③ tās centrbēdzes inerces moments I_{xy} ir pozitīvs,

bet kvadrantos ② un ④ negatīvs. Pagriežot asis ap koordinātu sākumpunktu O dotā figūra var nonākt jebkurā no kvadrantiem un līdz ar to centrālās inerciācijas moments I_{xy} var mainīt zīmi (att. 6.3). Tā kā pagriežot asis centrālās inerciācijas momenta izmaiņa ir nepārtraukta, tad eksistē divas tādas asu pagriešana leņķa vērtības pie kurām. Dažām figūrām ļoti vienkārši noteikt asu orientāciju, kurās $I_{xy} = 0$.



att. 6.4

Ja y ass ir figūras simetrijas ass (sk.att. 6.4), centrālās inerciācijas moments pret centrālajām x un y asīm vienāds ar nulli. Ikvienam laukumam dA , kas atrodas pa labi no y ass atbilst tāds pats laukumiņš pa kreisi no y ass. Pirmajā gadījumā laukumiņa novietojumu raksturo pozitīva x koordinātes vērtība, bet otrajā - tik pat liela pēc absolūtās vērtības, bet negatīva koordināte.

Katram pret y asi simetriski novietotam laukumiņu pārim reizinājumu $xydA$ summa ir vienāda ar nulli; tātad simetriskas figūras laukuma centrālās inerciācijas moments pret divām savstarpēji perpendikulārām centrālajām asīm, no kurām viena ir simetrijas ass, vienmēr vienāds ar nulli.

Par polāro inerciācijas momentu sauc figūras elementāro laukumiņu dA reizinājumu ar attālumu ρ kvadrātu līdz uzdotam punktam (polam O) summu, veicot summēšanu pa visu šķēluma laukumu A.

Tā kā $\rho^2 = x^2 + y^2$ (att. 6.1), tad varam pierādīt sekojošu īpašību

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x \quad (6.9)$$

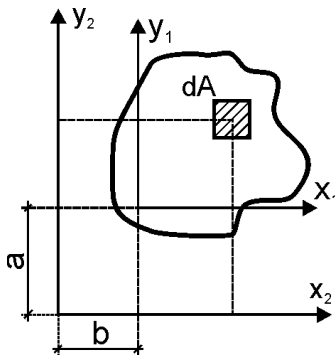
(polārais inerciācijas moments ir vienāds ar divu aksiālo inerciācijas momentu summu ortogonālās asīs, kuras iet caur polu O). Polārā inerciācijas momenta mērvienība arī ir garuma mērvienība ceturtajā pakāpē un tas vienmēr ir pozitīvs.

Izmantojot polāro inerciācijas momentu, varam pierādīt vēl vienu īpašību. Tā kā izdarot asu pagriezienu attiecībā pret polu O par patvaļīgu leņķi, piem. att. 6.6 tas ir α , ir atkal spēkā sakarība $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2$, tad varam secināt, ka $I_p = I_{x1} + I_{y1}$ un līdz ar to spēkā apgalvojums: neatkarīgi no ortogonālu asu pagriešana plaknē ap to sākuma punktu aksiālo inerciācijas momentu summa ir konstanta:

$$I_x + I_y = I_{x1} + I_{y1} = \text{const.} \quad (6.10)$$

6.3. Sakarības starp laukuma inerciācijas momentiem savstarpēji paralēlās asīs

Saskaņā ar aksiālo inerciācijas momentu definīciju un sakarībām (6.7), varam noteikt šos inerciācijas momentus jebkurās patvaļīgās koordinātu asīs x, y. Tomēr būtiskākās aksiālo inerciācijas momentu vērtības konkrētiem stieņu šķēlumu laukumiem ir tās, kuras iegūtas centrālajās asīs. Veidojot stieņus ar sarežģītākas konfigurācijas šķērsgrīzumu rodas nepieciešamība noteikt atsevišķu šos šķērsgrīzumus veidojošo figūru inerciācijas momen-



att. 6.5

tus citās koordinātu asīs. Tādēļ rodas nepieciešamība iegūt sakarības, kuras saista inerces momentus jebkurās divās savstarpēji paralēlās asīs. Šādas asis parādītas att. 6.5.

Tās ir asis x_1 un y_1 un asis x_2 un y_2 . Pieņemam, ka asīs x_1, y_1 visi šķēluma ģeometriskie parametri ir zināmi. Tādā gadījumā elementārlaukuma dA koordinātes asīs x_2, y_2 nosaka sakarības

$$x_2 = x_1 + b, \quad y_2 = y_1 + a.$$

Ievietojot šīs sakarības aksiālo momentu izteiksmēs

$$I_{x_2} = \int_A y_2^2 dA \quad \text{un} \quad I_{y_2} = \int_A x_2^2 dA$$

iegūstam

$$\begin{aligned} I_{x_2} &= \int_A (y_1 + a)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2a \int_A y_1 dA + a^2 \int_A dA = \\ &= I_{x_1} + 2aS_{x_1} + a^2 A \end{aligned} \quad (6.11)$$

un

$$I_{y_2} = \int_A (x_1 + b)^2 dA = I_{y_1} + 2bS_{y_1} + b^2 A.$$

Analogi iegūstam centrālās inerces momenta vērtību koordinātu asīs x_2, y_2 .

Izmantojot asu transformācijas sakarības, iegūstam

$$\begin{aligned} I_{x_2 y_2} &= \int_A (x_1 + a)(y_1 + b) dA = \int_A x_1 y_1 dA + a \int_A y_1 dA + \\ &+ b \int_A x_1 dA + ab \int_A dA = I_{x_1 y_1} + aS_{x_1} + bS_{y_1} + abA \end{aligned} \quad (6.12)$$

Tātad „jaunajās asīs” (asis x_2, y_2) inerces momenti nosakāmi izmantojot šķēluma ģeometriskos parametrus $I_{x_1}, I_{y_1}, I_{x_1 y_1}, S_{x_1}, S_{y_1}$ “vecajās asīs” (asis x_1, y_1). Ja “vecās asīs” ir centrālās (apzīmēsim ar x_{10} un y_{10}), tad, kā jau esam pierādījuši, statistiskie momenti pret šīm asīm ir vienādi ar nulli, t.i. $S_{x_{10}} = 0$ un $S_{y_{10}} = 0$. Tādā gadījumā sakarības (6.11) un (6.12) vienkāršojas un iegūst sekojošu veidu:

$$I_{x_2} = I_{x_{10}} + a^2 A; \quad I_{y_2} = I_{y_{10}} + b^2 A; \quad I_{x_2 y_2} = I_{x_{10} y_{10}} + abA. \quad (6.13)$$

Šīs formulas (6.13) sauc par pārejas formulām no centrālām asīm uz jebkurām tām paralēlām asīm. Gadījumā, ja nepieciešams pāriet no jebkurām patvaļīgām asīm x un y uz tām paralēlām centrālām asīm, lietojam sakarības

$$I_{x_{10}} = I_{x_2} - a^2 A; \quad I_{y_{10}} = I_{y_2} - b^2 A; \quad I_{x_{10} y_{10}} = I_{x_2 y_2} - abA. \quad (6.14)$$

Svarīgi atcerēties, ka asu pārbīdes koeficienti a un b sakarībās (6.11) – (6.14) jālieto ņemot vērā to zīmes koordinātu asīs x_2, y_2 .

Izmantojot sakarību (6.13), varam izdarīt secinājumu, ka aksiālā inerces momenta vērtības jebkurās pārbīdītās asīs ir lielākas par attiecīgo aksiālo inerces momentu vērtībām centrālās asīs. Tātad **asīs, kuras iet caur figūras smaguma centru ir minimālie šķērsriezuma aksiālie inerces momenti**.

Centrbēdzes inerces moments jebkurās centrālajām asīm paralēlās asīs ir vienāds ar centrbēdzes inerces momentu centrālajās asīs plus šķērsriezuma laukuma reizinājums ar tā smaguma centra koordinātēm jaunajās asīs.

Gadījumos, kad šķērsriezumam ir simetrijas ass, centrbēdzes inerces moments centrālajās asīs ir vienāds ar nulli un centrbēdzes inerces moments jebkurās paralēli pārbīdītās asīs ir $I_{x_2y_2} = ab \cdot A$.

Izmantojot sakarību (6.9) un paralēlas asu pārbīdes sakarības, varam pierādīt, ka

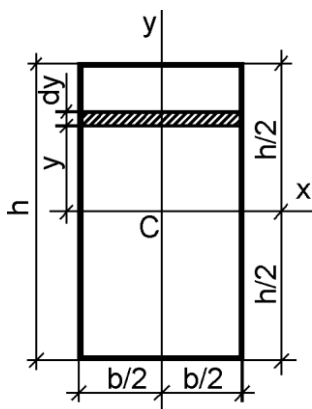
$$I_{\rho_2} = I_{\rho_1} + 2bS_{y_1} + 2aS_{x_1} + (a^2 + b^2)A,$$

bet, ja asis x_1y_1 dotajam šķērsriezumam ir centrālās, ir spēkā sakarība

$$I_{\rho_2} = I_{\rho_1} + (a^2 + b^2)A.$$

6.4. Vienkāršu plakano figūru laukumu inerces momenti

Nosakot figūru inerces momentu vērtības līdzīgi kā smaguma centra gadījumā svarīgi ir pievērst uzmanību tam, kurās asīs tiek veikts aprēķins. Šī paragrāfa ietvaros noteiksim vienkāršāko plakano figūru inerces momentus šo figūru centrālajās asīs (koordinātu sākumpunkts figūras smaguma centrā).



Taisnstūris.

Nosakot **taisnstūra** aksiālos inerces momentus centrālās asīs, kuras vērsta taisnstūra malu virzienos visu taisnstūra laukumu sadalām elementāros slāņīšos, kuru augstums ir dy , bet platums b . Tādas josliņas laukums ir $dA = bdy$, bet tās attālums no x ass vienāds ar y , pie kam y mainās no $-h/2$ līdz $h/2$.

Ievietojot integrālī $I_x = \int_A y^2 dA$ integrēšanas robežas un dA izteiksmi, iegūstam

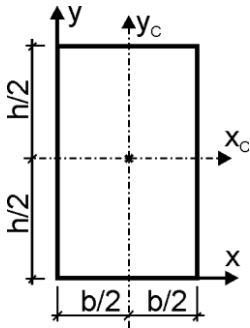
$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \int_0^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = 2b \frac{y^3}{3} \Big|_0^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}.$$

Analogā veidā visu taisnstūra laukumu varam sadalīt elementārslāņīšos paralēli y asij. Veicot integrēšanu pa x asi robežās no $-b/2$ līdz $b/2$, iegūstam vērtību

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Svarīgi ņemt vērā, ka šīs taisnstūra veida figūras aksiālo inerces momentu vērtības attiecas tikai uz centrālām, taisnstūra malu virzienos orientētām asīm. Šīs asis ir dotās figūras simetrijas asis.

Piemērs 6.6 Noteikt inerces momentus taisnstūrveida šķēlumam asīs, kuras vērstas pa taisnstūra malām.



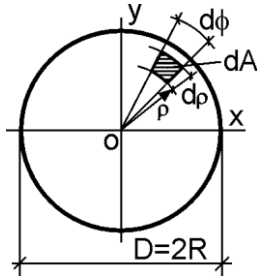
Atrisinājums. Tā kā ir zināms, ka centrālajās asīs (x, y) figūras inerces moments ir $I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$, bet tās laukums $A = bh$ un x ass tiek pārbīdīta par $a = h/2$ izmantojot sakarību (6.12), iegūstam

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Līdzīgā veidā varam iegūt sakarību $I_y = \frac{hb^3}{3}$, bet centrālās

inerces moments x un y asīs ir $I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$.

Tātad aksiālo inerces momentu vērtības asīs x , y ir četras reizes lielākas kā centrālajās asīs.



Rinkis.

Nosakot **rinka** laukuma aksiālos inerces momentus pret centrālām asīm ērti rīkoties sekojošā veidā – ņemot vērā, ka rinka aksiālie inerces momentu pret jebkuru centrālo asi ir vienādi ($I_x = I_y$) un izmantojot sakarību (6.9), iegūstam izteiksmes

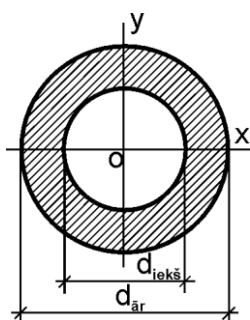
$I_x = I_y = I_p/2$. Atliek noteikt rinka polāro inerces momentu I_p . Šai nolūkā varam izmantot polārās koordinātes ρ un ϕ .

Veicot elementārlaukumiņu $dA = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi$ un to attāluma līdz polam O kvadrāta reizinājumu summēšanu pa visu rinka laukumu A , nonākam pie sekojoša rezultāta:

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Tātad aksiālie inerces momentu rīnkim pret jebkuru centrālo asi ir

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{2 \cdot 32} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

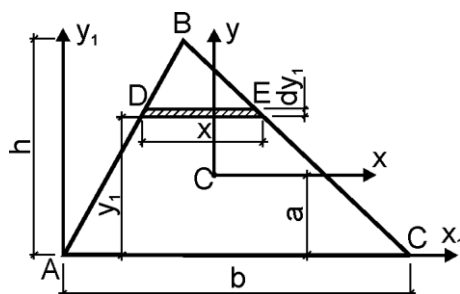
**Gredzens.**

Gredzena polārais inerces moments pret centrālām asīm nosakāms kā starpība starp ārējā diametra riņķa polāro inerces momentu un iekšējā riņķa polāro inerces momentu:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d_{ar}^4 - \frac{\pi}{32} d_{iekš}^4 \approx 0,1 d_{ar}^4 (1 - a^4),$$

kur: $a = \frac{d_{iekš}}{d_{ar}}.$

Gredzena aksiālie inerces momenti ir $I_x = I_y = \frac{I_p}{2} \approx 0,05 d_{ar}^4 (1 - a^4).$

**Trīsstūris.**

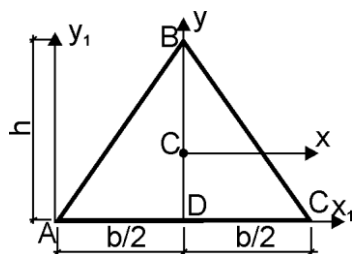
Trīsstūra ar augstumu **h** un pamata malu **b** laukumu sadalām elementārlaukumiņos dA , kuri paralēli trīsstūra pamatam. Viena tāda elementārlaukuma laukums ir $dA = b_1 dy_1$. Garumu b_1 nosakām no trīsstūru ABC un DBE līdzības: $b_1 = b(h - y_1)/h$. Tātad $dA = b(h - y_1)dy_1 / h$.

Izmantojot sakarību (6.7), nosakām trīsstūra ABC aksiālo inerces momentu pret tā pamata malu, tātad asīs x_1, y_1 :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = b^2 \int_0^h y_1^2 \left(1 - \frac{y_1}{h}\right) dy_1 = \frac{bh^3}{12}$$

Izmantojot sakarību $I_{x_1} = I_x + a^2 A$ un ņemot vērā, ka $a = h/3$ aksiālais inerces moments pret trīsstūra centrālo asi x ir:

$$I_x = I_{x_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}.$$

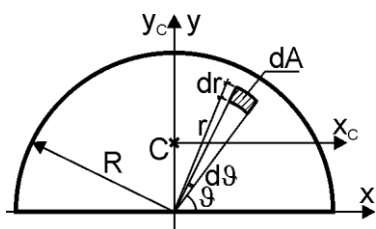


Tātad aksiālā inerces momenta vērtība pret centrālo asi ir trīs reizes mazāka, kā pret asi, kura sakrīt ar trīsstūra malu.

Studentiem ieteicam patstāvīgi pierādīt, ka trīsstūra aksiālais inerces moments pret asi x_2 , kura ir paralēla galvenajai asij x un iet caur trīsstūra virsotni B, ir $bh^3/4$.

Vienādsānu trīsstūrim aksiālais inerces moments pret simetrijas asi (ass y) nosakāms kā divu taisnleņķa trīsstūru (BDA un BDC) inerces momentu summa:

$$I_y = 2 \frac{h(b/2)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$



Pusriņķis.

Pusriņķa aksiālais inerces moments **pret asi**, kura vērsta **pa riņķa diametru**, ir puse no riņķa inerces momenta, t.i.:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{8}.$$

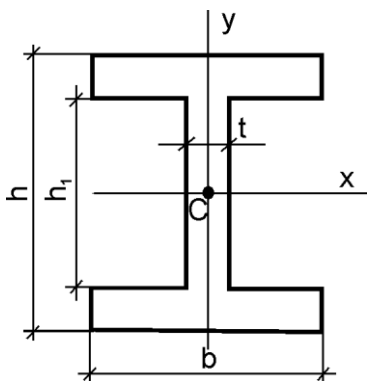
Aksiālo pusriņķa inerces momentu pret centrālo asi x nosakām izmantojot asu paralēlās pārbīdes principu. Tā rezultātā iegūstam aksiālā inerces momenta vērtību **pret centrālo asi**, kura paralēla pusriņķa pamatam.:

$$I_{x_c} = I_x - a^2 A = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi R^2}{2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4 \approx 0,11 R^4$$

Pusriņķa aksiālo inerces momentu pret y asi varam noteikt izmantojot sakarību

$$I_p = I_x + I_y. \text{ Tādā gadījumā } I_y = I_p - I_x = \frac{\pi R^4}{2 \cdot 2} - \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi R^4}{8} \text{ un esam konstatēju-$$

ši, ka pusriņķa aksiālais inerces moments pret simetrijas asi ir puse no aksiālā inerces momenta pilnam riņķim, kā tas bija arī sagaidāms.



Dubult-T veida laukums.

Nestandarta **dubult-T profila** laukuma inerces momentu pret x asi atrodam kā taisnstūra (ar pamatu b un augstumu h) un divu savstarpēji vienādu taisnstūru (ar augstumiem h_1 un kopējo platumu $b_1 = b - t$) aksiālo inerces momentu starpību.

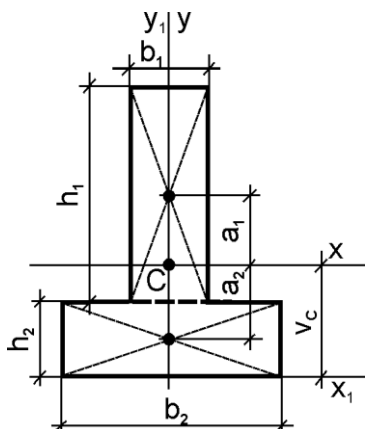
Ass x iet caur visu taisnstūru laukumu smaguma centriem, līdz ar to varam izmantot formulu (6.13):

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{bh^3 - (b-t)h_1^3}{12}$$

Gadījumos, kad figūras laukumu var sadalīt atsevišķās daļās, kuru inerces momenti pret to centrālajām asīm nosakāmi pēc gatavām formulām (sk. pielikumā) vai doti sortimenta tabulās (velmētie profili), visa laukuma inerces momentu pret centrālo asi aprēķina, summējot atsevišķo daļu inerces momentus. Bieži nākas pielietot teorēmu par inerces momentiem pret paralēlām asīm.

Sarežģīta laukuma atsevišķo daļu inerces momentus drīkst summēt tikai pēc to reducēšanas uz kopīgu asi.

Izmantojot iepriekš teikto, noteiksim T veida profila laukuma inerces momentu pret centrālo asi x . Kopējā laukuma smaguma centra attālumu no apakšējās malas y_c nosakām atbilstoši sakarībām (6.6). Sadalām figūru divos taisnstūros, kā attēlots zīmējumā. Šo taisnstūru smaguma centru attālumus no x ass apzīmējam ar a_1 un a_2 . Taisnstūru laukumu inerces momenti pret šo laukumu centrālajām asīm, kuras paralēlas x asij, saskaņā ar formulu (6.13) ir

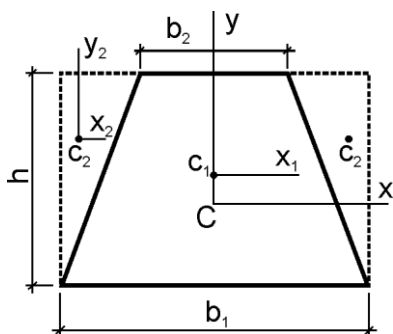


$$\frac{b_1 h_1^3}{12} \quad \text{un} \quad \frac{b_2 h_2^3}{12}.$$

Kopējā laukuma inerces momentu pret x asi aprēķinām, izmantojot formulu (6.7):

$$I_x = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 b_1 h_1 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 b_2 h_2.$$

Piemērs 6.7. Noteikt vienādsānu trapeces aksiālo inerces momentu pret pamatiem paralēlu centrālo asi.



Atrisinājums. Vienādsānu trapeces gadījumā piem. 6.3 tika konstatēts, ka tās smaguma centrs

atrodas augstumā $y_c = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2} \right)$ no trape-

ces pamata. Trapeces aksiālo inerces momentu pret centrālo asi x noteiksim kā taisnstūra un divu taisnleņķa trīsstūru aksiālo inerces momentu starpību.

Atsevišķo figūru aksiālo inerces momentu vērtības pret to lokālajām centrālajām asīm, kuras ir paralē-

las asij x , jau esam noteikuši. Tās ir

$$I_{(t-st)} = \frac{b_1 h^3}{12}; \quad I_{(tr-st)} = \frac{(b_1 - b_2) h^3}{72}.$$

Nepieciešams noteikt atsevišķo figūru lokālo smaguma centru C_1 un C_2 attālumus no dotās trapeces smaguma centra C .

Attālums starp centriem C_1 un C ir $a_1 = \frac{h}{2} - y_c$, bet starp centriem C_2 un C tas ir

$$a_2 = \frac{2h}{3} - y_c.$$

Tātad, lai reducētu atsevišķo figūru aksiālos inerces momentus uz x asi, izmantojam paralēlās pārnese formulas (6.13), kā rezultātā iegūstam:

$$I_{(t-st)x} = \frac{b_1 h^3}{12} + a_1^2 b_1 h = \frac{b_1 h^3}{9} \left[\frac{b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2}{(b_1 + b_2)^2} \right];$$

$$I_{(tr-st)x} = \frac{(b_1 - b_2) h^3}{72} + a_2^2 \frac{(b_1 - b_2) h}{2 \cdot 2} = \frac{(b_1 - b_2) h^3}{72} \left[\frac{3b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2}{(b_1 + b_2)^2} \right].$$

Izmantojot sakarību

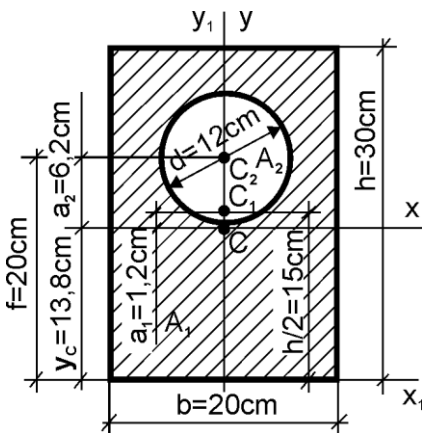
$$I_{trap,x} = I_{(t-st),x} - 2I_{(tr-st)x}$$

pēc matemātiskiem pārveidojumiem iegūstam:

$$I_{trap} = \frac{h^3}{36} \cdot \frac{b_1^3 + 5b_1^2 b_2 + 5b_1 b_2^2 + b_2^3}{(b_1 + b_2)^2} = \frac{h^3 (b_1^2 + 4b_1 b_2 + b_2^2)}{36(b_1 + b_2)}.$$

Šī sakarība pierāda, ka trapeces aksiālais inerces moments centrālajās asīs atkarībā no trapeces pamatu b_1 un b_2 attiecības var mainīties starp divām robežvērtībām – analoga augstuma trīsstūra ar pamata malu b_1 inerces momenta vērtību $\frac{b_1 h^3}{36}$ un taisnstūra ar augstumu h un platumu b , inerces momenta vērtību $\frac{b_1 h^3}{12}$. Tātad trapeces centrālā inerces momenta vērtība var mainīties trīs reizes.

Piemērs 6.8. Aprēķināt galvenos centrālos inerces momentus figūrai, ko veido taisnstūris, no kura izgriezts riņķis.



Atrisinājums. Vispirms atrodam galvenās centrālās inerces asis. Šķēlums ir simetrisks pret y asi un tātad tā ir viena no galvenajām asīm. Otra galvenā ass ir asij y perpendikulāra un iet caur šķēluma laukuma smaguma centru. Pa taisnstūra apakšējo malu novelkam palīgasi x_1 un nosakām attālumu y_c no šīs ass līdz šķēluma laukuma smaguma centram. Figūras šķēluma sadalām divās daļās - taisnstūrī, kuram

$$A_1 = bh = 20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2;$$

$$y_1 = \frac{h}{2} = 15 \text{ cm};$$

un riņķī, kuram

$$A_2 = -\frac{\pi d^2}{4} = -\frac{3,14 \cdot 12^2}{4} = -113 \text{ cm}^2;$$

$$y_2 = f = 20 \text{ cm}.$$

Riņķa laukuma statisko momentu uzskatām par negatīvu, jo tas izgriezts no taisnstūra.

Aprēķinām statiskos momentus un nosakām v_c :

$$S_{1x_1} = A_1 y_1 = 600 \cdot 15 = 9000 \text{ cm}^3;$$

$$S_{2x_1} = A_2 y_2 = -113 \cdot 20 = -2260 \text{ cm}^3;$$

$$y_c = \frac{S_{1x_1} + S_{2x_1}}{A_1 + A_2} = \frac{9000 - 2260}{600 - 113} = \frac{6740}{487} = 13,8 \text{ cm}.$$

Attālums no x ass līdz taisnstūra laukuma smaguma centram ir

$$a_1 = 15 - 13,8 = 1,2 \text{ cm};$$

attiecīgais attālums riņķim

$$a_2 = 20 - 13,8 = 6,2 \text{ cm}.$$

Nosakām visa šķēluma inerces momentus kā taisnstūra un riņķa laukumu inerces momentu starpību. Attiecībā pret x asi iegūstam

$$I_x = I_{xt} - I_{xr},$$

kur

$$I_{xt} = \frac{bh^3}{12} + bha_1^2 = \frac{20 \cdot 30}{12} + 20 \cdot 30 \cdot 1,2^2 = 45000 + 865 = 45865 \text{ cm}^4;$$

$$I_{xr} = \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} a_2^2 = \frac{3,14 \cdot 12^4}{64} + \frac{3,14 \cdot 12^2}{4} \cdot 6,2^2 = 1010 + 4350 = 5360 \text{ cm}^4.$$

Tātad dotās figūras aksiālais inerces moments pret šīs figūras centrālo asi ir:

$$I_x = 45865 - 5360 = 40505 \text{ cm}^4$$

Attiecībā pret y asi varam veikt analoģu aprēķinu un tā rezultātā iegūstam

$$I_y = I_{yt} - I_{yr},$$

kur

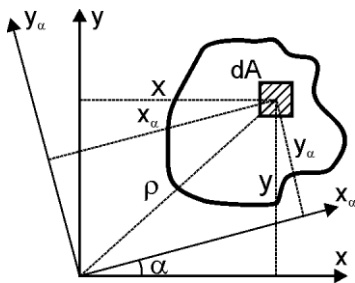
$$I_{yt} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20000 \text{ cm}^4$$

$$I_{yr} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{64} = 1010 \text{ cm}^4$$

Tātad pret figūras simetrijas asi y aksiālais inerces moments ir

$$I_y = 20000 - 1010 = 18990 \text{ cm}^4.$$

6.5. Sakarības starp inerces momentiem pie asu pagriešanas



att. 6.6

Izmantosim divas koordinātu sistēmas: xy (vecā sistēma) un $x_\alpha y_\alpha$ (jaunā sistēma), kuras atšķiras ar to, ka jaunā sistēma ir pagriezta pret veco par leņķi α virzienā, kurš pretējs pulksteņrādītāja kustības virzienam (att. 6.6).

Tādā gadījumā asu transformācijas sakarības ir

$$x_\alpha = y \sin \alpha + x \cos \alpha;$$

$$y_\alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Lai noteiktu aksiālo inerces momentu pret x_α asi, izmantojam sakarību

$$\begin{aligned} I_{x_\alpha} &= \int_A y_\alpha^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA. \end{aligned}$$

Tātad esam ieguvuši izteiksmi

$$I_{x_\alpha} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (6.15)$$

Analogā veidā iegūstam

$$I_{y_\alpha} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (6.16)$$

Saskaitot izteiksmes (6.15) un (6.16) nonākam pie jau iepriekš pierādītā, ka

$$I_{x_\alpha} + I_{y_\alpha} = I_x + I_y,$$

un tātad aksiālo inerces momentu summa divās savstarpēji perpendikulārās asīs nav atkarīga no šo asu pagriešana ap sākumpunktu.

Lielumus, kuri nemainās veicot asu pagriezienu, tiek saukti par invariantiem. Tātad summa $I_x + I_y$ ir invariants lielums.

Veicot līdzīgus aprēķinus kā iepriekš izklāstītie, nosakām arī centrālās inerces momenta vērtību pagrieztajās asīs $x_\alpha y_\alpha$. Šo vērtību nosaka sakarība

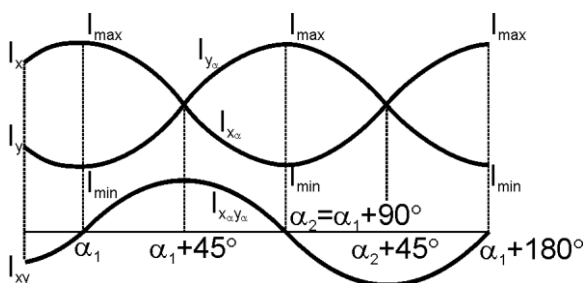
$$I_{x_\alpha y_\alpha} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (6.17)$$

6.6. Galvenās asis un galvenie inerces momenti

Sakarības (6.15) – (6.17) rāda, ka pagriežot koordinātu asis, inerces momentu vērtības izmainās, bet tai pat laikā aksiālo inerces momentu summa paliek nemainīga. Tātad, ja kādā asu orientācijās stāvoklī vienam no aksiālajiem inerces momentiem (piem. I_x) ir tā maksimālā vērtība, tad otram aksiālajam inerces momentam (I_y) ir tā minimālā vērtība. Šādas asis zīmīgas arī ar to, ka šajās asīs **centrālās inerces moments ir vienāds ar nulli**.

Turpmāk tiks izmantoti sekojoši jēdzieni:

- asis, kurās figūras centrālās inerci momenta vērtība ar nulle, saucsim par **galvenajām asīm**;
- gadījumos, kad šo asu sākumpunkts sakrīt ar figūras smaguma centru, asis saucsim par **galvenajām centrālajām asīm** (bieži vien šīs asis apzīmē ar **u** un **v**);
- figūru inerci momentu pret šīm asīm attiecīgi tiks saukti par **galvenajiem inerci momentiem** vai galvenajiem centrālajiem inerci momentiem.



att. 6.7

Iegūtās inerci momentu izmaiņas sakarības (6.15 – 6.17) ērti attēlot grafiski. No att. 6.7 redzamajām līknēm varam spriest par inerci momentu izmaiņas likumsakarībām un to savstarpējām attiecībām jebkurai asu pagriešana leņķa vērtībai. Visām trim līknēm ir sinusoidāls raksturs. Leņķa α vērtībām α_1 , α_2 un $\alpha_1 + 180^\circ$ līknes $I_{x_\alpha y_\alpha}$

vērtības ir nulle un šīm leņķa vērtībām atbilst maksimālās un minimālās aksiālo inerci momentu vērtības. Leņķu vērtībām $\alpha_1 + 45^\circ$ un $\alpha_2 + 45^\circ$ atbilst maksimālā centrālās inerci momenta vērtība, bet aksiālo inerci momentu I_x un I_y vērtības ir vienādas.

Tātad, lai noteiktu galveno asu stāvokli attiecībā pret jebkurām patvaļīgi izvēlētajām asīm x , y , kurās inerci momentu vērtības I_x , I_y , I_{xy} ir zināmas, nepieciešams noteikt to pagriešana leņķa α_g vērtību, pie kuras izpildās nosacījums ($I_{x_\alpha y_\alpha} = 0$):

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_g + I_{xy} \cos 2\alpha_g = 0$$

Šo vērtību nosaka izteiksme:

$$\tan 2\alpha_g = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (6.18)$$

Saskaņā ar izteiksmi (6.18) iegūstam divas leņķa α_g vērtības, kuras viena no otras atšķiras par 90° . Tātad galvenās asis ir savstarpēji perpendikulāras.

Pierādīsim, ka galvenajās asīs aksiālo inerci momentu vērtības ir ekstremālas. Lai to veiktu, pielīdzinām aksiālā inerci momenta I_{x_α} atvasinājumu nullei. Tādā veidā iegūstam sakarību

$$\frac{dI_{x_\alpha}}{d\alpha_e} = -\frac{I_x - I_y}{2} 2 \sin 2\alpha_e - I_{xy} 2 \cos 2\alpha_e = 0$$

un

$$\operatorname{tg} 2\alpha_e = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

kur α_e - leņķis, kas nosaka koordinātu asu stāvokli, kurās aksiālie inerces momenti ir ekstremāli. Salīdzinot iegūto izteiksmi ar izteiksmi (6.18), varam secināt, ka leņķis $\alpha_e = \alpha_g$. Tātad galvenās un inerces momenta I_{x_α} ekstremālo vērtību ass sakrīt. Lai noteiktu galveno inerces momentu vērtības, sakarībā (6.15) ievietojam ar izteiksmi (6.18) noteiktās leņķu α_g vērtības. Tādā veidā iegūstam sakarību

$$I_g = I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha_g - I_{xy} \sin 2\alpha_g \quad (6.19)$$

Šo sakarību varam pārveidot izslēdzot no tās leņķi α_g .

Veicot analītiskus pārveidojumus, jāizmanto sakarības:

$$I_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2} \frac{\sin 2\alpha_g}{\cos 2\alpha_g}; \quad \frac{1}{\cos 2\alpha_g} = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_g};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_g = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$$

Rezultātā iegūstam formulu, kura nosaka galveno inerces momentu vērtības:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}, \quad (6.20)$$

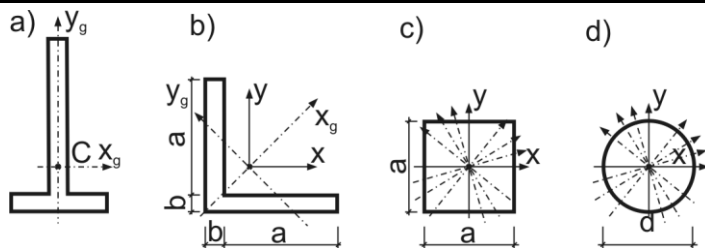
(“+” zīme attiecas uz maksimālo galvenā inerces momenta vērtību, bet “-” uz minimālo.

Bieži vien galveno asu stāvokļa noteikšanai formulas (6.18) vietā izmanto formulas

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{I_{xy}}{I_{\max} - I_y} \quad \text{un} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{I_{xy}}{I_{\min} - I_y}. \quad (6.21)$$

Leņķi α_1 veido sākotnējā ass un ass, pret kuru inerces moments ir $I_{\max}$, bet leņķi α_2 tām perpendikulārās asis, pie kam $\alpha_1 < \alpha_2$.

Piemērs 6.9. Noteikt attēlā redzamo šķērssgriezumū galveno centrālo asu stāvokli.



Atrisinājums.

1. Tā kā figūrai att. 6.8a y ir simetrijas ass, tad $I_{xy} = 0$, bet I_x un I_y nav nulle un arī

$I_x - I_y \neq 0$, tad saskaņā ar formulu (6.18) $\operatorname{tg} 2\alpha_g = 0$.

Šim nosacījumam atbilst leņķu vērtības $\alpha'_g = 0^\circ$; $\alpha''_g = 90^\circ$. Tātad asis x un y ir galvenās centrālās asis.

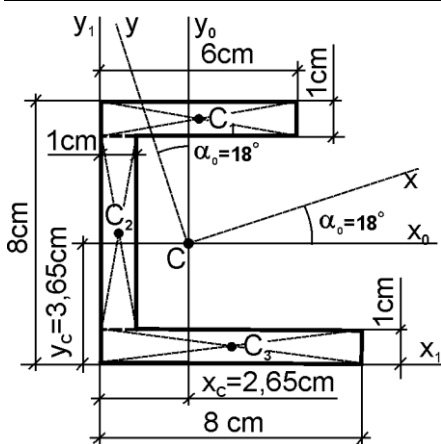
2. Att. 6.8b redzamajai figūrai (vienādmalu leņķa profils) ir spēkā nosacījumi $I_{xy} \neq 0$, $I_x - I_y = 0$, jo malām paralēlajās asīs $I_x = I_y$.

Tātad no formulas (6.18) seko, ka $\operatorname{tg} 2\alpha_g = \infty$ un līdz ar to $\alpha'_g = 45^\circ$; $\alpha''_g = 135^\circ$.

3. Att. 6.8c un d attēlotajām figūrām ir spēkā nosacījumi $I_{xy} = 0$, $I_x = I_y$ un līdz ar to iegūstama nenoteiktību $\operatorname{tg} 2\alpha_g = \frac{0}{0}$. Izmantojot sakarību (6.17), konstatējam, ka

$I_{x_\alpha y_\alpha} = 0$ pie jebkuras leņķa α vērtības. Tātad jebkuras ap smaguma centru C pagrieztas asis ir galvenās. Tātad kvadrātam, riņķim jebkuras caur centru C ejošas ortogonālas koordinātu asis ir galvenās centrālās asis.

Piemērs 6.10. Aprēķināt nesimetriskas figūras šķēluma galvenos centrālos inerciālos momentus.



att. 6.9

Atrisinājums. Šķēlumu sadalām vienkāršās figūrās — trijos taisnstūros.

1. Aprēķinām šo taisnstūru laukumus un nosakām to smaguma centru koordinātes palīgsistēmā x_1 un y_1 sistēmā:

$$A_1 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ cm}^2; \quad x_1 = 3 \text{ cm};$$

$$y_1 = 7,5 \text{ cm};$$

$$A_2 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ cm}^2; \quad x_2 = 0,5 \text{ cm};$$

$$y_1 = 4 \text{ cm};$$

$$A_3 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ cm}^2; \quad x_3 = 4 \text{ cm};$$

$$y_3 = 0,5 \text{ cm}.$$

Aprēķinām taisnstūru laukumu statiskos momentus:

$$S_{1x_1} = A_1 y_1 = 6 \cdot 7,5 = 45 \text{ cm}^3; \quad S_{1y_1} = A_1 x_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^3;$$

$$S_{2x_1} = A_2 y_2 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^3; \quad S_{2y_1} = A_2 x_2 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ cm}^3;$$

$$S_{3x_1} = A_3 y_3 = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ cm}^3; \quad S_{3y_1} = A_3 x_3 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^3.$$

Pēc formulām (6.6) nosakām profila laukuma smaguma centra koordinātes:

$$x_c = \frac{S_{1y_1} + S_{2y_1} + S_{3y_1}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{18 + 3 + 32}{6 + 6 + 8} = \frac{53}{20} = 2,65 \text{ cm};$$

$$y_c = \frac{S_{1x_1} + S_{2x_1} + S_{3x_1}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{45 + 24 + 4}{6 + 6 + 8} = \frac{73}{20} = 3,65 \text{ cm}.$$

Caur smaguma centru novelkam x_0 un y_0 asis, kuras ir attiecīgi paralēlas x_1 un y_1 asīm.

2. Aprēķinām šķēluma laukuma aksiālos un centrālās inerces momentus pret x_0 un y_0 asīm, izmantojot pārejas formulas uz paralēlām asīm. Inerces moments pret x_0 asi ir

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= I_{1x_0} + I_{2x_0} + I_{3x_0}; \\ I_{1x_0} &= \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1 \cdot 3,85^2 = 0,5 + 89 = 89,5 \text{ cm}^4; \\ I_{2x_0} &= \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1 \cdot 6 \cdot 0,35^2 = 18 + 0,7 = 18,7 \text{ cm}^4; \\ I_{3x_0} &= \frac{8 \cdot 1^3}{12} + 8 \cdot 1 \cdot 3,15^2 = 0,7 + 79,3 = 80 \text{ cm}^4; \\ I_{x_0} &= 89,5 + 18,7 + 80 = 188,2 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Inerces moments pret y_0 asi ir

$$\begin{aligned} I_{y_0} &= I_{1y_0} + I_{2y_0} + I_{3y_0}; \\ I_{1y_0} &= \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1 \cdot 6 \cdot 0,35^2 = 18 + 0,7 = 18,7 \text{ cm}^4; \\ I_{2y_0} &= \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1 \cdot 2,15^2 = 0,5 + 27,8 = 28,3 \text{ cm}^4; \\ I_{3y_0} &= \frac{1 \cdot 8^3}{12} + 1 \cdot 8 \cdot 1,35^2 = 42,8 + 14,6 = 57,4 \text{ cm}^4; \\ I_{y_0} &= 18,7 + 28,3 + 57,4 = 104,4 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Centrālās inerces moments ir

$$I_{x_0 y_0} = I_{1x_0 y_0} + I_{2x_0 y_0} + I_{3x_0 y_0}.$$

Šajā gadījumā katra taisnstūra centrālās inerces momentu pret visa šķēluma centrālajām inerces asīm, kas paralēlas taisnstūru simetrijas asīm, nosaka kā taisnstūra laukuma reizinājumu ar tā smaguma centra koordinātēm x_0 un y_0 asu sistēmā (šo pieņēmumu nepierādām).

Aprēķinot centrālās inerces momentus, jāievēro taisnstūru laukumu smaguma centru koordinātu zīmes:

$$\begin{aligned} I_{1x_0 y_0} &= 6 \cdot 1(+3,85) \cdot (+0,35) = 8,1 \text{ cm}^4; \\ I_{2x_0 y_0} &= 6 \cdot 1(+0,35) \cdot (-2,15) = -4,5 \text{ cm}^4; \\ I_{3x_0 y_0} &= 8 \cdot 1(-3,15) \cdot (+1,35) = -34 \text{ cm}^4; \end{aligned}$$

$$I_{x_0 y_0} = 8,1 - 4,5 - 34 = -30,4 \text{ cm}^4$$

3. Izmantojot formulu (6.18) nosakām galveno centrālo asu stāvokli:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_0 y_0}}{I_{y_0} - I_{x_0}} = \frac{-2 \cdot 30,4}{104,4 - 188,2} = 0,726.$$

No trigonometriskajām tabulām atrodam, ka $2\alpha_0 = 36^\circ$, tātad $\alpha_0 = 18^\circ$. Galvenās centrālās asis x un y parādītas att. 6.9.

4. Izmantojot formulas (6.15) un (6.16), nosakām galvenos centrālos inerces momentus:

$$\sin \alpha_0 = 0,309; \quad \cos \alpha_0 = 0,951; \quad \sin 2\alpha_0 = 0,588;$$

$$I_x = I_{x_0} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_0} \sin^2 \alpha_0 - I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = 188,2 \cdot 0,951^2 + 104,4 \cdot 0,309^2 - (-30,4) \cdot 0,588 = 170,1 + 9,9 + 17,9 = 197,9 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = I_{x_0} \sin^2 \alpha_0 + I_{y_0} \cos^2 \alpha_0 + I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = 188,2 \cdot 0,309^2 + 104,4 \cdot 0,951^2 + (-30,4) \cdot 0,588 = 17,9 + 94,3 - 17,9 = 94,3 \text{ cm}^4.$$

6.7. Šķēluma inerces rādiuss.

Šķēluma inerces rādiuss ir vēl viens ģeometriskais šķēluma raksturlielums, kuru bieži nākas izmantot kā teorētiskos, tā praktiskos aprēķinos. Par šķēluma inerces rādiusu attiecībā pret kādu no asīm, piemēram x, sauc lielumu i_x , kuru nosaka sakarība

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}.$$

Tātad zinot stieņa šķēluma inerces momentu un tā šķērsriezuma laukumu varam noteikt inerces rādiusu pret attiecīgo asi.

Galvenajām asīm atbilstošos inerces rādiusus sauc par **galvenajiem inerces rādiusiem** un nosaka ar sakarībām:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (6.22)$$

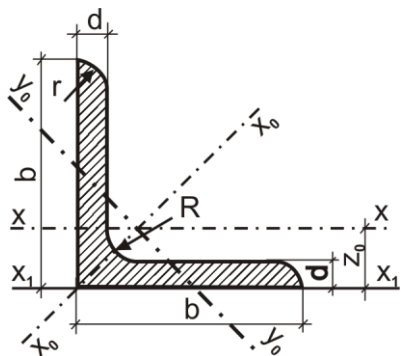
Šķēluma inerces rādiusa mērvienības sakrīt ar garuma mērvienībām (mm, cm, m).

6.8. Saliktu laukumu inerces momentu noteikšana

Liektu elementu izgatavošanai būvpraksē bieži vien izmanto metāla standarta velmējumus ar stūreņu, dubult-T un U veida šķērsgrīzumiem. Velmētu profilu visi izmēri, kā arī to šķēlumu laukuma inerces momentu un dažu citu ģeometrisko raksturotāju vērtības apkopotas sortimentu tabulās.

Tā kā Latvijas būvpraksē liels ir to velmējumu īpatsvars, kuri veidoti atbilstoši NVS (sk. Pielikumu) standartiem, šīs grāmatas pielikumā doti atbilstoši dati par karsti velmēto metāla profilu ģeometriskajām īpašībām. (Eiropas standartiem atbilstošu profilu

īpašības dotas grāmatā - BŪVMEHĀNIKA - statiski nenoteicamas sistēmas).



6.10. att.

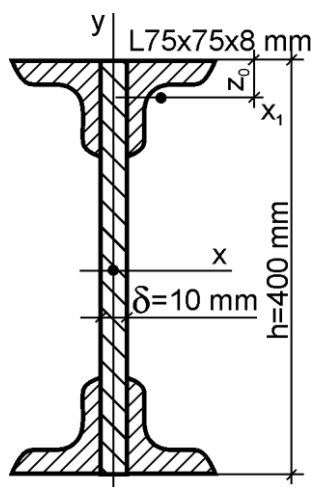
kumu ģeometriskos raksturotājus.

Aplūkosim tabulā atrodamo izrakstu no vienādsānu stūreņu (att. 6.10) sortimenta tabulām. Pirmajās kolonnās doti profilu numuri, viena tekošā metra masa, šķēsgriezuma izmēri un laukums. Nākamajās kolonnās dotas inerces momentu un inerces rādus vērtības centrālajās un galvenajās asīs. Ir uzrādīts galvenās centrālās ass orientācijas leņķis ($\text{tg}\alpha$) attiecībā pret vienu no stūreņa malām. Izmantojot šos datus iespējams noteikt analogus parametrus jebkurās patvaļīgi orientētās asīs. Tāda nepieciešamība rodas nosakot saliktu, no vairākiem savā starpā saistītiem stieņiem veidotu lau-

6.9. Galveno inerces momentu noteikšanas kārtība

Nosakot sarežģītas šķēsgriezuma formas figūras galvenos inerces momentus, mērķtiecīgi ievērot sekojošu aprēķinu secību:

1. Izvēlamies patvaļīgu taisnleņķa koordinātu sistēmu un sadalām doto šķēsgriezumu vienkāršākās figūrās, kuru inerces momentus nosakāmi ar zināmām formulām jeb iegūstami no tabulām. Pēc sakarībām (6.6) nosakām dotās figūras smaguma centra koordinātes.
2. Nosakām vienkāršo figūru inerces momentus to centrālajās asīs un, izmantojot sakarības starp inerces momentiem paralēlās asīs, nosakām vienkāršo figūru inerces momentus dotās figūras centrālās asīs. Summējot iegūto atsevišķo figūru inerces momentus, nosakām summārās figūras inerces momentus tās centrālajās asīs xy .



3. Izmantojot sakarību (6.18) nosakām galveno centrālo asu uv stāvokli pret brīvi izvēlētajām centrālajām asīm xy .
4. Nosakām galveno centrālo inerces momentu vērtības $I_{\max}$ un $I_{\min}$ (sakarība (6.20)).

Ar saliktas formas šķēlumu laukumu inerces momentu noteikšanu izmantojot sortimentu tabulas iepazīsimies sekojošos piemēros.

Piemērs 6.11. Noteikt attēlā redzamā šķēluma laukuma aksiālos inerces momentus pret šķēluma galveno centrālo asi x . Šķēlums sastāv no vertikālas plāksnes (sieniņas), kurai $h = 400\text{ mm}$, $\delta = 10\text{ mm}$, un četriem vienādsānu stūreņiem $75 \times 75 \times 8\text{ mm}$.

Atrisinājums. Šķēluma laukuma aksiālais inerces moments ir plāksnes inerces momenta un četrus stūreņu inerces momentu summa:

$$I_x = I_{xpl} + 4I_{xst}.$$

Aprēķinām vertikālās plāksnes inerces momentu:

$$I_{xpl} = \frac{\delta h^3}{12} = \frac{1 \cdot 40^3}{12} = 5330 \text{ cm}^4.$$

Izmantojot teorēmu par inerces momentiem pret paralēlām asīm, iegūstam stūreņa inerces momentu:

$$I_{xst} = I_{x_{1st}} + a^2 A.$$

$I_{x_{1st}}$ vērtību ņemam no sortimenta tabulām; tas ir stūreņa laukuma aksiālais inerces moments pret stūreņa centrālo asi, kas paralēla vienam pamatam, tātad $I_{x_{1st}} = 59,8 \text{ cm}^4$ (attēlā šī ass apzīmēta ar x_1).

Attālumu starp paralēlajām asīm x_1 un x a nosaka izteiksme

$$a = \frac{h}{2} - z_0 = \frac{40}{2} - 2,15 = 17,85 \text{ cm},$$

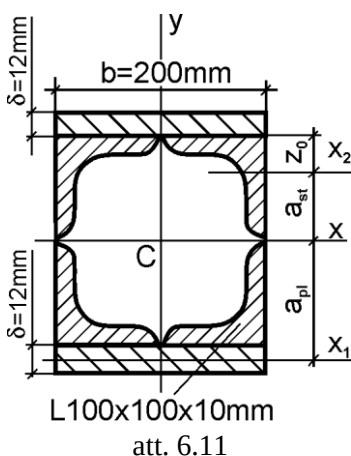
kur z_0 — stūreņa laukuma smaguma centra attālums no pamata (att. 6.10) — arī ir dots sortimentu tabulās.

Ievietojot skaitliskās vērtības stūreņa inerces momenta formulā un ievērojot, ka stūreņa šķērsriezuma laukums $A = 11,5 \text{ cm}^2$ (no sortimentu tabulām), iegūstam

$$I_{xst} = 59,8 + 11,5 \cdot 17,85^2 = 59,8 + 3670 = 3730 \text{ cm}^4.$$

Tātad saliktās figūras aksiālā inerces momenta vērtība pret galveno centrālo asi x ir:

$$I_x = I_{xpl} + 4I_{xst} = 5330 + 4 \cdot 3730 = 20250 \text{ cm}^4.$$



Piemērs 6.12. Noteikt galvenos centrālos inerces momentus un inerces rādītājus šķēlumam, kas sastāv no četriem stūreņiem 100X100X10 mm un divām horizontālām plāksnēm, kuru izmēri ir $b = 200 \text{ mm}$, $\delta = 12 \text{ mm}$.

Atrisinājums. Šķēluma galvenās centrālās inerces asis ir tā simetrijas asis x un y . Šķēluma aksiālie inerces momenti summējas no divu plāksņu un četru stūreņu inerces momentiem:

$$I_x = 2I_{xpl} + 4I_{xst};$$

$$I_y = 2I_{ypl} + 4I_{yst}.$$

Nosakām plāksnes aksiālos inerces momentus:

pret y asi

$$I_{ypl} = \frac{\delta b^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 20^3}{12} = 800 \text{ cm}^4;$$

pret x asi

$$I_{xpl} = \frac{b\delta^3}{12} + A_{pl}a_{pl}^2,$$

kur

$$a_{pl} = 10 + \frac{\delta}{2} = 10 + 0,6 = 10,6 \text{ cm};$$

$$A_{pl} = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ cm}^2.$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, iegūstam

$$I_{xpl} = \frac{20 \cdot 1,2^3}{12} + 24 \cdot 10,6^2 = 3 + 2690 = 2693 \text{ cm}^4.$$

Plāksnes laukuma aksiālais inerces moments pret centrālo asi x_1 , kas paralēla plāksnes garumam ir ļoti mazs lielums ($\approx 3 \text{ cm}^4$) un to dotā gadījumā var neievērot.

Aprēķinot stūreņu aksiālos inerces momentus, ņemam vērā, ka stūreņi attiecībā pret y un x asīm izvietoti simetriski un tādēļ

$$I_{xst} = I_{yst}; \quad I_{xst} = I_{yst} = I_{x2} + a_{st}^2 A_{st},$$

kur I_{x2} - stūreņa aksiālais inerces moments pret tā centrālo asi x_2 .

No sortimenta tabulām (sk. Pielikumā) iegūstam:

$$I_{x2} = 179 \text{ cm}^4; \quad A_{st} = 19,2 \text{ cm}^2; \quad z_0 = 2,83 \text{ cm};$$

$$a_{st} = 10 - z_0 = 10 - 2,83 = 7,17 \text{ cm}$$

un līdz ar to stūreņu aksiālo inerces momentu skaitliskās vērtības attiecībā pret saliktās figūras galvenajām centrālajām asīm ir

$$I_{xst} = I_{yst} = 179 + 19,2 \cdot 7,17^2 = 179 + 985 = 1164 \text{ cm}^4,$$

bet visa šķēluma galveno centrālo inerces momentu vērtības ir

$$I_y = 2I_{ypl} + 4I_{yst} = 2 \cdot 800 + 4 \cdot 1164 = 1600 + 4656 = 6256 \text{ cm}^4;$$

$$I_x = 2I_{xpl} + 4I_{xst} = 2 \cdot 2693 + 4 \cdot 1164 = 5386 + 4656 = 10042 \text{ cm}^4.$$

Šķēluma inerces radusi pret x un y asīm nosakāmi atbilstoši sakarībām (6.22).

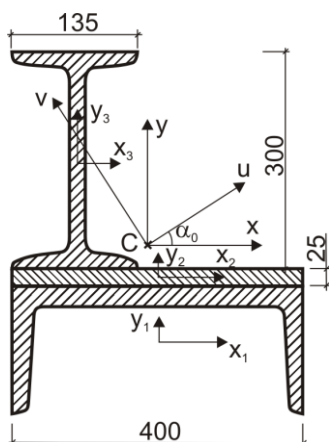
Izmantojot iepriekš noteiktās šķēluma aksiālo inerces momentu vērtības, iegūstam

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{10042}{2(20 \cdot 1,2) + 4 \cdot 19,2}} = \sqrt{\frac{10042}{124,8}} = 8,97 \text{ cm};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{6256}{124,8}} = 7,08 \text{ cm}.$$

No iegūtajiem rezultātiem varam secināt, ka, ja dotā šķērsgriezuma aksiālie inerces momenti atšķiras 1,6 reizes, tad inerces radusi atšķiras tikai 1,27 reizes.

Piemērs 6.13. Noteikt dotajam šķēlumam galveno centrālo asu stāvokli un galveno centrālo inerces momentu vērtības. Visi ģeometriskie izmēri doti attēlā milimetros.



Atrisinājums. Salikto šķēsgriezumam veido U profils Nr. 40, taisnstūris 25 x 400 un dubult-T profils Nr. 30. Atbilstoši sortimentu tabulu datiem (sk. Pielikumā) ir zināmi sekojoši izejas dati:

U profilam Nr. 40:

$$A_1 = 61,5 \text{ cm}^2, I_{x1} = 642 \text{ cm}^4, I_{y1} = 15220 \text{ cm}^4;$$

taisnstūrim:

$$A_2 = 100 \text{ cm}^2, I_{x2} = 52 \text{ cm}^4, I_{y2} = 13300 \text{ cm}^4;$$

dubult-T profilam Nr. 30:

$$A_3 = 46,5 \text{ cm}^2, I_{x3} = 7080 \text{ cm}^4, I_{y3} = 337 \text{ cm}^4;$$

1. Izmantojot sakarības (6.6) nosakām saliktā šķēluma smaguma centra koordinātes asīs, kuras sakrīt ar U profila galvenajām centrālajām asīm x_1y_1 :

$$X_C = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{61,5 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 46,5 \cdot (-13,25)}{61,5 + 100 + 46,25} = -2,96 \text{ cm};$$

$$Y_C = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{61,5 \cdot 0 + 100 \cdot 4 + 46,5 \cdot 20,25}{61,5 + 100 + 46,25} = 6,45 \text{ cm}.$$

Novelkam saliktā šķēluma centrālās asis x, y .

2. Nosakām saliktā šķēluma centrālos inerces momentus centrālās asīs x, y , izmantojot pārejas formulas (6.13) pie asu paralēlās pārnesei un salikto figūru veidojošo figūru centrālo momentu vērtības. Tātad

$$I_{x_C} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 + I_{x_3} + a_3^2 A_3 = 35205,2;$$

$$I_{y_C} = I_{y_1} + b_1^2 A_1 + I_{y_2} + b_2^2 A_2 + I_{y_3} + b_3^2 A_3 = 19888,9;$$

$$I_{x_C y_C} = a_1 b_1 A_1 + a_2 b_2 A_2 + a_3 b_3 A_3 = -8557,2.$$

3. Nosakām saliktā šķēluma galveno asu pagriezienu leņķi α_0 . Tā kā

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_C y_C}}{I_{x_C} - I_{y_C}} = \frac{2(-8557,2)}{35205,2 - 19888,9} = -1,12,$$

tad $\alpha_0 = -24,5^\circ$. Tātad galvenās asis u, v ir pagrieztas attiecībā pret centrālajām asīm x, y pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam par $24,5^\circ$.

4. Izmantojot sakarības (6.20), nosakām galveno centrālo inerces momentu vērtības

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{35205,2 + 19888,9}{2} - \sqrt{15316,3^2 + 4(-8557,2)^2} = 16063,45 \text{ cm}^4,$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{35205,2 + 19888,9}{2} + \sqrt{15316,3^2 + 4(-8557,2)^2} = 39030,65 \text{ cm}^4.$$

(Zīmi pirms kvadrātsaknes izvēlas saskaņā ar nosacījumu: ja $I_x \leq I_y$, tad I_u noteikšanai izmantojam mīnus zīmi un otrādi).

Izdarot aprēķinu pareizības pārbaudi konstatējam, ka $I_u + I_v = I_x + I_y$, jo

$$39030,65 + 16063,45 = 19888,9 + 35205,2.$$

5. Nosakām šķēluma galvenos inerces rādiusus un pēc to vērtībām konstruējam inerces elipsi..

Galveno inerces rādiusu vērtības, saskaņā ar formulām (6.22), ir:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{16063,45}{208}} = 8,787 \text{ cm};$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{39030,65}{208}} = 13,698 \text{ cm}.$$

6.10. Pretestības moments

Konstrukciju mehānikā, sevišķi liektu elementu stiprības aprēķinos, plaši tiek lietots vēl viens elementa šķēluma ģeometriskais raksturotājs – pretestības moments.

Aksiālais pretestības moments ir figūras laukuma galvenā centrālā inerces momenta dalījums ar figūras attālākā punkta attālumu līdz galvenajai centrālajai inerces asij.

Aksiālos pretestības momentus pret x un y asīm apzīmē ar W_x un W_y . Saskaņā ar aksiālā pretestības momenta definīciju varam rakstīt, ka

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}.$$

Pretestības momenta mērvienība ir garuma mērvienība kubā (m^3 , cm^3 , u.c.).

Nesimetriskam šķersgriezumam katram pretestības momentam ir divas atšķirīgas vērtības, kuras iegūstam par $y_{\max}$ un $x_{\max}$ ņemot lielākos attālumus no centrālajām asīm y un x asu pozitīvajos un negatīvajos virzienos (liecē šādiem šķersgriezumiem ir atšķirīgi pretestības momenti stieptajai un spiestajai zonai).

Taisnstūrim, kura malas ir b un h figūras attālākā punkta atstatums līdz galvenajai inerces asij $y_{\max} = h/2$. Tātad pretestības moments pret x asi ir

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6},$$

bet pret y asi

$$W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

Kvadrātam, kura mala ir a un $y_{\max} = a/2$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{a^4 \cdot 2}{12 \cdot a} = \frac{a^3}{6}.$$

Riņķim, kura diametrs ir d un tātad $y_{\max} = d/2$ aksiālie pretestības momenti pret x un y asīm ir vienādi

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32};$$

polārais pretestības moments ir ($\rho_{\max} = d/2$)

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{16}.$$

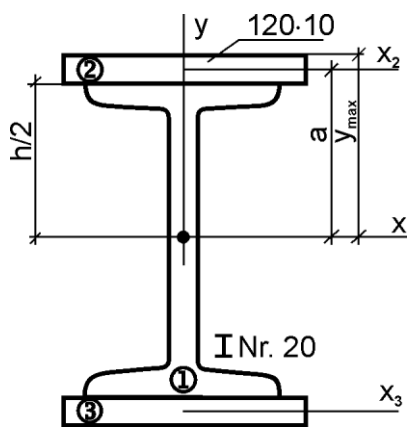
Riņķa gredzenam (att. 6.7b) izmantojot iepriekš noteiktās inerces momentu izteiksmes un ņemot vērā, ka $y_{\max} = D/2$, iegūstam:

aksiālais pretestības moments

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi D^4(1-a^4) \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi D^3(1-a^4)}{32};$$

polārais pretestības moments

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4(1-a^4)2}{32 \cdot D} = \frac{\pi D^3(1-a^4)}{16}.$$



Piemērs 6.14. Aprēķināt galvenos inerces momentus un pretestības momentus dotajai figūrai. No sortimenta tabulām dubult-T profilam Nr. 20 $I_{x_1}=1840 \text{ cm}^4$, $I_{y_1}=115 \text{ cm}^4$, $h=20 \text{ cm}$. Aprēķināt jālieto SI mērvienību sistēma.

Atrisinājums. Pārveidojam no tabulām iegūtos izejas lielumus SI sistēmā:

$$I_{x_1}=1840 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4; I_{y_1}=115 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4; h=20 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Taisnstūra laukums

$$A_2 = A_3 = 12 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2,$$

attālumi

$$a=h/2+1/2=10+0,5=10,5 \text{ cm}=10,5 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$y_{\max} = h/2 + 1 = 100 + 1=11 \text{ cm} = 11 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$x_{\max} = 12/2 = 6 \text{ cm} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Taisnstūru inerces momenti pret to centrālajām asīm x_2 , x_3 un y ir

$$I_{2x_2} = I_{3x_3} = \frac{12 \cdot 10^{-2} (1 \cdot 10^{-2})^3}{12} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4,$$

$$I_{2y} = I_{3y} = \frac{1 \cdot 10^{-2} (12 \cdot 10^{-2})^3}{12} = 144 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Taisnstūra inerces momentu pret figūras centrālo asi x nosakām izmantojot asu paralēlās pārbīdes sakarības. Tā rezultātā iegūstam:

$$I_{2x} = I_{2x_2} + A_2 a^2 = 1 \cdot 10^{-8} + 12 \cdot 10^{-4} \cdot (10,5 \cdot 10^{-2})^2 = 1324 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{3x} = I_{2x} = 1324 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Aprēķinām visas figūras inerces momentus pret tās galvenajām centrālajām asīm x un y :

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x} = 1840 \cdot 10^{-8} + 1324 \cdot 10^{-8} + 1324 \cdot 10^{-8} = 4488 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

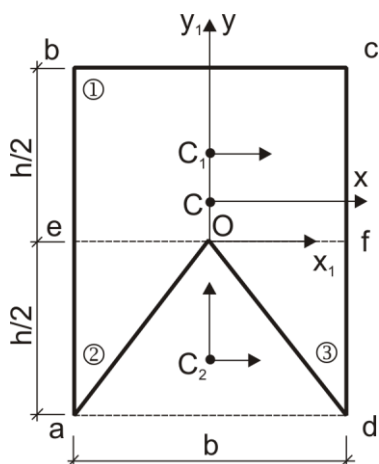
$$I_y = I_{1y} + I_{2y} + I_{3y} = 115 \cdot 10^{-8} + 144 \cdot 10^{-8} + 144 \cdot 10^{-8} = 403 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Tātad aksiālie pretestības momenti pret x un y asīm ir:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{4488 \cdot 10^{-8}}{11 \cdot 10^{-2}} = 408 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3,$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{403 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-2}} = 67,17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

Redzams, ka inerces un pretestības momenti pret x un y asīm nav vienādi. Attiecībā pret x asi tie ir vairākkārt lielāki. Šāda situācija izskaidrojama ar to, ka figūras elementārlaukumiņi attiecībā pret x asi izvietoti tālāk nekā pret y asi.



Piemērs 6.15. Noteikt attēlā dotās figūras pretestības momentus.

Atrisinājums. 1. Nosakām figūras smaguma centra koordinātes. Tā, kā dotā figūra ir simetriska attiecībā pret y asi, tad smaguma centrs atrodas uz šīs ass. Atliek noteikt smaguma centra koordināti y_C . Šai nolūkam nosakām figūras statisko momentu pret asi x_1 .

Statiskā momenta noteikšanai sadalām doto figūru vienkāršās, piemēram, taisnstūrī $ebcf$ (1) un trīsstūros aeo un ofd (2 un 3). Katras vienkāršās figūras statiskais moments (atbilstoši sakarībai $S_{xi} = A_i \cdot y_{ci}$) pret x_1 asi ir

$$S_{x1} = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}; \quad S_{x2} = S_{x3} = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot \left(-\frac{h}{6} \right) = -\frac{bh^2}{48}.$$

Tātad dotās figūras statistiskais moments pret x_1 asi ir

$$S_x = \sum S_{xi} = \frac{bh^2}{8} - \frac{bh^2}{48} - \frac{bh^2}{48} = \frac{bh^2}{12}.$$

Tā kā kopējais dotās figūras laukums ir

$$A = \sum A_i = bh - \frac{bh}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}bh,$$

tad

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{b \cdot h^2 \cdot 4}{12 \cdot b \cdot h \cdot 3} = \frac{h}{9}.$$

Līdz ar to koordinātu asīs x_1y_1 dotās figūras smaguma centra koordinātes ir $(0, h/9)$. Tas arī ir dotās figūras galveno asi x un y sākumpunkts.

2. Lai noteiktu dotās figūras galvenos inerces momentus (asīs x, y), vispirms nosakām atsevišķo figūru inerces momentus to centrālajās asīs (asīs, kuru sākumpunkts ir konkrēto figūru smaguma centros). Mūsu gadījumā par atsevišķām figūrām ērti uzskatīt pilno taisnstūri (abcd) un trīsstūri aOd). Jau noteicām, ka taisnstūra inerces moments

pret tā centrālo asi ir $I' = \frac{bh^3}{12}$. Trīsstūrim aOd tā centrālajās asīs pret asi inerces mo-

ments ir $I'' = \frac{b_{\Delta} h_{\Delta}^3}{36}$. Mūsu gadījumā $b_{\Delta} = b$ un $h_{\Delta} = h/2$. Tātad $I'' = \frac{bh^3}{288}$.

Pielietojot asu pārbīdīšanas formulas $I'_x = I' + a_1^2 A_1$ un $I''_x = I'' + a_2^2 A_2$ un ņemot vērā, ka $a_1 = \frac{h}{9}$, bet $a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{h}{9} = \frac{4h}{9}$, pie kam $A_1 = bh$, bet $A_2 = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$ varam noteikt taisnstūra abcd un trīsstūra aOd inerces momentus attiecībā pret x asi. Šīs vērtības ir

$$I'_x = I' + a_1^2 A_1 = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{81} \cdot bh = \frac{31}{324}bh^3;$$

$$I''_x = I'' + a_2^2 A_2 = \frac{bh^3}{288} - \frac{16}{81} h^2 \cdot \frac{bh}{4} = \frac{137}{2592}bh^3.$$

Tā kā dotās figūras šķēluma laukumu veido abu analizēto figūru laukumu starpība, tad šīs figūras šķērsriezuma inerces moments pret x asi ir

$$I_x = I'_x - I''_x = \frac{31}{324}bh^3 - \frac{137}{2592}bh^3 = \frac{37}{864}bh^3.$$

3. Tā kā dotajai figūrai attiecībā pret galveno asi x ir divi atšķirīgi maksimāli attālināto

punktu attālumi līdz šai asij, tad, lai noteiktu pretestības momentus pret x asi, iegūtā inerces momenta vērtība jādala ar šiem attālumiem. Figūras augšējās malas attālums līdz asij x ir $y_{\min} = \frac{7}{18}h$, bet apakšējo punktu attālumi ir $y_{\max} = \frac{11}{18}h$. Līdz ar to iegūstam

$$W_{x\min} = \frac{18I_x}{11h} = \frac{18 \cdot 37}{11 \cdot 864}bh^2 = \frac{37}{528}bh^2 \approx 0,07bh^2;$$

$$W_{x\max} = \frac{18I_x}{7h} = \frac{18 \cdot 37}{7 \cdot 864}bh^2 = \frac{37}{336}bh^2 \approx 0,11bh^2.$$

4. Analogu metodiku varam izmantot galveno inerces un pretestības momentu noteikšanai pret y asi. Tātad $I'_y = \frac{hb^3}{12}$, bet $I''_y = \frac{hb^3}{96}$ (ņemot vērā, ka Δ -im $I = \frac{(h')^3 \cdot b^3}{12}$).

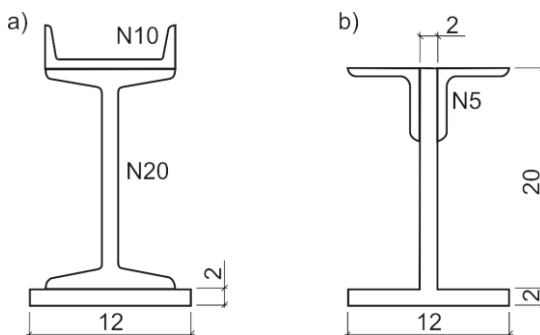
Tātad

$$I_y = I'_y - I''_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{hb^3}{96} = \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{7}{8}.$$

Tā kā y ass ir dotās figūras simetrijas ass, tad galvenā pretestības momenta W_y vērtība pret y asi ir tikai viena un tā ir

$$W_{y\max} = \frac{hb^3}{12} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{b} = \frac{7hb^2}{48} \approx 0,146hb^2.$$

Tātad pretestības momentu vērtības dotās formas figūrai ir atkarīgas no izmēru b un h vērtībām.



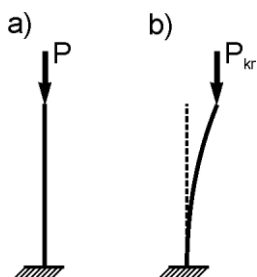
Uzdevums 6.1. Novērtēt pretestības momenta izmaiņu, pastiprinot dubult-T profilu N20 ar U-profilu N10 un taisnstūri ar izmēriem 12x2 cm att. a dotajā veidā.

Uzdevums 6.2. Aprēķināt pretestības momentus att. b dotajam šķēlumam. Šķēlums pastiprināts ar diviem vienādmalu leņķiem N5.

7. SPIESTU STIEŅU NOTURĪBA

Iepriekšējās nodaļās aplūkoti konstrukciju elementu stiprības un stinguma aprēķini. Šie aprēķini neievēro bīstamos gadījumus, kad konstrukcijas elements var zaudēt noturību, t.i., spēju saglabāt savu sākotnējo formu vai līdzsvara stāvokli, kuri piešķirti elementa izgatavošanas procesā un kuriem izdarīts stiprības aprēķins. Praksē mācībai par elastīgu sistēmu noturību ir visai būtiska nozīme.

Visvienkāršākais gadījums, kad jānovērtē stieņa noturība, ir tāda stieņa spiedes gadījums, kura šķērsriezuma izmēri ir mazi salīdzinājumā ar stieņa garumu. Spiedes spēkam sasniedzot noteiktu vērtību, stieņa ass taisnlīnijas forma var izrādīties nenoturīga — stienis saliecas. Šādu parādību sauc par **lodzi**.



att. 7.1

Pieņemsim, ka garš un tievs taisns stienis noslogots ar centriski pieliktu spiedes spēku P (att. 7.1). Pieliksim stienim šķērsslodzi, t.i., nedaudz izlieksim stienī. Ja spiedes spēks ir mazs, pēc šķērsslodzes noņemšanas stienis ieņem sākotnējo stāvokli. Tas nozīmē, ka stieņa ass taisnlīnijas forma ir noturīga (līdzsvara stāvoklis ir stabils). Lielāku spiedes spēka vērtību gadījumā ar šķērsslodzi viegli izliekts stienis pēc šīs slodzes noņemšanas sākotnējā stāvoklī atgriežas lēni, «negribīgi». Tomēr stieņa ass taisnlīnijas forma vēl ir noturīga. Spiedes spēkam sasniedzot noteiktu vērtību P_{kr} , stieņa ass taisnlīnijas

forma kļūst nenoturīga (stienis nonāk labilā līdzsvara stāvoklī). Stienis izliecas (att. 7.1b). Pēc šķērsslodzes noņemšanas saglabājas jauna noturīga stieņa ass forma — līklīnijas forma.

Tātad, ja spiedes spēks ir mazāks par kritisko P_{kr} , stienis strādā spiedē, ja spēks lielāks par kritisko, stienis pakļauts vienlaicīgai spidei un liecei. Spiedes spēkam pat ļoti nedaudz pārsniedzot vērtību P_{kr} , stieņa izliece strauji palielinās un stienis vai nu sagrūst vārda tiešā nozīmē, vai arī iegūst nepieļaujami lielas deformācijas, kuras padara konstrukciju par ekspluatācijai nederīgu. Tāpēc no praktiskā viedokļa kritiskais spēks jānosaka par graužošo slodzi (robežslodzi).

Ja spiedes spēks sasniedzis kritisko vērtību, pie kuras stieņa ass taisnlīnijas forma kļūst nenoturīga, pārejai uz līklīnijas formu šķērsslodze vairs nav nepieciešama — stieņa saliekšanās notiek bez redzamiem ārējiem cēloņiem.

Pamatojoties uz teikto, var apgalvot, ka kritiskais spēks P_{kr} ir centriska spiedes spēka vislielākā vērtība, līdz kurai stieņa ass taisnlīnijas forma ir noturīga.

Sākotnējās formas noturības zudums, slodzei sasniedzot kritisko vērtību, novērojams ne tikai spiesti stieņiem, bet arī citiem konstrukciju elementiem. Piemēram, gredzena (vai plānsienu čaulas) radiālā spiedē, spēkiem sasniedzot noteiktu vērtību (kritisko vērtību), gredzena apaļā forma kļūst nenoturīga — gredzens saplacinās. Apstākļi būtiski izmainās — ja slodze mazāka par kritisko, gredzens strādā spiedē, bet pēc noturības zuduma — spiedē un liecē.

Konsolveida sija, kura pakļauta liecei maksimālā stinguma plaknē, lieces spēkam sasniedzot kritisko vērtību, savērpjas un vienlaikus sāk strādāt liecē un vērpē.

Tātad visi noturības aprēķini raksturīgi ar to, ka, slodzei sasniedzot kritisko vērtību, notiek konstrukcijas elementa deformācijas rakstura krasa kvalitatīva izmaiņa. Jāievēro, ka līdzsvara stāvoklis, kas atbilst slodzēm, kuras pārsniedz kritisko vērtību, saistīts ar nepieļaujami lielām deformācijām — konstrukcija kļūst nederīga ekspluatācijai. Tāpēc noturības aprēķinam jānodrošina konstrukcijas elementa darbība, saglabājot sākotnējo līdzsvara stāvokli, t. i., slodzēm jābūt mazākām par kritiskajām.

No teiktā izriet, ka spiestu stieņu aprēķinos starp stieņa izmēriem, materiāla raksturotājiem un pielikto slodzi jānodrošina tādas attiecības, lai būtu garantēta stieņa darbība spiedē (ļodze nebūtu iespējama). Tātad pieļaujamam spēkam jābūt vairākkārt mazākam par kritisko. Šo stieņa ass taisnlinijas formas noturības nosacījumu raksturo sakarība:

$$[P] = \frac{P_{kr}}{n_{not}} \quad (7.1)$$

kur

$[P]$ — spiedes spēka pieļaujamā vērtība;

P_{kr} — spiedes spēka kritiskā vērtība;

$[n_{not}]$ — normatīvais (nepieciešamais) noturības drošības koeficients.

Atzīmēsim, ka noturības aprēķinos drošības koeficientu pieņem lielāku nekā attiecīgā materiāla stieņa stiprības aprēķinos. Tas saistīts ar to, ka stieņa noturību iespaido spēka pielikšanas nejaušas ekscentrisitātes, stieņa sākotnējās izlieces un dažī citi faktori, kuri aprēķinu sakarībās netiek ņemti vērā.

Celtniecībā dažādiem materiāliem izmanto atšķirīgas noturības drošības koeficienta vērtības:

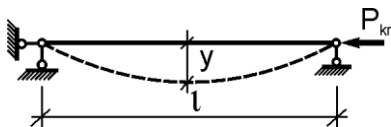
tēraudam — 1,8... 3;

čugunam — 5... 5,5;

kokam — 2,8... 3,3.

No sakarības (7.1) varam secināt, ka noturības aprēķina pamatā ir kritiskā spēka vērtība konkrētam būvelementam. Kritiskā spēka noteikšana ir noturības aprēķinu pamatproblēma.

7.1. Eilera formula kritiskā spēka noteikšanai



att. 7.2

Noteiksim kritiskā spēka lielumu spiestam stienim, kura abi gali nostiprināti ar locīklām un kurš ir nedaudz izliekts (att. 7.2). Pieņemam, ka noturība zūd, spriegumiem nepārsniedzot stieņa materiāla proporcionalitātes robežu σ_p . Ja stieņa šķēluma

inerces momenti pret galvenajām asīm nav vienādi, tad stienis izliecas plaknē ar mazāko stingumu, t. i. stieņa šķēlumi pagriežas ap asi pret kuru ir minimālā inerces momenta vērtība — I_{min} . Izmantojam liektas sijas ass tuvināto diferenciālvienādojumu (pret asi ar I_{min}):

$$EI_{min} y'' = -M.$$

Lieces momenta absolūto vērtību brīvi izraudzītā stieņa šķērsgrīzumā nosaka izteiksme $M = P_{kr}y$, tāpēc stieņa liektās ass diferenciālvienādojumu var pārveidot šādi:

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

kur

$$\alpha^2 = \frac{P_{kr}}{EI_{\min}}.$$

Homogēna otrās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z,$$

kur A un B — integrācijas konstantes.

A un B vērtības nosaka no stieņa pārvietojumu robežnosacījumiem. Gadījumā, ja $z = 0$, arī $y = 0$. Ievietojot šīs vērtības izlieces y izteiksmē, iegūstam, ka $B = 0$. Līdz ar to elastīgās izlieces līnijas vienādojums ir

$$y = A \sin \alpha z,$$

t.i., stieņa liektajai asij ir sinusoīdas forma.

Izmantojot otru robežnosacījumu, saskaņā ar kuru arī otrā sijas galā izliece ir nulle, t.i., ja $z = l$, izliece $y = 0$, iegūstam, ka

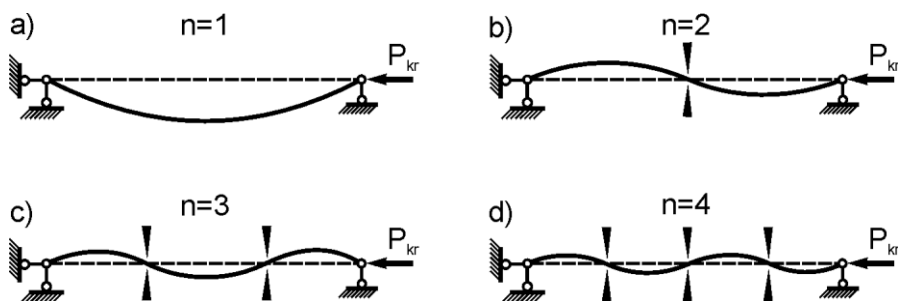
$$A \sin \alpha l = 0.$$

Neatkarīgi no α (tātad arī P) lieluma $A = 0$ atbilst stieņa neizliektajai formai ($y=0$). Ja stienis zaudējis noturību, $y \neq 0$ un arī $A \neq 0$. Tātad

$$\sin \alpha l = 0,$$

no kurienes

$$\alpha l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \quad n - \text{vesels skaitlis}.$$



att. 7.3

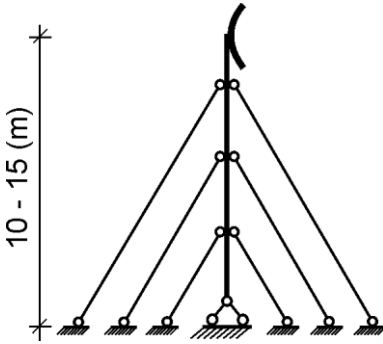
Tātad, vispārīgā gadījumā $\alpha = \frac{n\pi}{l}$ vai $\alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$. Ņemot vērā iepriekš ievesto ap-

zīmējumu $\alpha^2 = \frac{P_{kr}}{EI_{\min}}$ un pielīdzinot abu izteiksmju labās puses, iegūstam sakarību

kritiskā spēka noteikšanai

$$P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI_{\min}. \quad (7.2)$$

Iegūstam virkni kritiskā spēka vērtību, kuras atbilst dažādam sinusoīdas pusvilņu skaitam n (att. 7.3), pie kam kritiskais spēks ir proporcionāls n^2 . Kritiskā spēka vērtība pie $n=4$ (att. 7.3d) ir 16 reizes lielāka kā viena pusvilņa gadījumā (att. 7.3a).



att. 7.4

Šo īpašību izmanto, piemēram, uzstādot radioreleja staciju antenas (att. 7.4).

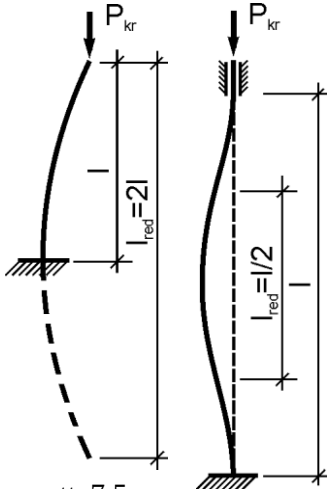
Tomēr visbiežāk realizējas gadījums, kad stieņa liektā ass ir sinusoīda ar vienu pusvilni ($n=1$), t.i. gadījums, kuram atbilst minimālā kritiskā spēka P_{kr} vērtība

$$P_{kr} = \frac{\pi^2}{l^2} EI_{\min}. \quad (7.3)$$

Šo gadījumu pieņemts saukt par ļodzes pamatgadījumu. Formulu (7.3), kas atbilst ļodzes pamatgadījumam sauc par **Eilera formulu**.

7.2. Stieņa galu iestiprinājuma veida ietekme uz kritisko spēku

Eilera formula (7.3) tika iegūta spiestam stienim, kura abi gali nostiprināti ar locīklām. Arī cita galu nostiprinājuma veida gadījumā kritiskā spēka vērtību var noteikt izmantojot stieņa liektās ass diferenciālvienādojumu, to atrisinot pie atšķirīgiem robežnosacījumiem.



att. 7.5

att. 7.6

Dažiem vienkāršākajiem gadījumiem kritiskā spēka formulu var iegūt, salīdzinot stieņa liektās ass formu ar formu, kuru ļodzes gadījumā iegūst ar locīklām nostiprināta stieņa ass. Piemēram, stienis, kura apakšējais gals ir nekustīgi iespīlēts, bet augšējais gals ir brīvs, zaudējot noturību, izliecas kā parādīts att. 7.5. Tas atrodas tādā pašā situācijā kā puse stieņa ar locīklām galos, un liektā ass ir sinusoīdas viļņa ceturtdaļa. Tātad kritiskā spēka lielumu var noteikt pēc pamatgadījumam atrastās Eilera formulas (7.3), stieņa faktiskā garuma vietā ievietojot tā divkāršu garumu:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}$$

Stieņiem, kuru gali ir nekustīgi nostiprināti, liektā ass forma (zaudējot noturību) parādīta att. 7.6. Šajā gadījumā sinusoīdas pusvilnis atbilst stieņa garuma pusei,

tāpēc formulā (7.3) faktiskā garuma vietā jāizmanto stieņa garuma puse.

Rezumējot iepriekš teikto varam konstatēt, ka neatkarīgi no spiesta stieņa galu nostiprinājuma veida kritiskais spēks nosakāms ar sakarību analoģu sakarībai (7.3), kurā fak-

tiskā stieņa garuma l vietā izmantots tā saucamais reducētais stieņa garums l_{red} :

$$P_{kr} = \frac{\pi^2}{l_{red}^2} EI_{min}.$$

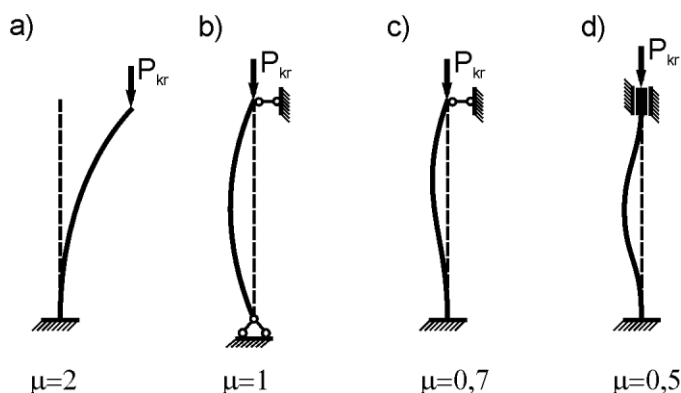
Stieņa reducēto garumu ērti izteikt ar faktisko garumu un kādu koeficientu μ , kurš atkarīgs no stieņa galu nostiprināšanas veida:

$$l_{red} = \mu l.$$

Koeficientu μ sauc par stieņa garuma redukcijas koeficientu; tā vērtības biežāk sastopamajiem stieņa galu nostiprināšanas veidiem parādītas att. 7.7.

Tātad Eilera formulu vispārīgām gadījumam var uzrakstīt šādi:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2}. \quad (7.4)$$



att. 7.7

Tātad, jo mazāks μ , jo lielāka kritiskā spēka un tātad arī pieļaujamā spēka vērtība. Tā, piemēram, abos galos iespīlētam stienim var pielikt 16 reizes lielāku slodzi nekā vienā galā iespīlētam stienim.

Normālo spriegumu, kas stieņa šķērsgrīzumā atbilst spiedes spēka kritiskajai vērtībai, sauc par **kritisko spriegumu**.

Kritisko spriegumu σ_{kr} nosaka sakarība:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{min})^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.5)$$

kur

A – stieņa šķērsgrīzuma laukums;

$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ – stieņa šķērsgrīzuma laukuma minimālais inerces rādiuss;

$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ – stieņa slaidums.

Stieņa slaidums raksturo stieņa izmēru (l , i_{min}) un galu stiprinājuma veida (μ) iespaidu uz kritiskā spēka un tātad arī kritiskā sprieguma lielumu.

Kā divu tādu lielumu dalījums, kuriem katram ir garuma mērvienība, slaidums ir bezdimensionāls lielums. Jo lielāks ir stieņa slaidums λ , jo mazāks ir kritiskais spriegums

un jo mazāks spiedes spēks ir vajadzīgs, lai radītu stieņa maksimāli pieļaujamo izliekšanos.

7.3. Kritisko spriegumu noteikšanas empīriskās formulas

Svarīgi ņemt vērā, ka Eilera formula ir pielietojama tikai materiāla proporcionalitātes (elastības) robežās. Ja kritiskais spriegums σ_{kr} pārsniedz proporcionalitātes robežu σ_p , Eilera formula zaudē reālu jēgu.

Noteiksim, kādiem stieņa slaidumiem Eilera formula ir pielietojama.

Tā kā jāizpildās nosacījumam

$$\sigma_{kr} \leq \sigma_p,$$

tad

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p.$$

Līdz ar to

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}.$$

Tātad Eilera formula ir pielietojama tikai tad, ja stieņa slaidums ir lielāks par robežslaidumu

$$\lambda_{rob} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}},$$

kurš atkarīgs no stieņa materiāla fizikāli mehāniskajām īpašībām (E un σ_p).

Mazoglekļa tēraudam $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_p = 200$ MPa. Pieņemot $\pi^2 \approx 10$, iegūstam

$$\lambda_{rob} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}} = 100.$$

Tātad, mazoglekļa tērauda stieņiem Eilera formula pielietojama tikai tad, ja stieņa slaidums lielāks par $\lambda_{rob} \approx 100$, t.i., stieņiem ar lielu garumu un maziem (salīdzinājumā ar garumu) šķērsriezumu izmēriem. Koka stieņiem $\lambda_{rob} = 80 \dots 100$; čuguna stieņiem $\lambda_{rob} \approx 80$, utt. Katram materiālam robežslaiduma vērtību varam aprēķināt zinot materiāla elastības moduli un proporcionalitātes robežu.

Praksē bieži vien spiestu stieņu slaidums ir mazāks par robežvērtību, t.i., kritiskie spriegumi lielāki par proporcionalitātes robežu. Tādos gadījumos Eilera formulu izmantot nedrīkst un jāpielieto empīriskas formulas, kuras atrastas eksperimentālu pētījumu rezultātā.

F. Jasinskis, pēc daudzu zinātnieku iegūto eksperimentālo datu apstrādes, kritiskā sprieguma izskaitļošanai tērauda stieņos ieteica formulu

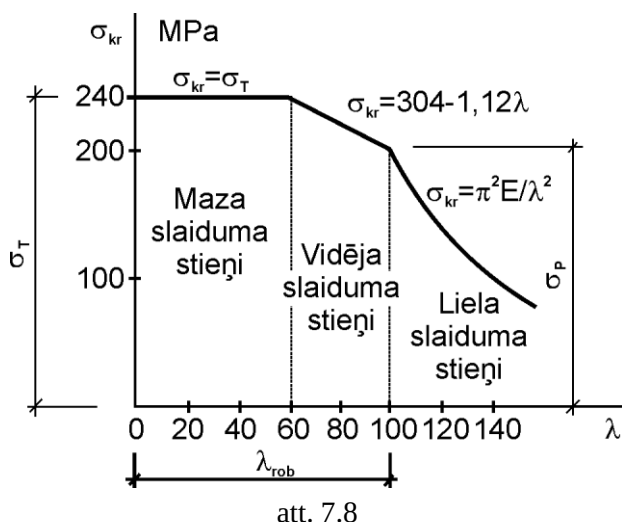
$$\sigma_{kr} = a - b\lambda, \quad (7.6)$$

kur a un b — parametri, kas raksturo materiāla īpašības. Šo parametru vērtības atrodas tehniskajās rokasgrāmatās.

Mazoglekļa tēraudam, ja slaidums $60 \leq \lambda \leq 100$, Jasinska formula ir šāda:

$$\sigma_{kr} = 304 - 1,12\lambda \text{ (MPa)}.$$

Ja kritiskais spriegums, kas aprēķināts pēc formulas (7.6), izrādās augstāks par tecēšanas robežu σ_T , tērauda stienim bīstama ir nevis noturības zušana, bet gan ievērojamu paliekošo deformāciju rašanās. Šai gadījumā par kritisko spriegumu jāuzskata tecēšanas robeža, t.i., $\sigma_{kr} = \sigma_T$. Tas raksturīgi tērauda stieņiem ar mazu slaidumu ($\lambda \leq 60$).



Att. 7.8 parādīts grafiks, kas raksturo kritiskā sprieguma atkarību no slaiduma mazoglekļa tērauda stieņiem.

Stieņus, kuriem pielietojama Eilera formula, sauc par liela slaiduma stieņiem.

Stieņus, kuriem pareizus rezultātus dod Jasinska formula, sauc par vidēja slaiduma stieņiem.

Stieņus, kuriem kritiskie spriegumi, kas izskaitļoti pēc Jasinska formulas, pārsniedz tecēšanas robežu, sauc par maza slaiduma stieņiem.

Tiem kritiskie spriegumi ir vienādi ar tecēšanas robežu.

Koka stieņiem Šveices zinātnieks Tetmajers piedāvā formulu, kura ir pareiza, ja $\lambda < 80$:

$$\sigma_{kr} = 28,3 - 0,19\lambda \text{ (MPa)}.$$

Var secināt, ka kritiskais spriegums noteiktam materiālam ir atkarīgs tikai no stieņa slaiduma λ .

Gadījumos, kad Eilera formulu nevar lietot un kritisko spriegumu aprēķina pēc empīriskām sakarībām, spiedes spēka pieļaujamo lielumu nosaka formula

$$[P] = \frac{\sigma_{kr} A}{[n_{not}]},$$

kur $[n_{not}]$ — nepieciešamais noturības drošības koeficients.

Piemērs 7.1. Noteikt pieļaujamo spiedes spēku čuguna kolonnai ($l = 3$ m), ja tās viens gals iespiļēts, bet otrs — brīvs. Kolonnas šķērsgriezums — gredzens, kura ārējais diametrs $d_{ār} = 20$ cm, iekšējais diametrs $d_{iekš} = 16$ cm. Čuguna elastības modulis $E = 10^5$

MPa, drošības koeficients lodzē $[n_{not}]=5$.

Atrisinājums. Aprēķinām kolonnas šķērsriezuma inerces momentu:

$$a = \frac{d_{ieks}}{d_{ār}} = \frac{16}{20} = 0,8$$

$$I = \frac{\pi d_{ār}^4}{64} (1 - a^4) = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} (1 - 0,8^4) = 4640 \text{ cm}^4$$

Kolonnas šķērsriezuma laukums

$$A = \frac{\pi d_{ār}^2}{4} - \frac{\pi d_{ieks}^2}{4} = \frac{3,14}{4} (20^2 - 16^2) = 113 \text{ cm}^2.$$

Šķērsriezuma laukuma inerces rādiuss

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{4640}{113}} = 6,42 \text{ cm} = 0,0642 \text{ m}.$$

Kolonnas reducētais garums, ja $\mu = 2$ (sk. att. 7.7), ir

$$\mu l = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m}.$$

Kolonnas slaidums

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{6}{0,0642} = 93,5 > \lambda_{rob},$$

jo λ_{rob} čugunam ir 80.

Tātad kolonnas pieļaujamā spiedes spēka aprēķinu var veikt izmantojot Eilera formulu

$$[P] = \frac{P_{kr}}{[n_{not}]} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 [n_{not}]} = \frac{3,14^2 \cdot 10^5 \cdot 4640 \cdot 10^{-8}}{6^2 \cdot 5} = 0,254 \text{ MN}.$$

Piemērs 7.2. Aprēķināt pieļaujamo spiedes spēku apaļa šķērsriezuma stienim, kura $d = 8 \text{ cm}$, garums $l = 1,8 \text{ m}$. Stieņa materiāls — mazoglekļa tērauds (CT. 3). Stieņa gali nostiprināti ar locīklām ($\mu = 1$). Nepieciešamais drošības koeficients $[n_{not}] = 2$.

Atrisinājums. Izskaitļojam šķērsriezuma laukuma inerces rādiusu:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}; A = \frac{\pi d^2}{4}; i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}.$$

Stieņa slaidums

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,8}{0,02} = 90 < \lambda_{rob}.$$

Tātad Eilera formulu šeit nevar lietot, jo stieņa slaidums ir mazāks par robežslaidumu ($\lambda_{rob} = 100$). Kritisko spriegumu izskaitļojam pēc Jasinska formulas

$$\sigma_{kr} = 304 - 1,12\lambda = 304 - 1,12 \cdot 90 = 304 - 101 = 203 \text{ MPa}$$

Pieļaujamo spiedes spēku nosakām pēc formulas

$$[P] = \frac{\sigma_{kr} A}{[n_{not}]} = \frac{\sigma_{kr} \frac{\pi d^2}{4}}{[n_{not}]} = \frac{203 \frac{3,14 \cdot 0,08^2}{4}}{2} = 0,51 \text{ MN}.$$

7.4. Spiestu stieņu šķērsizmēru noteikšana lodzē

Lai nezustu noturība, spriegumi spiestos stieņos nedrīkst sasniegt kritisko vērtību. Spiestu stieņu noturības nodrošināšanai stieņa izmēri jāizvēlas tādi, lai faktiskie spriegumi, kas rodas stieņa šķērsgrīzumos, būtu tikai daļa no šo spriegumu kritiskās vērtības. Tātad pieļaujamam spriegumam $[\sigma_{not}]$, aprēķinot stieni lodzē, jābūt tikai daļai no kritiskā sprieguma, t.i.

$$[\sigma_{not}] = \frac{\sigma_{kr}}{[n_{not}]},$$

kur $[n_{not}]$ — normatīvais (nepieciešamais) drošības koeficients lodzē.

Pieļaujamo spiedes spriegumu stiprības aprēķinos $[\sigma]$, tam trausliem materiāliem nosaka sakarība

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{[n_B]},$$

bet plastiskiem materiāliem

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]},$$

kur

σ_B — stiprības robeža;

σ_T — tecēšanas robeža;

$[n_B]$ un $[n_T]$ — atbilstošie drošības koeficienti spiedē.

Ar φ apzīmējam noturības un stiprības aprēķinos lietojamo pieļaujamo spriegumu attiecību, t.i.,

$$\varphi = \frac{[\sigma_{not}]}{[\sigma]},$$

no kurienes

$$[\sigma_{not}] = \varphi [\sigma].$$

Plastiskam materiālam $\varphi = \frac{\sigma_{kr} [n_T]}{[n_{not}] \sigma_T}$, bet trauslam materiālam $\varphi = \frac{\sigma_{kr} [n_B]}{[n_{not}] \sigma_B}$.

Pieļaujamo spriegumu $[\sigma_{not}] = \frac{\sigma_{kr}}{[n_{not}]}$ katram konkrētam materiālam (ja drošības koefi-

cients ir nemainīgs) nosaka tikai stieņa slaidums λ , tāpēc arī attiecība ϕ atkarīga tikai no šī lieluma.

Tā kā σ_{kr} vērtība ir mazāka par σ_T vai σ_B vērtību, bet $[n_{not}]$ vērtību pieņem nedaudz lielāku par $[n_T]$ vai $[n_B]$ vērtībām, vienmēr izpildās nosacījums $\phi < 1$. Tātad pieļaujama spriegums spiesta stieņa noturības aprēķinā (ievērojot lodes iespējamību) vienmēr ir mazāks par pieļaujamo spriegumu stiprības aprēķinos, t.i., $[\sigma_{not}]$ ir tikai daļa no $[\sigma]$. Koeficientu ϕ sauc par pieļaujamā sprieguma samazināšanas koeficientu jeb **lodes iespaids koeficientu**. To spiestu stieņu aprēķinu praksē ievieša F. Jasinskis.

Lodes iespaids koeficienta ϕ vērtības dažādiem materiāliem un dažādiem stieņu slaidumiem sakopotas tabulā 7.1. Eksperimentālu pētījumu ceļā noskaidrots, ka šķērssgriezumā vājināšana ar kniežu urbumiem maz ietekmē tērauda stieņu noturību, tāpēc spiestu tērauda stieņu noturības pārbaudi vienmēr izdara bruto laukumam (neievērojot vājinājumus) :

$$\sigma_{not} = \frac{P}{A_{bruto}} \leq \phi[\sigma], \quad (7.7)$$

kur

$[\sigma]$ — materiālam pieļaujamais spriegums spiedē;

ϕ — lodes iespaids koeficients, kas atkarīgs no stieņa materiāla un slaiduma. To izvēlas no tabulas 7.1.

Tabula 7.1

Lodes iespaids koeficienta ϕ vērtības stieņu noturības aprēķinos

Slaidums λ	Materiāls				Slaidums λ	Materiāls			
	Tēraudi CT. 2;3;4	Tērauds CT. 5	Čuguns	Koks		Tēraudi CT. 2;3;4	Tērauds CT. 5	Čuguns	Koks
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	—	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,37	—	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	—	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	—	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	—	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	—	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	—	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	—	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	—	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	—	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Izmantojot formulu (7.7), var tikt risināti trīs tipu uzdevumi:

1. Spiesta stieņa noturības pārbaude (pārbaudes aprēķins), kad zināms šķērsriezuma laukums A_{bruto} , spiedes spēks P , kā arī stieņa garums un tā galu nostiprināšanas veids, kas nosaka slaidumu un tātad arī koeficientu ϕ . Sprieguma novērtējumam izmanto formulu (7.7).

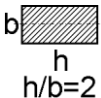
2. Šķērsriezuma izvēle pēc noturības nosacījuma (projekta aprēķins), kad dots spiedes spēks P un pieļaujamais spriegums $[\sigma]$. Parasti zināms arī stieņa garums, tā galu nostiprināšanas veids un šķērsriezuma forma (bet ne izmēri). No formulas (7.7) iegūstam

$$A_{bruto} \geq \frac{P}{\phi[\sigma]}. \quad (7.8)$$

Izmantojot formulu (7.8), nedrīkst aizmirst, ka koeficientu ϕ nav iespējams noteikt kamēr nav zināms šķērsriezuma laukums. Tādēļ vispirms pieņem aptuvenu ϕ vērtību, bet pēc tam, pielietojot pakāpenisku tuvinājumu metodi, tiek panākta šķērsriezuma izmēru un koeficienta ϕ atbilstība.

Tabula 7.2

Īpatnējie inerces rādiusi

Šķērsriezums	ρ_{min}
 $h/b=2$	0,204
	0,289
	0,36
	0,27 – 0,41
	0,38 – 0,45
	0,4 – 0,6
 $a=0,7 - 0,9$	0,86 – 1,53

3. Pieļaujamās slodzes noteikšana pēc noturības nosacījuma. Šai gadījumā zināms šķērsriezuma laukums A_{bruto} , pieļaujamais spriegums $[\sigma]$, stieņa garums un tā galu nostiprināšanas veids. Pārveidojot formulu (7.7), iegūstam

$$[P] = \phi[\sigma]A_{bruto}. \quad (7.9)$$

Tātad, noturības aprēķinu veic izmantojot formulas, kuras analogiskas stiprības aprēķina formulām vienasīgas spiedes gadījumā. Tomēr starp aprēķinu lodzē un aprēķinu spiedē ir principiāla atšķirība. Praktiskos aprēķinos šī atšķirība izpaužas apstākļi, ka jāpielieto pieļaujamā sprieguma samazināšanas koeficients (lodzes iespaids koeficients) ϕ . Tātad koeficients ϕ ievērtē lodzes rašanās iespējamību stieņu spiedes gadījumā.

Virknē gadījumu noturības aprēķinus veic neizmantojot koeficientu ϕ . Pieļaujamo slodzi vai pieļaujamo spriegumu nosaka, pēc Eilera vai empīriskajām formulām aprēķināto kritisko slodzi vai kritisko spriegumu dalot ar doto drošības koeficientu. Tā rīkojas, pārbaudot noturību dažiem mašīnu elementiem, piemēram, darbmašīnu vadvārpstām, kad koeficientu ϕ tabulas sastādīšanai pieņemtās noturības rezerves izrādās nepietiekamas.

Tā kā kritiskā spēka un pieļaujamā sprieguma vērtības ir atkarīgas no slaiduma λ , tad, izvēloties

spiesta stieņa šķērsriezuma formu, jācenšas palielināt šķērsriezuma laukuma minimālo inerces rādītājus. Cauruļveida šķērsriezumi vienmēr izrādās izdevīgāki nekā pilnie šķērsriezumi — ja laukumi vienādi, cauruļveida šķērsriezumiem ir lielāks inerces moments un līdz ar to arī inerces rādītājs.

Bez tam spiestu stieņu šķērsriezumi ir racionāli tikai tad, ja tie ir pēc iespējas vienlīdznoturīgi visos virzienos, t.i., šķērsriezumu laukumu inerces momentiem pret jebkurām centrālajām asīm jābūt vienādiem vai vismaz maz atšķirīgiem. No šī viedokļa racionālākie spiestu stieņu šķērsriezumi ir riņķis un gredzens, kuri ir vienlīdznoturīgi visos virzienos. Velmētiem tērauda dubult-T un U veida profiliem, kā arī stūreņiem vislielākie un vismazākie inerces momenti pret centrālajām asīm ir pēc lieluma krasi atšķirīgi, tāpēc šie šķērsriezumi ir neracionāli no lodes viedokļa. Tomēr no velmētiem profiliem iespējams konstruēt saliktus šķērsriezumus, kuri ir vienlīdznoturīgi visos virzienos.

Lai salīdzinātu savā starpā dažādas formas šķērsriezumus izmantojam bezdimensionālu lielumu – īpatnējo inerces rādītāju $\rho_{\min} = \frac{i_{\min}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{I_{\min}}}{A}$. Jo lielāka inerces rādītāja vērtība, jo izdevīgāks šķērsriezums (tabula 7.2).

Kā jau norādīts, spiestu stieņu šķērsriezumu aprēķinā jāpielieto mēģinājumu metode. Var rekomendēt šādu aprēķina gaitu. Iepriekš brīvi pieņem ϕ vērtību (no 0,4 līdz 0,6)

un nosaka nepieciešamo laukumu $A_{bruto} = \frac{P}{\phi[\sigma]}$. Pēc tam, izvēloties šķērsriezuma

formu un izmērus, aprēķina stieņa faktisko slaidumu λ . 7.1. tabulā atrod atbilstošo ϕ vērtību un pārbauda stieņa noturību pēc formulas (7.7). Ja šķērsriezums neapmierina noturības nosacījumu, šķērsriezums attiecīgi jāizmaina. Ar atkārtotiem mēģinājumiem var panākt σ_{not} un $\phi[\sigma]$ ļoti tuvas vērtības, atšķirība starp tām nedrīkst pārsniegt 5%. Spiestu stieņu noturības aprēķina gaitu, izmantojot koeficientu ϕ tabulu (tab. 7.1), paskaidrosim ar piemēru.

Piemērs 7.3. Aprēķināt kvadrātiska šķērsriezuma izmērus koka statnei, kuras garums 3 m, ja spiedes spēks $P = 60$ kN. Pieļaujamais spriegums spiedē $[\sigma] = 9$ MPa. Statnes gali nostiprināti ar locīklām ($\mu=1$).

Atrisinājums. Orientējoši pieņemam, ka $\phi = 0,5$. Tad nepieciešamais šķērsriezuma laukums ir

$$A_{bruto} = \frac{P}{\phi[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 9} = 0,0133 \text{ m}^2.$$

Šķērsriezuma laukuma malai jābūt

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{0,0133} = 0,115 \text{ m}.$$

Pieņemsim, ka sijas šķērsriezuma izmēri ir 12X12 cm. Tādam šķērsriezuma laukumam

$$I = a^4/12 = 1728 \text{ cm}^4; \quad A = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

Inerces rādiuss

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1728}{144}} = 3,46 \text{ cm}.$$

Stieņa slaidums, ja $\mu=1$, ir

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 300}{3,46} = 87.$$

No 7.1. tabulas (kokam) interpolējot iegūstam

$$\varphi = 0,48 - (0,48 - 0,38) \frac{7}{10} = 0,41.$$

Pieļaujamais spriegums lodzē

$$[\sigma_{not}] = \varphi[\sigma] = 0,41 \cdot 9 = 3,7 \text{ MPa}.$$

Faktiskais spriegums

$$\sigma_{not} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{144 \cdot 10^{-4}} = 4,16 \text{ MPa} > 3,7 \text{ MPa},$$

t.i., par 13% lielāks nekā pieļaujamais. Šķērsriezuma laukums jāpalielina.

Pieņemam, ka šķērsriezuma izmēri ir 12,5X12,5 cm. Tad

$$I = \frac{12,5^4}{12} = 2034 \text{ cm}^4; \quad A = 12,5^2 = 156,25 \text{ cm}^2;$$

$$i = \sqrt{\frac{2034}{156,25}} = 3,6 \text{ cm};$$

$$\lambda = \frac{300}{3,6} = 83,3; \quad \varphi = 0,48 - (0,48 - 0,38) \frac{3,3}{10} = 0,447.$$

Pieļaujamais spriegums

$$[\sigma_{not}] = \varphi[\sigma] = 0,447 \cdot 9 = 4 \text{ MPa}.$$

Faktiskais spriegums

$$\sigma_{not} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{156,25 \cdot 10^{-4}} = 3,84 \text{ MPa} < 4 \text{ MPa}.$$

Novirze

$$\Delta\sigma = \left| \frac{[\sigma_{not}] - \sigma_{not}}{[\sigma_{not}]} \right| \cdot 100 = 4\%.$$

Šķērsriezums 12,5X12,5 cm apmierina uzdevuma noteikumus.

8. LIECE

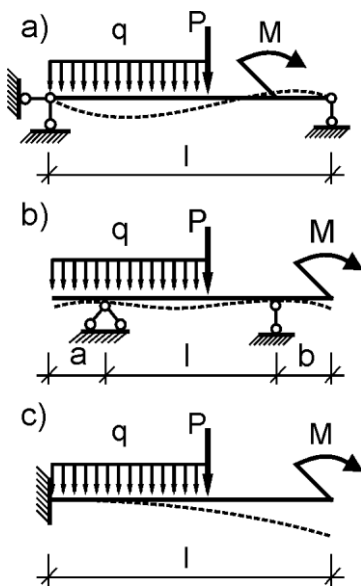
Par lieci sauc slogojuma veidu, kad stieņa šķēlumos rodas lieces momenti. Lieci sauc par tīru, ja stieņa šķēlumos rodas tikai lieces momenti, un par šķērslicē, ja bez lieces momentiem rodas arī šķērsspēki.

8.1. Vienlaiduma sijas un to balsti

Stieni, kurš slogots liecē, sauc par **siju**. Vienkāršākā sija ir prizmatisks stienis ar taisnu asi. Par sijas asi sauc sijas šķērsgrīzumu smaguma centru ģeometrisko vietu. Parasti siju attēlo, parādot tikai tās asi. Sija ir viens no būvniecībā visbiežāk sastopamajiem konstrukciju elementiem un tās uzdevums ir uzņemt lietderīgo (arī pašsvara) slodzi un pārnest to uz konstrukcijas balstiem.

Par balstiem sauc darinājumus (veidojumus), kuru dēļ sija atrodas miera stāvoklī. Siju atbalstīšanai pielieto trīs balstu veidus:

Kustīgais locīklas balsts ļauj sijas galam pagriezties ap cilindriskās locīklas asi un pārvietoties paralēli atbalsta plaknei, bet neļauj pārvietoties perpendikulāri tai. Tā kā šis balsts aizkavē tikai vienu kustību, tad kinemātiskā shēmā to attēlo ar vienu balsta stieni. Kustīgo balstu lieto tur, kur sijas galam jāļauj pārvietoties paralēli atbalsta plaknei, piemēram, izliecoties no slodzes vai mainot garumu, ja mainās temperatūra.



att. 8.1

Nekustīgais locīklas balsts pieļauj sijas gala pagriezienu ap cilindriskās locīklas asi, bet nepieļauj pārvietojumus divu asu virzienos, tātad nepieļauj virzes kustību. Sakarā ar to kinemātiskā shēmā šo balstu attēlo ar diviem balsta stieniem, kuri nepieļauj kustību horizontālā un vertikālā virzienā.

Iespīlējums nepieļauj nekādu sijas gala kustību, t.i., sijas gals nevar pagriezties, nedz arī pārvietoties horizontālā un vertikālā virzienā.

Aprēķina shēma ir reālās konstrukcijas vienkāršots attēlojums. Siju aprēķinos lieto tikai siju aprēķinu shēmas.

Ja sijas gali nav iespīlēti, tad pieņem, ka, siju slogojot, tā var izliekties un slīdēt pa atbalstvirsmu. Tādēļ aprēķina shēmā pieņem, ka viens sijas gals atbalstās uz nekustīga locīklas balsta, bet otrs — uz kustīga locīklas balsta. Šādu siju sauc par **brīvi balstītu siju** (att. 8.1a). Vismaz vienam balstam vienmēr jābūt nekustīgam, lai sija brīvi nepārvietotos ass virzienā.

Sijas daļu, kas sniedzas pāri balstam, sauc par konsoli. Siju, kuras viens gals balstās uz nekustīga locīklas balsta, bet otrs — uz kustīga locīklas balsta un kurai ir viena vai divas konsoles, sauc par **siju ar konsolēm** (att. 8.1b).

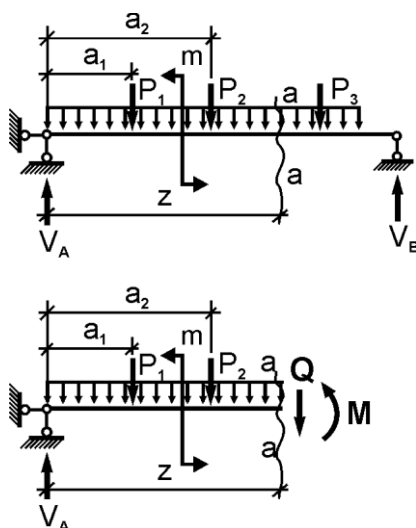
Ja sija iestiprināta ar vienu pašu iespīlējumu, tad siju sauc par konsolsiju vai **iespīlētu siju** (att. 8.1c).

Atstatumu starp balstu locīklu centriem, vai no iespīlējuma līdz sijas galam iespīlētai sijai, sauc par **sijas laidumu**. Jāatzīmē, ka visām šīm sijām pie vertikālas slodzes rodas tikai vertikālas balstu reakcijas.

Sijas balstu reakciju noteikšanai izmanto statikas līdzsvara vienādojumus, kas izsaka visu ārējo spēku, kas darbojas uz siju, ieskaitot balstu reakcijas, līdzsvara nosacījumus. Sistēmai, kas sastāv no viena stieņa (diska) un tai pieliktā slodze darbojas vienā plaknē, var uzrakstīt trīs neatkarīgus statikas līdzsvara vienādojumus un, tātad, noteikt trīs nezināmas sijas balsta reakcijas.

Sijas, kuru balstos rodas ne vairāk par trim balsta reakcijām, sauc par statiski noteicamām sijām. Sijas, kuru balstu reakciju noteikšanai nepietiek ar statikas vienādojumiem, sauc par statiski nenoteicamām sijām (balsta reakciju skaits lielāks par trim). Lai noteiktu statiski nenoteicamu siju balsta reakcijas, jāievieš papildus vienādojumi.

8.2. Iekšējo piepūļu noteikšana liecē



att. 8.2

Pēc tam, kad ir noteiktas balstu reakcijas, varam aprēķināt sijas iekšējās piepūles. Šķērslieces gadījumā rodas divas iekšējās piepūles – lieces moments M un šķērslieces spēks Q (ass spēks N var rasties, ja sijai bez vertikālas slodzes ir pielikta kāda slīpa vai horizontāla slodze). Attēlā 8.2 parādītajai sijai noteiksim iekšējās piepūles patvaļīgā šķēlumā a-a attālumā z no sijas kreisā gala izmantojot šķēlumu metodi: atmetam sijas daļu pa labi no šķēluma un tās iespaidu uz sijas kreiso daļu aizstājam ar iekšējām piepūlēm M un Q . Tas dod iespēju sijas kreisajai pusei sastādīt līdzsvara vienādojumus (var arī labajai). Vispirms sastādām projekciju summu uz vertikālo asi un to pielīdzinām nullei. Tā iegūstam vienādojumu:

$$\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - R_{qz} - Q = 0,$$

kur $R_{qz} = qz$ ir kopspeks izkliedētās slodzes daļai, kas atrodas pa kreisi no šķēluma a-a, pielikts posma, kurā darbojas izkliedētā slodze q , vidū, tas ir attālumā $z/2$ no kreisā balsta.

To atrisinot iegūstam

$$Q = V_A - P_1 - P_2 - R_{qz}.$$

Vispārinot šo rezultātu varam rakstīt:

$$Q = \sum_i (P_i)_y, \quad (8.1)$$

kur P_i ietver sevī kā ārējos spēkus un balsta reakciju tā arī izkliedētās slodzes kopspeku.

Šķērslieces spēks Q sijas šķēlumā skaitliski vienāds ar visu spēku, kas darbojas uz vienu pusi no šī šķēluma, projekciju uz asi, kas perpendikulāra sijas asij, algebrisku summu.

To spēka projekciju, kura cenšas atšķelto stieņa daļu pagriezt pulksteņa rādītāja virzienā pret šķēluma smaguma centru, pieņemam par pozitīvu (pretējā gadījumā par negatīvu). Ja sijai pielikta izkliedēta slodze, to izkliedētās slodzes daļu, kura darbojas uz atšķelto stieņa posmu, aizstājam ar kopspēku un turpmāk ar to rīkojamies kā ar koncentrētu spēku.

Sastādām uz sijas atšķelto daļu darbojošos momentu summu pret šķēluma smaguma centru un pielīdzinām to nullei:

$$\sum M_{a-a} = V_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a_1) - P_2 \cdot (z - a_2) - qz \cdot \frac{z}{2} - m - M = 0,$$

no kurienes

$$M = V_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a_1) - P_2 \cdot (z - a_2) - qz \cdot \frac{z}{2} - m,$$

vai vispārīgajā gadījumā

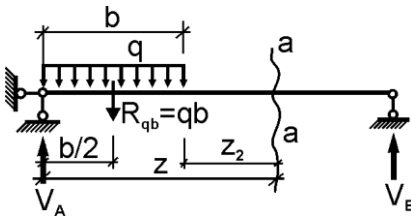
$$M = \sum_i p_i \cdot P_i + \sum_j m_j, \quad (8.2)$$

kur $p_i = z - a_i$ – attālums no šķēluma smaguma centra līdz spēka P_i darbības līnijai (P_i ietver sevī kā balstu reakciju tā arī izkliedētās slodzes kopspēku), m_j – apskatāmajai sijas daļai pieliktie spēkpāri (koncentrēti momenti).

Lieces moments M sijas šķēlumā skaitliski vienāds ar visu uz vienu pusi no šķēluma izvietoto spēku momentu pret šī šķēluma smaguma centru un spēkpāru algebrisku summu.

Ja spēka darbības rezultātā atšķeltās sijas daļas apakšējā josla tiek stiepta, tad šī spēka radīto momentu uzskatām par pozitīvu, pretējā gadījumā par negatīvu.

Ja sijai pielikta izkliedēta slodze, lietojam izkliedētās slodzes kopspēka radīto momentu. Spēkpāri (koncentrētu momentu) lietojam ņemot vērā pieņemto zīmju likumu.



Speciālā gadījumā, kad q darbojas tikai posmā ar garumu b un koordināte z tiek atskaitīta no sijas sākuma

$$M_{a-a} = V_A z - R_{qb} \cdot (z - b/2).$$

Bieži nosakot piepūles sijas posmos ērtāk koordinātes atskaitīt no katra posma sākuma. Šādā gadījumā šķēlumā $a-a$ otrajā sijas posmā, attālumā z_2 no šī posma sākuma, lieces momenta lielumu nosaka sakarība

$$M_{a-a} = V_A \cdot (z_2 + b) - R_{qb} \cdot (z_2 + b/2).$$

Lieces momentu un šķērsspēku epīru konstruēšana

Vispārīgā gadījumā lieces momentu un šķērsspēki ir mainīgi lielumi un atkarīgi no šķēluma atrašanās vietas. Uzskatāmības dēļ tos mēdz attēlot grafiski, konstruējot pieņemtā mērogā piepūli M un Q diagrammas jeb **epīras**. Šim nolūkam nosaka piepūli M un Q vērtības sijas dažādos šķēlumos un atliek tās **perpendikulāri epīras asij**. Pozitīvās Q vērtības atliek virs ass, bet negatīvās vērtības atliek zem ass. Pozitīvas M vērtības at-

liek zem ass, bet negatīvās — virs ass (līdz ar to M epīra būs sijas stieptajā pusē). Šāds M epīru attēlošanas princips ir dziļi iesakņojies būvspeciālistu praksē, jo uzskatāmi norāda uz būvelementa stiepto zonu, kura lielākajā daļā gadījumu ir atbildīga par būvdarīnājumu drošumu (nestspēju) un kur dzelzsbetona konstrukcijās ir jāizvieto nesošā armatūra.

Piemērs 8.1. Uzkonstruēt šķērsspēku Q un lieces momentu M epīras zīmējumā attēlotajai sijai.

Atrisinājums. Sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu B , nosakām reakciju V_A :

$$\sum M_B = q_1 \cdot 2 \cdot 7 + P_1 \cdot 5 + P_2 \cdot 3 + q_2 \cdot 3 \cdot 1,5 - V_A \cdot 6 = 0,$$

$$V_A = 61,16(6) \text{ kN}.$$

Sastādot momentu līdzsvara vienādojumu pret punktu A , nosakām reakciju V_B :

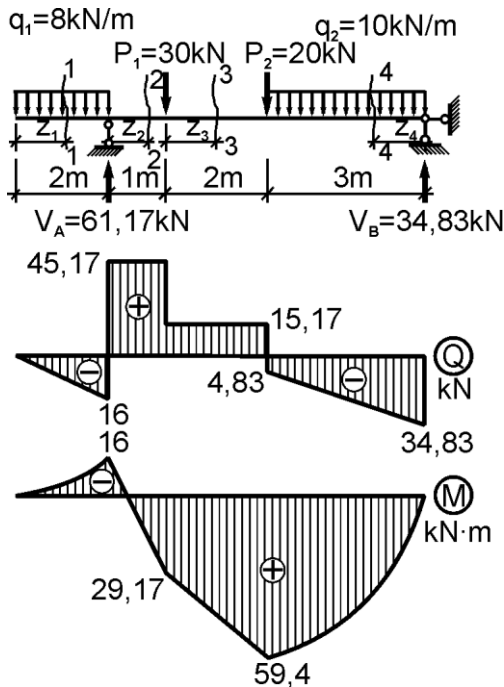
$$\sum M_A = P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 3 + q_2 \cdot 3 \cdot 4,5 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 - V_B \cdot 6 = 0,$$

$$V_B = 34,83(30) \text{ kN}.$$

Pārbaudei izmantojam projekciju vienādojumu uz vertikālu asi:

$$\sum Y = q_1 \cdot 2 + P_1 + P_2 + q_2 \cdot 3 - V_A - V_B = 0$$

un pārliecināmies, ka reakcijas aprēķinātas pareizi.



Sadalām siju posmos tā, lai katra posma robežās iekšējās piepūles mainītos pēc viena noteikta likuma. Dotajai sijai jāapskata četri posmi.

Pirmajā posmā (šķēlums 1-1) iekšējās piepūles nosaka izkliedētā slodze q_1 , otrajā posmā (šķēlums 2-2) tai pievienojas balstu reakcija V_A , trešajā posmā (šķēlums 3-3) papildus jāņem vērā arī spēks P_1 . Ceturto posmu (šķēlums 4-4) izdevīgāk analizēt no labās puses, jo tad varam aprobežoties ar mazāku ārējo slodzi (ieskaitot balstu reakciju) skaitu. Šķēlumu atrašanās vietu raksturo koordinātes $z_1, z_2, \dots$, kuras atskaitām no katra posma sākuma.

Sāksim ar šķērsspēku Q epīras konstruēšanu. Lai iegūtu šķērsspēka vērtību šķēlumā, varam summēt spēku projekcijas gan pa kreisi, gan pa labi no šķēluma.

Pirmajā šķēlumā ērtāk summēt spēku projekcijas no kreisās puses, jo tur darbojas tikai izkliedētā slodze q_1 . Tā kā izkliedētā slodze pret šķēlumu 1-1 darbojas pretī pulksteņa

rādītāja virzienam, kospēks no tās izkļiedētās slodzes daļas, kas atrodas pa kreisi no šķēluma 1-1 $q_1 \cdot z_1$, jāņem ar negatīvu zīmi. Izteiksme šķērsspēka aprēķināšanai būs spēkā visā pirmajā posmā, t.i. z_1 vērtībām no 0 līdz 2 m. Tātad

$$Q_{1-1} = -q_1 \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2.$$

Ievietojot $z_1 = 0$ (atbilst posma kreisajam galam), iegūstam $Q_{1-1}=0$, ievietojot $z_1 = 2$ (atbilst posma labajam galam), iegūstam $Q_{1-1} = -16$ kN. Šos divus punktus savienojam ar taisni, jo Q_{1-1} ir argumenta z_1 lineāra funkcija. Analogi pārējiem posmiem iegūstam:

$$Q_{2-2} = -q_1 \cdot 2 + V_A, \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \text{ (} Q \text{ ir konstants);}$$

$$Q_{3-3} = -q_1 \cdot 2 + V_A - P_1, \quad 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ (} Q \text{ ir konstants);}$$

$$Q_{4-4} = -V_B + q_2 \cdot z_4, \quad 0 \leq z_4 \leq 3 \text{ (} Q \text{ mainās pēc lineāra likuma).}$$

Momentu epīras konstruēšanai attiecīgajos posmos iegūstam sekojošas izteiksmes:

$$M_{1-1} = -q_1 \cdot z_1 \cdot z_1 / 2, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$M_{2-2} = -q_1 \cdot 2 \cdot (z_2 + 1) + V_A \cdot z_2, \quad 0 \leq z_2 \leq 1;$$

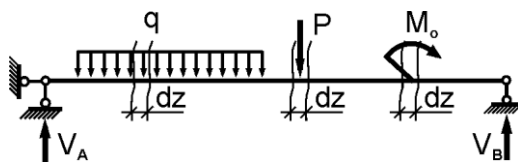
$$M_{3-3} = -q_1 \cdot 2 \cdot (z_3 + 2) + V_A \cdot (z_3 + 1) - P_1 \cdot z_3, \quad 0 \leq z_3 \leq 2;$$

$$M_{4-4} = V_B \cdot z_4 - q_2 \cdot z_4 \cdot z_4 / 2, \quad 0 \leq z_4 \leq 3.$$

Sijas stiprības aprēķinos būtiska ir maksimālā lieces momenta vērtība. Šķēlumu, kurā darbojas maksimālais lieces moments, sauc par **bīstamo šķēlumu**. Dotajai sijai bīstamais šķēlums ir ar maksimālo momenta vērtību 59,4 kN·m.

8.3. Diferenciālās sakarības liecē

Dabā eksistējošo ārējo slodžu daudzveidību parasti izdodas novest uz trim vienkāršākajiem slodžu veidiem (att. 8.3) – vienmērīgi izkļiedētu slodzi ar intensitāti q , koncentrētu spēku P un spēkpāri M_0 .



att. 8.3

Atrādīsim dažas svarīgas sakarības starp šķērsspēku Q , lieces momentu M un ārējām slodzēm (tab. 8.1). Ja visa sistēma atrodas līdzsvarā, tad jābūt līdzsvarā arī jebkurai tās daļai, tātad mēs varam no sijas izgriezt elementus

ar garumu dz vietās, kur darbojas slodzes q , P un M_0 un apskatīt šo elementu līdzsvaru. Vispārīgā gadījumā iekšējās piepūles mainās pa sijas garumu. Tāpēc, ja uz elementa kreisās skaldnes darbojas iekšējās piepūles Q un M , uz labās skaldnes attālumā dz tās var būt izmainījušās par lielumiem dQ un dM . Tā kā gadījumā b (tab. 8.1), kad uz elementu darbojas koncentrēts spēks P , šķērsspēks mainīsies par šī spēka lielumu, ir lietderīgi bezgalīgi mazo izmaiņu dQ aizstāt ar galīgu šķērsspēka izmaiņu ΔQ . Tāpat gadījumā c ir lietderīgi dM aizstāt ar ΔM .

a) Ja uz elementu ar garumu dz darbojas tikai **izkļiedēta slodze ar intensitāti q** , tad

šīs slodzes kopspēks, ir qdz un spēku projekciju līdzsvara vienādojums apskatāmajam elementam uz vertikālu asi ir

$$Q - (Q + dQ) - qdz = 0.$$

No šī vienādojuma iegūstam sekojošu diferenciālo sakarību:

$$\frac{dQ}{dz} = -q.$$

Tātad izkliedētas slodzes gadījumā šķērsspēka Q epīras slīpumu (šķērsspēka atvasinājumu pēc koordinātes) nosaka izkliedētās slodzes intensitāte q .

Integrējot iepriekšējo izteiksmi pēc z , iegūstam sakarību šķērsspēka noteikšanai (vajadzīgi robežnosacījumi)

$$Q = -\int qdz = -qz + C,$$

no kuras seko, ka izkliedētās slodzes darbības zonā, šķērsspēks ir lineāra z funkcija (epīras raksturs ir slīps).

Ja $q = 0$, tad $Q = \text{const}$, tātad posmos, kur nedarbojas izkliedētā slodze, šķērsspēkam ir jābūt konstantam.

Summējam momentus pret apskatāmā elementa kreiso skaldni

$$-M - qdz \cdot \frac{dz}{2} - (Q + dQ)dz + M + dM = 0$$

un atmetot locekļus, kas satur diferenciāļu reizinājumus, iegūstam

$$\frac{dM}{dz} = Q.$$

Tabula 8.1

Diferenciālās sakarības liecē

a)	b)	c)
$\frac{dQ}{dz} = -q$	$\Delta Q = -P$	$Q = \text{const}$
$\frac{dM}{dz} = Q$	$\Delta \left(\frac{dM}{dz} \right) = -P$	$\Delta M = M_0$

Tātad izkliedētas slodzes gadījumā lieces momenta M epīras slīpumu (momenta atvasinājumu pēc koordinātes) nosaka šķērsspēks Q . Lieces momentu varētu iegūt pie noteiktiem robežnosacījumiem integrējot iepriekšējo izteiksmi.

Tā kā šķērsspēks ir lineāra z funkcija, tad integrēšanas rezultātā momenta izmaiņas

funkcijai būs kvadrātisks raksturs.

Posmos, kuros nav izkliedētas slodzes, šķērsspēks ir konstants un lieces moments mainās pēc lineāra likuma.

Posmos, kuros šķērsspēks ir 0, lieces moments ir konstants.

No iepriekš teiktā varam izdarīt arī sekojošu secinājumu: ja kādā stieņa šķēlumā šķērsspēks Q maina zīmi (šķērsspēka epīra iet caur 0), tad momenta epīrai šajā šķēlumā jābūt ekstrēmam (maksimumam vai minimumam).

b) Koncentrēta spēka P darbības gadījumā no spēku līdzsvara vienādojuma vertikālā virzienā

$$Q - P - (Q + \Delta Q) = 0 \quad \text{seko}$$

$$\Delta Q = -P,$$

tas ir šķērsspēka Q izmaiņa ir vienāda ar spēku P ņemtu ar pretēju zīmi.

Tātad šķērsspēku epīrā vietā, kur darbojas koncentrēts spēks, ir jābūt lēcienam par pieliktā spēka vērtību.

Lieces momenta atvasinājuma vērtība, ejot caur šķēlumu, kurā darbojas koncentrēts spēks, mainās lēcienveidīgi par lielumu $\Delta Q = -P$ (samazinās). Uz kreisās skaldnes

$\frac{dM}{dz} = Q$, uz labās skaldnes $\frac{dM}{dz} = Q + \Delta Q$. Izmaiņa, ejot caur šķēlumu, kurā darbojas koncentrēts spēks ir vienāda ar

$$\Delta\left(\frac{dM}{dz}\right) = \Delta Q = -P.$$

Tātad šķēlumā, kurā darbojas koncentrēts spēks, momentu epīras pieskares virziens lēcienveidīgi mainās, tas ir, momentu epīrai ir lūzums.

c) Spēkpāra M_0 darbības gadījumā no spēku līdzsvara vienādojuma vertikālā virzienā

$$Q - (Q + \Delta Q) = 0$$

seko sakarība

$$\Delta Q = 0, \text{ tas nozīmē, ka}$$

$$Q = \text{const}.$$

Tātad, šķēlumā, kur darbojas spēkpāris, šķērsspēku epīrā nebūs nekādu izmaiņu.

Sastādot momentu summu pret elementa kreiso skaldni

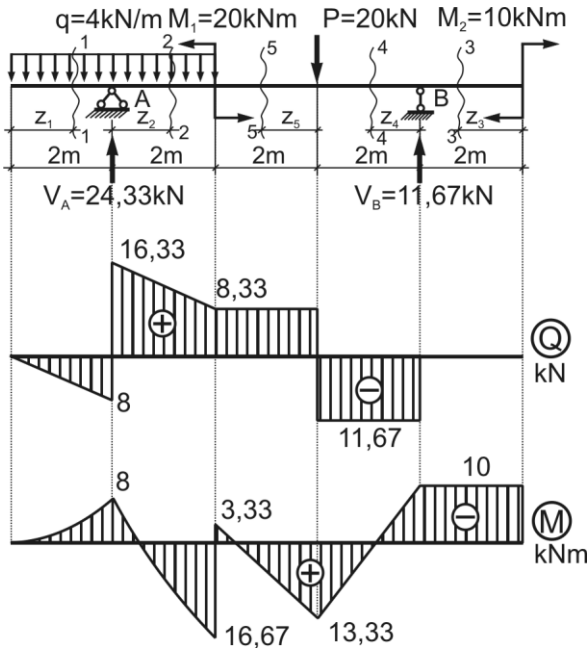
$$M + M_0 + (Q + dQ)dz - M - \Delta M = 0$$

un ņemot vērā, ka lielums $(Q + dQ)dz$ ir bezgala mazs salīdzinot ar spēkpāri M_0 , iegūstam

$$\Delta M = M_0.$$

Tātad šķēlumā, kurā darbojas spēkpāris M_0 , lieces moments lēcienveidīgi mainās par pieliktā spēkpāra lielumu un momentu epīrā šajā vietā parādās atbilstošs lēciens.

Piemērs 8.2. Uzkonstruēt šķērsspēku Q un lieces momentu M epīras zīmējumā attēlotajai sijai.



Atrisinājums. Sastādot momentu līdzsvara vienādojumus pret balstiem A un B

$$\sum M_A = q \cdot 4 \cdot 0 + P \cdot 4 + M_2 - M_1 - V_B \cdot 6 = 0,$$

$$\sum M_B = q \cdot 4 \cdot 6 + M_1 + P \cdot 2 - M_2 - V_A \cdot 6 = 0,$$

nosakām balstu reakcijas V_B un V_A :

$$V_B = 11,67 \text{ kN}; V_A = 24,33 \text{ kN}.$$

Pārbaudei izmantojam projekciju summu uz vertikālu asi:

$$\sum Y = q \cdot 4 - V_A - V_B = 0.$$

Sadalām siju posmos tā, lai katra posma robežās iekšējās piepūles

mainītos pēc viena noteikta likuma. Dotajai sijai jāapskata pieci posmi.

Pirmajā posmā (šķēlums 1-1) iekšējās piepūles nosaka izkliedētā slodze q , otrajā posmā (šķēlums 2-2) tai pievienojas balstu reakcija V_A . Pārējos sijas posmus ērtāk rēķināt no labās puses. Trešajā posmā (šķēlums 3-3) iekšējās piepūles nosaka spēkpāris M_2 , ceturtajā posmā (šķēlums 4-4) tam pievienojas balsta reakcija V_B , piektajā posmā papildus pievienojas arī spēks P . Šķēlumu atrašanās vietu konkrētajos posmos raksturo koordinātes $z_1, z_2, \dots$, kuru atskaites punkts ir katra posma sākums.

Veiksim šķērsspēku Q epīras konstruēšanu:

$$Q_{1-1} = -qz_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$Q_{2-2} = -q(2 + z_2) + V_A, \quad 0 \leq z_2 \leq 2;$$

$$Q_{3-3} = 0, \quad 0 \leq z_3 \leq 2;$$

$$Q_{4-4} = -V_B, \quad 0 \leq z_4 \leq 2;$$

$$Q_{5-5} = -V_B + P, \quad 0 \leq z_5 \leq 2.$$

Atbilstoši iegūtajām sakarībām uzkonstruētā šķērsspēku Q epīra parādīta attēlā. Atbilstoši diferenciālajām sakarībām, Q epīrā šķērsspēks mainās pēc lineāra likuma posmos, kur darbojas izkliedētā slodze q , ir konstants posmos kur nav izkliedētas slodzes. Šķēlumos, kuri atbilst koncentrētu spēku (balstu reakciju) pielikšanas vietām, Q epīrā ir

atbilstoši lēcieni.

Lieces momentu vērtības sijas posmos nosaka sakarības:

$$M_{1-1} = -qz_1^2 / 2, \quad 0 \leq z_1 \leq 2;$$

$$M_{2-2} = -q(2 + z_2)^2 / 2 + V_A z_2, \quad 0 \leq z_2 \leq 2;$$

$$M_{3-3} = -M_2, \quad 0 \leq z_3 \leq 2;$$

$$M_{4-4} = V_B z_4, \quad 0 \leq z_4 \leq 2;$$

$$M_{5-5} = V_B(z_5 + 2) - Pz_5, \quad 0 \leq z_5 \leq 2.$$

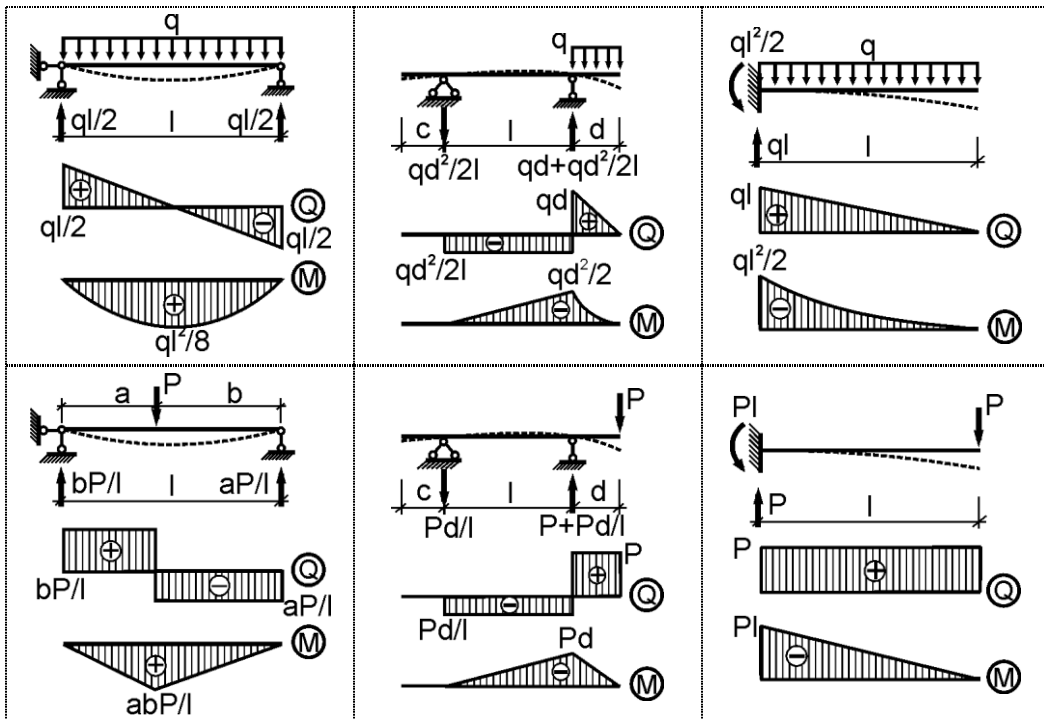
Momentu epīrai M ir kvadrātisks raksturs posmos, kur darbojas izkliedētā slodze q un lineārs visos pārējos. Šķēlumos, kur pielikti spēkpāri, M epīrā parādās tiem atbilstoši lēcieni.

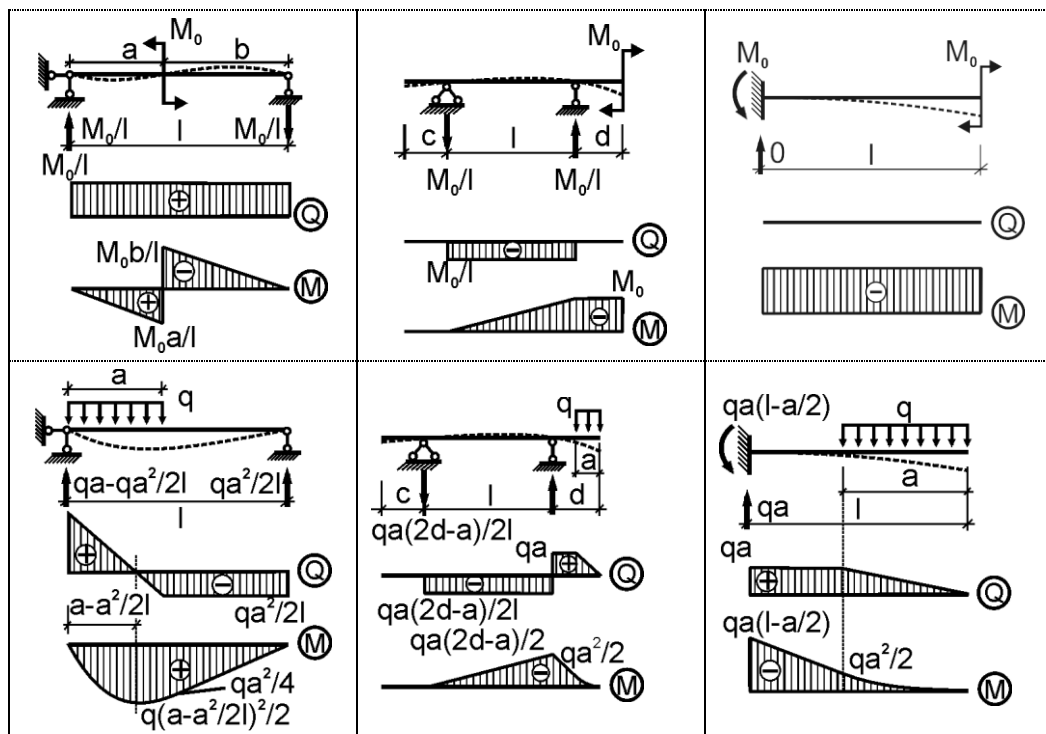
8.4. Piepūļu epīras vienkāršākajiem siju slogojuma gadījumiem

Pamatojoties uz spēku darbības neatkarības principu, jebkuru sijas slogojumu varam sadalīt atsevišķos slogojumos, katram atsevišķajam slogojumam uzkonstruēt lieces momentu un šķērsspēku epīras un galīgās epīras iegūt kā atsevišķo slogojumu epīru summu. Nākošajā tabulā 8.2. apkopoti dažādu vienlaiduma siju slogošanas rezultāti ar vienkāršām slodzēm.

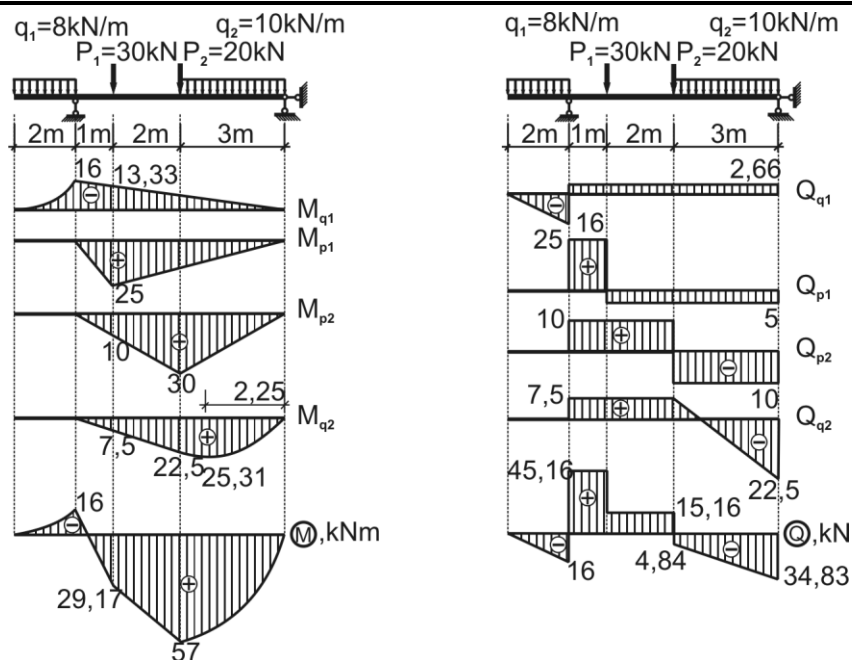
Tabula 8.2

Vienlaiduma siju vienkāršākie slogojumi





Piemērs 8.3. Izmantojot spēku darbības neatkarības principu, uzkonstruēt lieces momentu un šķērsspēku epīras attēlā dotajai sijai.



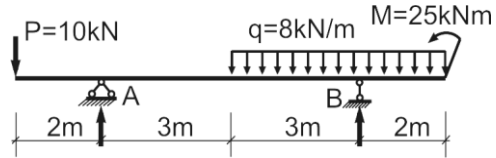
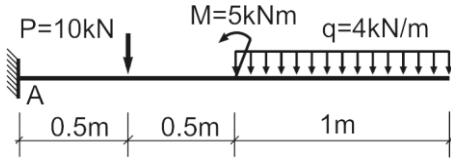
Atbilstoši iepriekšējā tabulā dotajām sakarībām konstruējam epīras no atsevišķajām

slodzēm. Galīgās epīras iegūstam kā atsevišķo epīru summu.

Uzdevums 8.1

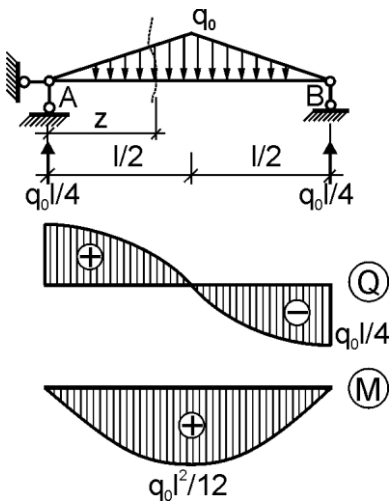
Uzdevums 8.2

Uzkonstruēt iekšējo piepūļu epīras attēlā dotajai sijai.



Ne vienmēr konstrukcijai pielikto ārējo izkliedēto slodzi var pieņemt par vienmērīgi izkliedētu. Tādas ir birstoša materiāla kaudzes radītā slodze, slīpu pārsegumu sniega slodze un citas slodzes.

Piemērs 8.4. Noteikt balstu reakcijas, šķērsspēku un lieces momentu epīras attēlā redzamajai sijai.



Atrisinājums. Tā kā sija ir slogota simetriski, tad acīm redzot abas balstu reakcijas ir vienādas un katras vērtība ir puse no pieliktās slodzes. Sijai pieliktā slodze (izkliedētās slodzes kopspēks) ir $q_0 l / 2$. Tātad katras reakcijas vērtība ir

$$V_A = V_B = q_0 l / 4.$$

Pie šāda rezultāta var nonākt arī sastādot momentu līdzsvara vienādojumus pret balstiem A un B. Tādā gadījumā iegūstam

$$\sum M_A = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{2} - V_B l = 0;$$

$$\sum M_B = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{2} - V_A l = 0.$$

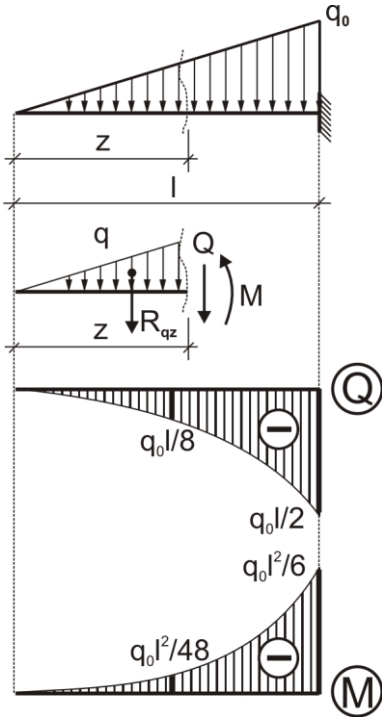
Slodzes simetrijas dēļ šķērsspēku un lieces momentu epīras jākonstruē tikai vienai sijas pusei, otrā pusē tās būs simetriskas (šķērsspēku epīrai apgriezti simetriskas). Tā kā izkliedētās slodzes intensitāte sijas kreisajā pusē mainās atbilstoši sakarībai $q = 2q_0 z / l$, tad šķērsspēku jebkurā sijas šķēlumā attālumā z no balsta A nosaka sakarība

$$Q = V_A - (2q_0 z / l) \cdot \frac{z}{2} = \frac{q_0 l}{4} - \frac{q_0 z^2}{l} = q_0 \left(\frac{l}{4} - \frac{z^2}{l} \right),$$

bet lieces momentu sakarība

$$M = V_A z - \frac{2q_0 z}{l} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3} = \frac{q_0 l z}{4} - \frac{q_0 z^3}{3l}.$$

Šīm sakarībām atbilstošās epīras parādītas attēlā.



Piemērs 8.5. Noteikt šķērsspēkus un lieces momentus patvaļīgā šķēlumā ar koordināti x no konsolijas brīvā gala, ja sija slogota ar lineāri mainīgu izkļiedētu slodzi.

Atrisinājums. Izkļiedētas slodzes lielumu jebkurā šķēlumā x nosaka sakarība $q = q_0 z / l$. Līdz ar to šķērsspēka vērtība šai šķēlumā, ievērojot, ka kopspēks no izkļiedētās slodzes ir funkcijas $q(x)$ ierobežotais laukums, ir

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{q_0 z}{l} z = -\frac{q_0 z^2}{2l}, \quad (8.3)$$

bet tā maksimālā vērtība iespīlētājā sijas galā ir

$$Q_{\max} = -q_0 l / 2$$

Lieces momentu patvaļīgā šķēlumā nosaka atšķēlētās sijas daļas slodzes izraisītais moments pret asi, kura iet caur šķēluma smaguma centru.

Nemot vērā ka izteiksme (8.3) vienlaicīgi izsaka arī kopspēka lielumu izkļiedētajai slodzei pa kreisi no šķēluma (ar plus zīmi) un faktu, ka šis kopspēks

ir pielikts attālumā $z/3$ no šķēluma, iegūstam sakarību

$$M = (-q_0 z^2 / 2l) \cdot (z/3) = -q_0 z^3 / (6l)$$

Maksimālā lieces momenta vērtība veidojas sijas iespīlējumā un tā ir

$$M_{\max} = -q_0 l^2 / 6.$$

Tātad konkrētajā slogojuma gadījumā šķērsspēks monotoni mainās pēc kvadrātiskās parabolas, bet lieces moments pēc kubiskās parabolas likuma.

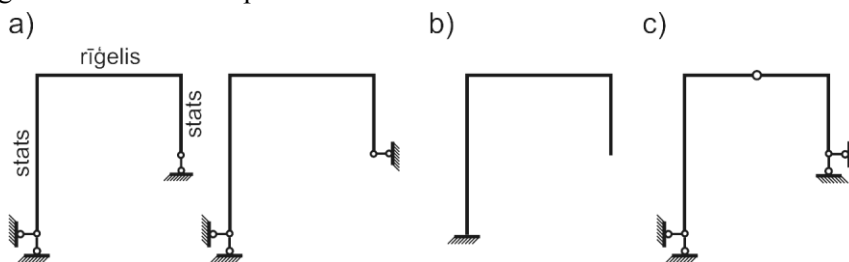
8.5 Epīru konstruēšana rāmjiem

Stieņu sistēmu, kuras visi vai tikai daļa savienojumu ir stingi, sauc par rāmi. Stingie savienojumi pilnībā nodrošina leņķu nemainību starp savienojamo stieņu asīm. Rūpniecības un civilās būvniecības objekti lielā mērā tiek veidoti kā rāmjeveida konstrukcijas.

Plakaniem statiski noteicamiem rāmjiem balstu reakcijas nosakāmas no statikas līdzsvara vienādojumiem (sk. 2. nodaļu).

Tipiskākie vienkāršu rāmju veidi ir: rāmji ar diviem balstiem (att. 8.4a), no kuriem viens ir kustīgs, bet otrs nekustīgs locīklas balsts; rāmji ar vienu iespīlētu balstu (att. 8.4b) un rāmji ar diviem nekustīgiem locīklas balstiem, pie kam rāmja divas daļas savā

starpā savienotas ar locīklu (att. 8.4c). Komplicētāku rāmju struktūru aprēķinu metodes tiek apgūtas būvmehānikas pamatkursā.



att. 8.4

Katru rāmi var pieņemt par stieņu sistēmu. Līdz ar to konstruējot kādu no rāmja piepūļu epīrām, var konstruēt šo epīru katram rāmi veidojošajam stienim atsevišķi. Svarīgi ņemt vērā, ka rāmja gadījumā katrā tā elementā var darboties ne tikai lieces moments M , šķērsspēks Q , bet arī asspēks N .

Iekšējo piepūļu noteikšanai katrā rāmja stieņa šķēlumā izmantosim trešajā nodaļā plakana stieņu sistēmai iegūtās vispārīgās likumsakarības:

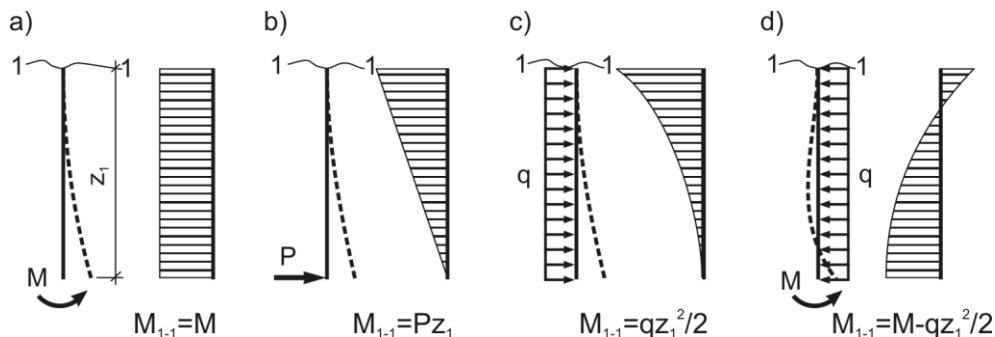
Šķērsspēks Q izvēlētajā šķēlumā ir visu uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku projekciju uz stieņa asij perpendikulāru asi algebriska summa.

To spēka projekciju, kas griež apskatāmo stieņa daļu pulksteņa rādītāja kustības virzienā attiecībā pret šķēluma smaguma centru, uzskatīsim par pozitīvu, bet pretējā virzienā – par negatīvu.

Rīģelim pozitīvās Q vērtības tāpat kā sijai tiek atliktas uz augšu no stieņa ass, negatīvās – uz leju. Statam pozitīvo un negatīvo Q vērtību novietojums nav stingri noteikts.

Lieces moments M izvēlētajā šķēlumā ir vienāds ar visu uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku (spēkpāru, izkliedēto slodžu) momentu algebrisku summu pret šķēluma smaguma centru.

Rāmja gadījumā atšķirībā no sijas lieces momentam netiek definēts nekāds zīmju likums. Jāievēro nosacījums, ka M epīrai visiem stieņiem jābūt attēlotai stieņa stieptajā pusē.



att. 8.5

Nosakot stienim stiepto pusi stieņa sākumā (pie $z_1=0$) vislielākais iespaids ir spēkpārim M (att. 8.5a), jo spēkpāris lieces momentu epīrā dod lēcieni par pieliktā momenta vērtību, mazāks spēkam P (att. 8.5b) - lieces moments palielinās pēc lineāra likuma un

vismazākais izkliedētais slodzei q (att. 8.5c), jo momentam palielinoties pēc kvadrātiska likuma, sākuma punktā momentu epīras pieskare ir paralēla stieņa asij. Attālumā z_1 aprēķināto lieces momenta vērtību zīmes maiņa liecina arī par stieņa stieptās puses maiņu (att. 8.5d).

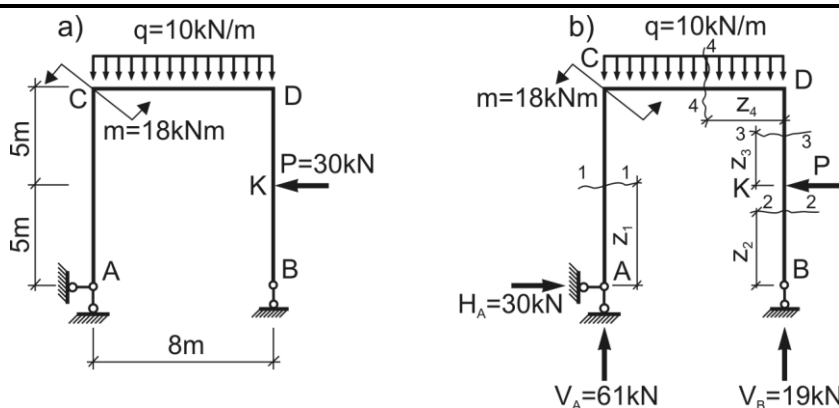
Ass spēks N izvēlētajā šķēlumā ir visu uz vienu pusi no šķēluma pielikto ārējo spēku projekciju uz stieņa asi, algebriska summa.

To spēka projekciju, kura izraisa atšķeltās stieņa daļas stiepi, uzskata par pozitīvu (lieto ar plus zīmi), bet to, kura izraisa spiedi – par negatīvu (lieto ar mīnus zīmi).

Konstruējot asspēku epīru rāmim pieņemts asspēka vērtības atlikt simetriski uz abām pusēm no stieņa ass.

Rāmjos ar vienu stingu balstu epīru konstruēšanu var sākt no brīvā gala. Tādā gadījumā, konstruējot epīru, iepriekš nav jānosaka balstu reakcijas. Rāmjiem ar vairāk kā vienu balstu, aprēķinus sāk ar balstu reakciju noteikšanu.

Piemērs 8.6. Attēlā 8.6 dotajam rāmim pie dotās slodzes uzkonstruēt piepūli M , Q un N epīras.



att. 8.6

Atrisinājums. Izmantojot momentu līdzsvara vienādojumus pret balstiem A un B nosakām vertikālās balstu reakcijas V_A un V_B , bet no spēku līdzsvara vienādojuma horizontālā virzienā reakciju H_A . Ja kāda no reakcijām aprēķina rezultātā ir negatīva, sākotnēji pieņemtais reakcijas virziens jāmaina uz pretēju. Rāmja slogojuma shēma parādīta att. 8.6b (var attēlot arī atmetot balstus un parādot tikai balstu reakcijas). Rāmi nosacīti var sadalīt četros posmos. Ar posmu saprotam sistēmas daļu, kurā meklējamā piepūle mainās pēc viena noteikta likuma. Jauns posms sākas slodžu pielikšanas (noņemšanas) punktos, kā arī mainoties stieņa virzienam. Turpmāk koordinātes z_n , kas raksturo šķēluma atrašanās vietu posma robežās atskaitīsim no katra posma sākuma punkta.

1. posms (AC).

Šajā posmā vienīgais spēks, kas darbojas perpendikulāri stieņa asij un, tātad, var atstāt kādu iespaidu uz šķērsspēku, ir balsta reakcija H_A . Izdarām patvaļīgi izvēlētu stieņa šķēlumu 1-1. Tā kā balsta reakcija pret apskatāmo šķēlumu 1-1 darbojas pretēji pulk-

stieņa rādītāja kustības virzienam, tā jāņem ar negatīvu zīmi. Šķērsspēka aprēķinam iegūstam sakarību

$$Q_{1-1} = -H_A, \quad 0 \leq z_1 \leq 10.$$

Tā kā mainīgā koordināte x_1 neparādās Q_{1-1} aprēķina izteiksmē, Q_{1-1} visos posma šķēlumos ir nemainīgs lielums vienāds ar -30 kN.

Lieces momenta vērtību nosaka sakarība

$$M_{1-1} = H_A \cdot z_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 10.$$

Tātad šķēlumā A momenta vērtība ir nulle, bet šķēlumā C tā ir maksimāla, t.i. $M_1(C) = 30 \text{ kN} \cdot 10 \text{ m} = 300 \text{ kNm}$. Visā posma garumā lieces moments mainās pēc lineāra likuma. Epīra tiek konstruēta stieņa stieptajā pusē. Stienim AC stiepta ir kreisā puse, jo piepūles H_A iedarbības rezultātā stieņa AC gals A noliecas pa labi.

Šajā posmā vienīgais spēks, kas darbojas pa stieņa asi un, tātad, var atstāt kādu iespaidu uz asspēku, ir balsta reakcija V_A . Tā kā balsta reakcija spiež apskatāmo stieņa daļu, tā jāņem ar negatīvu zīmi. Asspēka aprēķinam iegūstam sakarību

$$N_{1-1} = -V_A, \quad 0 \leq z_1 \leq 10.$$

Tā kā mainīgā koordināte x_1 neparādās N_{1-1} aprēķina izteiksmē, N_{1-1} visos posma šķēlumos ir nemainīgs lielums vienāds ar $N_{1-1} = -61 \text{ kN}$.

Piepūles posmā CD vieglāk aprēķināt summējot ārējos spēkus pa labi no kāda šķēluma (pa kreisi – V_A , H_A , m, q; pa labi – V_B , P, q), tāpēc kā otro apskatīsim posmu BK.

2. posms (BK).

Šim rāmja posmam raksturīgs tas, ka šajā posmā vienīgā piepūle ir ass spēks N. Izdarot šķēlumu 2-2 konstatējam, ka stienis BK tiek slogots ass virzienā ar spēku $N_{2-2} = -19 \text{ kN}$. Stieņa asij perpendikulārā virzienā ārējās slodzes nav, tātad visā stieņa garumā $Q = 0$. Arī par lieces momentu varam secināt, ka $M = 0$.

3. posms (KD).

Iekšējo piepūļu izmaiņas stienī nosakām izmantojot sakarības

$$Q_{3-3} = P;$$

$$M_{3-3} = P \cdot z_3; \quad 0 \leq z_3 \leq 5;$$

$$N_{3-3} = -V_B,$$

no kurām seko: $Q_{3-3} = 30 \text{ (kN)}$; $N_{3-3} = -19 \text{ (kN)}$, $M_{4-4} = 30 \cdot z_3$.

Tātad konstatējam, ka posmā KD šķērsspēks ir konstants un pozitīvs, ass spēks negatīvs (stieņa posms DK ir spiests), bet lieces moments mainās lineāri virzienā no K uz D. Pie tam konstatējam, ka posmā KD stiepta ir stieņa labā puse.

4. posms (DC).

Konstruējot šķērsspēka Q epīru vadamies pēc definīcijas (šķērsspēks jebkurā šķēlumā ir visu uz vienu pusi no šī šķēluma perpendikulāri stieņa asij vērsto spēku summa). Šķērsspēka vērtību jebkurā stieņa DC šķēlumā, kurš atrodas attālumā z_4 no šķēluma

D, nosaka sakarība:

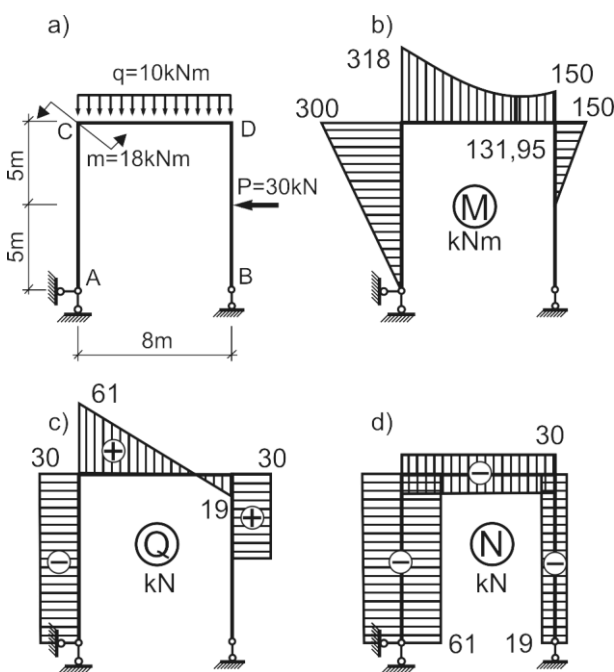
$$Q_{4-4} = -V_B + q \cdot z_4; \quad 0 \leq z_4 \leq 8.$$

Tātad Q_{4-4} epīru ierobežo slīpa taisne, kuras ordināte labajā galā (punkts D) ir -19 , kreisajā galā (punkts C) 61 . Atbilstoši diferenciālajām sakarībām, šķēlumā, kur šķērsspēku epīra krusto asi ($Q_{4-4}=0$), momentu epīrā jābūt maksimumam vai minimumam. Atrodam atbilstošo z_4^0 vērtību no nosacījuma $Q_{4-4} = -V_B + q \cdot z_4 = 0$. Iegūstam

$$z_4^0 = V_B / q = 1,9 \text{ m}.$$

Konstruējot lieces momenta epīru posmam DC, iegūstam otrās kārtas līkni atbilstoši sakarībai

$$M_{4-4} = P \cdot 3 + q \frac{z_4^2}{2} - V_B \cdot z_4; \quad 0 \leq z_4 \leq 8.$$



att. 8.7

Šī sakarība ietver sevī balsta reakcijas V_B un ārējās slodzes P un q radītās lieces momenta izmaiņas.

Slodzes P un q stiepj posma DC augšpusi, bet balsta reakcija V_B apakšpusi. Tā kā šķēlumā D ir stiepta stieņa augšpuse ($M_{4-4}=150 \text{ kNm}$) un visā stieņa garumā momenta M_{4-4} zīme nemainās ($z_4^0=1,9 \text{ m}$; $M_{4-4}=131,95 \text{ kNm}$, $z_4=8 \text{ m}$; $M_{4-4}=318 \text{ kNm}$) tad visā posmā DC lieces momentu epīrā attēlojama stieņa augšpusē.

Lai noteiktu ass spēka N vērtību, summējam visu pielikto spēku projekcijas uz horizontālu asi pa labi no šķēluma 4-4. Tā rezultātā iegūstam $N_{4-4} = -P$ un līdz ar to $N_{4-4} = -30 \text{ kN}$.

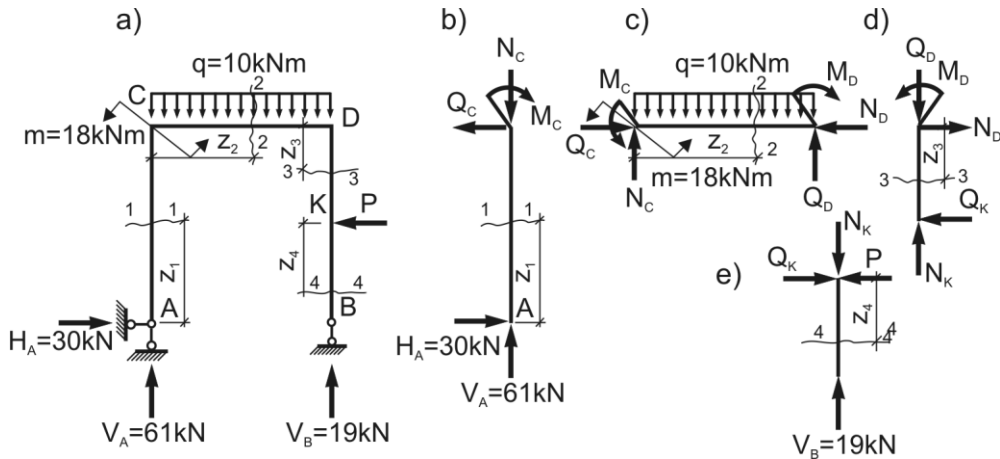
Iegūtie piepūļu aprēķina rezul-

tāti dod iespēju konstruēt attiecīgo piepūļu epīras, katram rāmja posmam. Apvienojot šīs epīras visiem rāmja posmiem, iegūstam attiecīgās piepūles epīru dotajam rāim pie dotā ārējā slogojuma. Šīs epīras parādītas attēlā 8.7.

Samērā izplatīts paņēmieni iekšējo piepūļu epīru konstruēšanai parādīts att. 8.8.

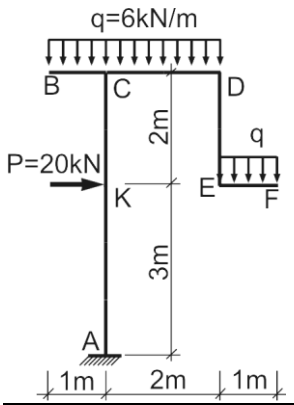
Pēc balstu reakciju noteikšanas, rāmis tiek sadalīts posmos un katram rāmja posmam piepūles tiek aprēķinātas neatkarīgi. Posmam AC noteiktās piepūļu vērtības punktā C (pie $z_1=10 \text{ m}$) tiek pieliktas posma CD punktā C kā ārējās slodzes. Piepūļu virzieni tiek mainīti uz pretējiem. Mainoties stieņu virzienam, šķērsspēks posma AC beigās izsauc asspēku stieņa CD sākumā, savukārt asspēks posma AC beigās kļūst par šķērsspēku

posma CD sākumā. Stieņa CD galam C ir pielikts moments, kuru veido ārējais moments $m = 18 \text{ kNm}$ un balsta reakcijas H_A radītais moments no iepriekšējā posma AC $M_C = 300 \text{ kNm}$. Tāpat tiek sadalīti arī pārējie posmi.



att. 8.8

Iekšējo piepūļu epīras tiek konstruētas katram posmam atsevišķi un pēc tam apvienotas kopējās iekšējo piepūļu epīrās. Šī metode ir darbietilpīgāka par iepriekš aprakstīto, jo pirms epīru konstruēšanas, jānosaka ne tikai balstu reakcijas, bet arī iekšējo piepūļu vērtības katra posma sākumā un beigās.



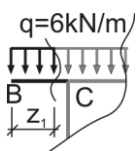
Piemērs 8.7. Uzkonstruēt piepūļu Q , M , N epīras dotajam rāmim.

Atrisinājums. Rāmja nostiprinājuma veids – iespīlējums punktā A, dod iespēju konstruēt piepūļu epīras bez iepriekšējas balstu reakciju noteikšanas. Epīras ērti konstruēt virzoties no rāmja brīvajiem galiem virzienā uz balstu (jāatzīmē, ka posmos AK un KC piepūles vienkāršāk būtu aprēķināt zinot balstu reakciju vērtības).

Epīru konstruēšanai izmantojam šķēlumu metodi, t.i., piepūles vērtība jebkurā šķēlumā ir visu attiecīgo ārējo slodžu projekciju vai momentu summa uz vienu (jebkuru) pusi no šī šķēluma.

Piepūles jānosaka sešos posmos:

Posmā BC šķērsspēka vērtība mainās lineāri no vērtības 0 punktā B līdz vērtībai $-q \cdot 1$ punktā C atbilstoši sakarībai:



$$Q_{1-1} = -qz_1, \quad 0 \leq z_1 \leq 1;$$

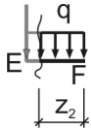
Lieces momentu nosaka sakarība:

$$M_{1-1} = qz^2/2 \text{ (stiepta augšpuse).}$$

Horizontālu slodžu nav un asspēks

$$N_{1-1} = 0.$$

Līdzīgā veidā varam konstatēt, ka posmā EF iekšējās piepūles nosaka sakarības:

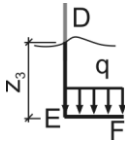


$$Q_{2-2} = qz_2; \quad 0 \leq z_2 \leq 1;$$

$$M_{2-2} = qz_2^2/2;$$

$$N_{2-2} = 0.$$

Stienī DE:

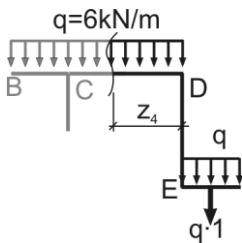


$$Q_{3-3} = 0; \quad 0 \leq z_3 \leq 2;$$

$$M_{3-3} = q \cdot 1 \cdot 0,5 \text{ (stiepta labā puse);}$$

$$N_{3-3} = q \cdot 1.$$

Stienī CD:

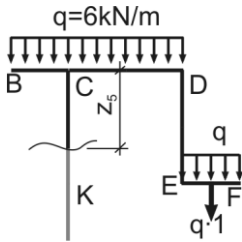


$$Q_{4-4} = q \cdot 1 + q \cdot z_4; \quad 0 \leq z_4 \leq 2;$$

$$M_{4-4} = q \cdot 1 \cdot (z_4 + 0,5) + qz_4^2/2;$$

$$N_{4-4} = 0.$$

Stieņa AC posmā CK:

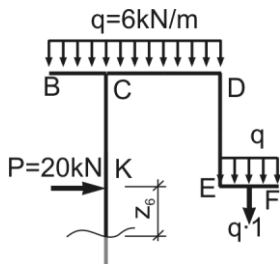


$$Q_{5-5} = 0; \quad 0 \leq z_5 \leq 2;$$

$$M_{5-5} = q \cdot 4 \cdot 1;$$

$$N_{5-5} = q \cdot 4.$$

Posmā KA:

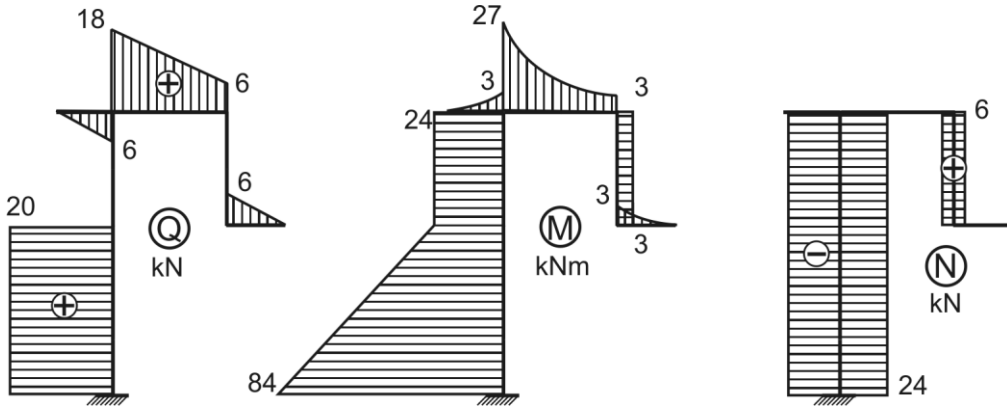


$$Q_{6-6} = P = 20 \text{ kN}; \quad 0 \leq z_6 \leq 2;$$

$$M_{5-5} = q \cdot 4 \cdot 1 + P \cdot z_6;$$

$$N_{5-5} = q \cdot 4.$$

Atliekot rāmja raksturīgajos punktos aprēķinātās piepūļu vērtības uz rāmja ass un tās savienojot ar līnijām, iegūstam sekojošas iekšējo piepūļu epīras.

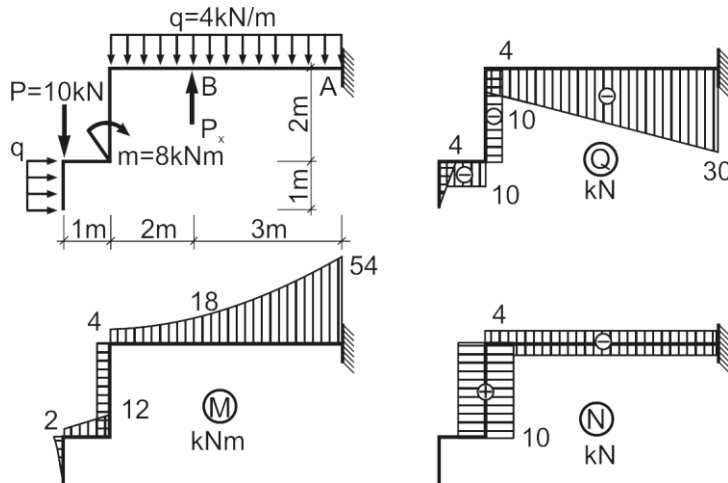


Svarīgi ņemt vērā, ka lieces momentu epīrā jebkurā mezglā jāizpildās līdzsvara nosacījumam, t.i. momentu summai mezglā jābūt nullei.

Momentu un šķērsspēku epīrās jebkurā rāmja posmā jāizpildās piepūļu diferenciālo sakarību nosacījumiem.

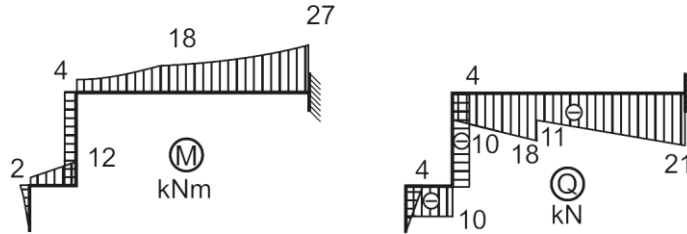
No iegūtajiem rezultātiem varam secināt, ka balstā A darbojas trīs piepūles – balsta reakcijas: vertikāli uz augšu vērsts spēks $V_A = 24$ kN, horizontāli pa kreisi vērsts spēks $H_A = 20$ kN un pretī pulksteņrādītāja kustības virzienam vērsts moments $M_A = 84$ kNm.

Piemērs 8.8. Uzkonstruēt piepūļu epīras stienim ar laužītu asi un noteikt to spēka P_x vērtību, kura dod iespēju samazināt lieces momenta vērtību iespīlējumā divas reizes.



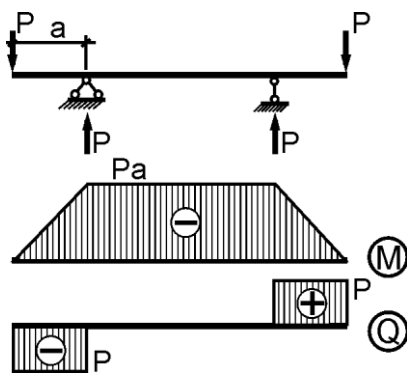
Atrisinājums. Izmantojot iepriekš izklāstīto metodiku, iegūstam epīras, kuras parādītas attēlā. Lai samazinātu maksimālo lieces momenta vērtību $M_A = 54$ kNm divas reizes, punktā B jāpieliek spēks, kurš rada balstā momenta vērtību 27 kNm. Tātad jāizpildās nosacījumam $P_x \cdot 3m = 27 \text{ kNm}$ un līdz ar to $P_x = 9$ kN.

Izmainītās lieces momentu un šķērsspēku epīras parādītas attēlā:



8.6. Normālspriegumi liektās sijās

Viendabīga materiāla stieņos stiepes un spiedes gadījumā rodas tikai normālspriegumi, kas pa stieņa šķērsriezumu sadalās vienmērīgi (tā tiek pieņemts).



att. 8.9

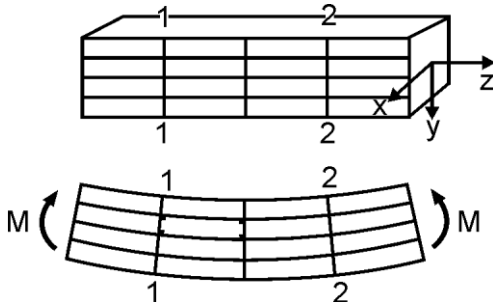
Liektās sijās šķērsslieces gadījumā (darbojas Q un M) rodas divu veidu spriegumi: normālie (ass) (izsauc lieces moments M) un tangenciālie (bīdes) (izsauc šķērsspēks Q). Svarīgi noskaidrot, kā šie spriegumi sadalās pa sijas šķērsriezumu un kā tos aprēķināt.

Lai noskaidrotu normālspriegumu sadalījumu pa sijas augstumu un aprēķinātu to lielumu, siju apskatām tīrās lieces stāvoklī, tas ir gadījumā, kad sijas šķēlumos darbojas tikai lieces moments M . Šādā stāvoklī attēlā 8.9 parādītā sija ir posmā starp balstiem: $M=Pa$, $Q=0$.

Pakļaujot tīrai liecei siju, uz kuras uzņemtais taisnstūrveida tīkls, var konstatēt sekojošas īpašības:

1. Taisnes 1-1 un 2-2 pagriežas par kādu leņķi $d\theta$ paliekot par taisnēm. Tātad ir spēkā plakano šķēlumu hipotēze – sijas šķēlumi pēc pagriešanās paliek plakani;
2. Tā kā taisnleņķa tīkls pēc deformēšanās paliek par taisnleņķa tīklu, tad bīdes spriegumus sijas šķēlumos var pieņemt par nulli;
3. Sijā lieces gadījumā var izdalīt stiepto zonu un spiesto zonu.

Sijai eksistē slānis, kurš atdala spiesto zonu no stieptās. Šo slāni sauc par **neitrālo slāni**. Šī slāņa garums nav mainījies, tas ir tikai izliecies. Neitrālā slāņa krustošanās līniju ar šķērsriezuma plakni sauc par **neitrālo asi**. Sijas spriegumstāvokļa noteikšanai tiks izmantotas sekojošas hipotēzes:



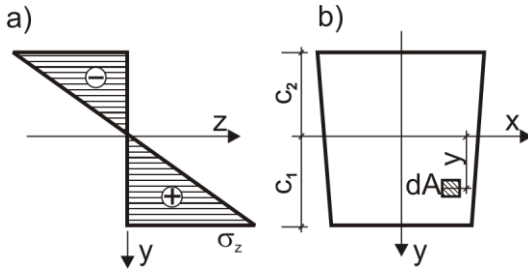
att. 8.10

1. Materiāla fizikāli – mehāniskās īpašības visos sijas punktos un virzienos ir vienādas (materiāls ir izotropš);
2. Garenšķiedras neizdara spiedienu uz blakus esošajām;
3. Normālie spriegumi ir proporcionāli deformācijām (ir spēkā

144

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = \alpha Ey. \quad (8.6)$$

Šie spriegumi ir proporcionāli attiecīgajām deformācijām un tātad mainās atkarībā no y vērtības. Normālspriegumu sadalījums pa sijas augstumu parādīts att. 8.12a.



att. 8.12

Tātad sijas virsējā daļā (virs neitrālās plaknes) normālspriegumi ir negatīvi un sija tiek spiesta, bet apakšējā daļā sija tiek stiepta.

Uz jebkuru sijas šķēluma elementārlaukumiņu dA (att. 8.12b) darbojas elementārs ass spēks $dN = \sigma_z dA$. Tā kā ass spēks sijai nav pielikts, visu šādu elementārspēku summai lieces gadījumā jābūt vienādam ar nulli:

$$\int_A dN = \int_A \sigma_z dA = \int_A \alpha Ey dA = 0.$$

Tā kā liekums α tīrās lieces gadījumā un elastības modulis E ir konstantes, tad no pēdējās sakarības iegūstam

$$\int_A y dA = 0. \quad (8.7)$$

Šis integrālis nosaka sijas šķēluma laukuma statisko momentu pret neitrālo asi x un sakarība (8.7) rāda, ka tam jābūt vienādam ar nulli. Secinām, ka neitrālā ass iet caur šķēluma smaguma centru. Šī īpašība var tikt izmantota patvaļīgas formas sijas smaguma centra koordinātu noteikšanai.

Katrs elementārspēks dN attiecībā pret neitrālo asi rada elementārmomentu $dM = y \cdot dN = y \sigma_z dA$. Visu šo elementārmomentu summai pa visu šķēluma laukumu A jābūt vienādam ar sijas lieces momentu M . Tātad

$$M = \int_A \sigma_z y dA = \alpha E \int_A y^2 dA = \alpha EI. \quad (8.8)$$

Integrālis $I = \int_F y^2 dA$ ir sijas šķēluma inerces moments pret asi x , t.i. – neitrālo asi.

No sakarības (8.6) varam izteikt sijas liekumu:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (8.9)$$

Tātad liektas sijas ass liekums ir tieši proporcionāls lieces momentam M un apgriezti proporcionāls lielumam EI , ko sauc par sijas **lieces stingumu**.

Izmantojot sakarības (8.6) un (8.9) iegūstam izteiksmi normālspriegumu noteikšanai liecē

$$\sigma_z = \frac{M \cdot y}{I}. \quad (8.10)$$

Maksimālie stiepes un spiedes spriegumi atbilst maksimālām attāluma y vērtībām no neitrālās ass. Apzīmējot šīs maksimālās vērtības ar c_1 un c_2 (att. 8.12-b) no sakarības (8.10) iegūstam

$$\begin{aligned}\sigma_{z,\max} &= \frac{Mc_1}{I} = \frac{M}{W_1}; \\ \sigma_{z,\min} &= -\frac{Mc_2}{I} = -\frac{M}{W_2}.\end{aligned}\tag{8.11}$$

Parametri $W_1 = I/c_1$ un $W_2 = I/c_2$ ir sijas šķērsriezuma pretestības momenti liecei.

Sijām, kuru šķērsriezums pret y asi ir simetriska figūra izpildās nosacījums $c_1 = c_2$ un ekstremālie stiepes un spiedes spriegumi ir vienādi.

Ja sijas šķērsriezums ir taisnstūris ar augstumu h un platumu b , galveno inerces un pretestības momentu vērtības nosaka sakarības

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad W = \frac{bh^2}{6},$$

bet, ja šķērsšķēlums ir pilns aplis, tad

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad W = \frac{\pi d^3}{32}.$$

No ekonomiskuma viedokļa aktuāla problēma ir atrast izdevīgāko liektas sijas šķērsriezuma formu.

Pretestības momenta izteiksmi taisnstūra šķēluma gadījumā varam uzrakstīt sekojošā veidā

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0,167 \cdot A \cdot h, \tag{8.12}$$

kur $A = bh$ – šķēluma laukums.

Taisnstūra šķēlums ar fiksētu šķērsriezuma laukumu A kļūst arvien izdevīgāks pieaugot augstumam h . Diemžēl h pieaugumam eksistē robeža sakarā ar sijas noturības zudumu šķērsā virzienā, ja tā kļūst pārmērīgi plāna. Tad sabrukuma cēlonis vairs nav maksimālie ass spriegumi, bet gan lieces plakanās formas noturības zudums (sāniskā izkļaušanās).

Sijām ar riņķveida šķērsriezuma formu ir spēkā

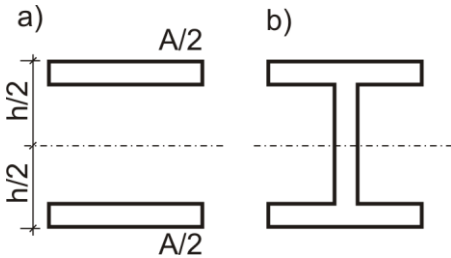
$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{Ad}{8} = 0,125A \cdot d. \tag{8.13}$$

Gadījumā, ja riņķa un kvadrātveida šķēlumu laukumi ir vienādi, tad $h = d\sqrt{\pi}/2$ un saskaņā ar izteiksmi (8.12) kvadrātveida šķērsriezumam iegūstam

$$W = 0,148A \cdot d. \tag{8.14}$$

Salīdzinot izteiksmes (8.13) un (8.14), konstatējam, ka kvadrātveida sijas ir ekonomiskākas par apaļstieņa sijām, jo to pretestības momenti pie vienāda materiāla patēriņa ir

lielāki un līdz ar to maksimālie spriegumi mazāki. Tātad sijas ar kvadrātveida šķēsgriezumu



att. 8.13

ass (sk. att. 8.13a). Tad iegūtu

$$I = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{Ah^2}{4}, \quad W = 0,5A \cdot h; \quad (8.15)$$

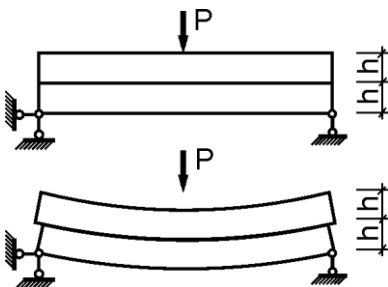
Praksē šim ideālajam stāvoklim var tuvojies, izmantojot šķēlumus ar platiem plauktiņiem (att. 8.13b). Tā kā daļa no materiāla jāizmanto sienīņai, tad nosacījums (8.15) nekad nevar tikt realizēts. Standarta dubult-T profila šķēlumiem ir spēkā sakarība

$$W \approx 0,35A \cdot h.$$

Šī sakarība norāda, ka dubult-T profils divas reizes ekonomiskāks par taisnstūra šķēlumu ar analoģu augstumu h . Dubult-T profila priekšrocība ir arī tā, ka tiek nodrošināta sāniskā noturība.

8.7. Bīdes spriegumu aprēķins

Konstrukciju aprēķinu pieredze rāda, ka sijas lieces gadījumā katrā šķērsšķēlumā parasti rodas kā lieces moments M , tā arī šķērsspēks Q . Apskatīsim siju ar taisnstūra veida $h \times b$ šķēsgriezumu. Dabīgi ir pieņemt, ka bīdes spriegumi šādā sijā ir paralēli šķērsspēkam Q , tātad darbojas sijas šķērsšķēlumā. Kā otru pieņēmumu izmantosim nosacījumu, ka bīdes spriegumi ir vienmērīgi izkliedēti visā sijas platumā.



att. 8.14

Jāatceras, ka bīdes spriegumiem ir spēkā to pāralikums, tas nozīmē, ja uz elementa vienas skaldnes darbojas bīdes spriegumi, tad tādi paši bīdes spriegumi darbojas arī tai perpendikulārā plaknē. Tādā veidā liektā sijā veidosies garenbīdes spriegumi neitrālajai plaknei paralēlās plaknēs un šķērsbīdes spriegumi šķērsšķēluma plaknē. Uz sijas ārējām plaknēm bīdes spriegumu nav. Tātad arī šķērsšķēlumos pie sijas ārējām malām to nav.

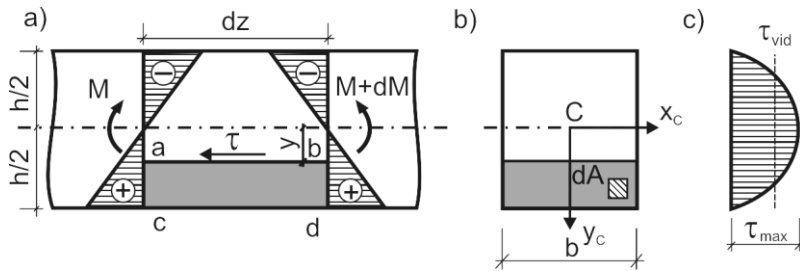
Garenbīdes spriegumu būtību uzskatāmi demonstrē sekojošs eksperiments. Liecot ar koncentrētu spēku P divas vienādas brīvi balstītas sijas, tās deformējas nobīdoties viena pret otru, kā tas parādīts att. 8.14.

Katrā no sijām ir stieptās un spiestās šķiedras. Ja divu neatkarīgo siju vietā liecam vie-

nu siju ar dubultu augstumu $2h$, tad neitrālā plaknē jārodas bīdes spriegumiem pēc lieluma tādiem, lai tiktu aizkavēta (nepieļauta) zīmējumā parādītā nobīde. Novērstās nobīdes dēļ, sija kļuvusi stingrāka un izturīgāka nekā divas neatkarīgas sijas ar augstumu h .

Horizontālos bīdes spriegumus nosaka spriegumu līdzsvars uz izgriezta elementa $abcd$ virsmām (att. 8.15). Elements raksturīgs ar to, ka tā garums ir dz , apakšējā mala sakrīt ar sijas ārmaļu, bet augšējā atrodas attālumā y no neitrālās plaknes. Uz šīs malas darbojas bīdes spriegums τ . Uz elementa galiem darbojas lieces izraisītie normālspriegumi. Galu plaknēs darbojas arī vertikālie bīdes spriegumi τ , bet to projekcija uz z asi ir nulle. Ja lieces momenti šķēlumos ac un bd ir vienādi, t.i., ja sija ir tīrās lieces stāvoklī, tad normālspriegumi σ_z uz šīm virsmām ac un bd arī būs vienādi, elements atradīsies līdzsvara stāvoklī un bīdes spriegumu τ nebūs.

Vispārīgā gadījumā lieces moments sijas ass virzienā ir mainīgs un pieņemsim, ka attālumā dz tas izmainās par lielumu dM .



att. 8.15

Šķēlumā ac uz elementāru laukumu dA darbojas ass spēks

$$\sigma_z dA = \frac{My}{I} dA. \quad (8.16)$$

Visu šo elementāro spēku summa uz skaldnes ac ir

$$\int_y^{h/2} \frac{My}{I} dA.$$

Analogi uz skaldnes bd summārais ass spēks ir

$$\int_y^{h/2} \frac{M + dM}{I} y dA.$$

Uz elementa augšējās skaldnes ab darbojas horizontāls spēks, kuru izteiksim sekojošā veidā $\tau \cdot b \cdot dz$.

Visu uz elementu darbojošos spēku projekcijām uz z asi jābūt līdzsvarā. Tātad

$$-\tau \cdot b \cdot dz - \int_y^{h/2} \frac{M}{I} y dA + \int_y^{h/2} \frac{M + dM}{I} y dA = 0.$$

No šīs sakarības iegūstam

$$\tau = \frac{dM}{dz} \frac{1}{Ib} \int_y^{h/2} y dA. \quad (8.17)$$

Integrālis izsaka att. 8.15 ieņotā elementa $abcd$ statisko momentu pret neitrālo asi x_C . Citiem vārdiem sakot, šis integrālis izsaka šķērssšķeluma laukuma daļas, kura atrodas zemāk par koordināti y , statisko momentu, tas ir, nošķeltās daļas statisko momentu. Apzīmējot statisko momentu ar S un ņemot vērā, ka lieces momenta atvasinājums pēc koordinātes ir šķērsspēks Q , izteiksmi (8.17) var pārrakstīt sekojošā veidā:

$$\tau = \frac{QS_x^{no\check{s}}}{Ib}. \quad (8.18)$$

Svarīgi uzsvērt, ka ir integrālis ar mainīgu apakšējo robežu, tātad mainīgs lielums pa sijas augstumu. Šajā izteiksmē lielums b ir šķērsriezuma šķērsizmērs attālumā y no neitrālās ass, kur tiek rēķināts bīdes spriegums (vispārīgā gadījumā b var mainīties pa sijas augstumu).

Taisnstūrveida sijas šķēlumam parametri Q , I un b ir konstanti lielumi, tādēļ bīdes sprieguma τ izmaiņa pa sijas augstumu ir proporcionāla statiskā momenta $S_x^{no\check{s}}$ izmaiņai atkarībā no koordinātes y .

Att. 8.15-b sijas taisnstūra šķēluma nošķeltās daļas statiskais moments pret x_C ir

$$S_x^{no\check{s}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left(\frac{h/2 + y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (8.19)$$

Ievietojot sakarību (8.19) formulā (8.18) iegūstam

$$\tau = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (8.20)$$

Saskaņā ar izteiksmi (8.20) bīdes spriegumu τ izmaiņa pa sijas augstumu y atbilst paraboliskai sakarībai. Taisnstūrveida sijas gadījumā tātad

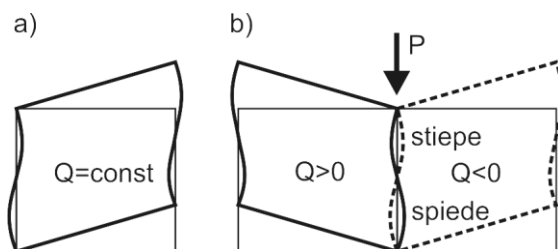
$$\tau = 0, \text{ ja } y = \pm \frac{h}{2}$$

un

$$\tau_{\max} = \frac{Qh^2}{8I} = \frac{3Q}{2A}, \text{ ja } y = 0.$$

Tātad max bīdes spriegums ir uz neitrālās plaknes un tas pārsniedz vidējā sprieguma vērtību $\tau_{vid} = Q/A$ par 50 %. Spriegumu τ izmaiņas forma parādīta att. 8.15-c.

Izteiksmes (8.10) un (8.11) normālspriegumu aprēķinam tīrās lieces gadījumā tika iegūtas pieņemot, ka sijas šķērsriezuma laukums nedeformējas (att. 8.10), bet tikai pagriežas ap neitrālo asi. Tā kā šķērsbieces gadījumā ($Q \neq 0$) spriegumi τ pa sijas augstumu y mainās pēc paraboliska likuma, tad līdzīgi, jāmainās arī atbilstošajām bīdes deformācijām. Līdz ar to sijas šķērssšķelumi, kuri sākumā bija plakani, izliecas, pie kam to deformācijas nav vienādas, bet pieaug virzoties no sijas virsmām uz neitrālo plakni.

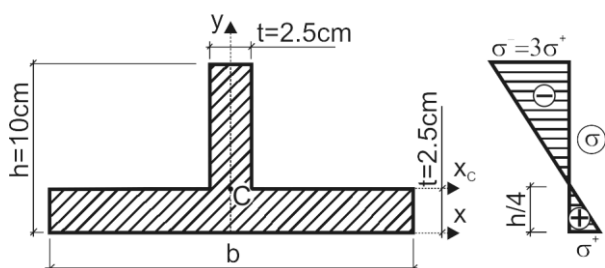


att. 8.16

šanas vietās). Att. 8.16b redzam, ka, šķēlumam zem spēka paliekot plaknam, bīdes deformāciju izsauktie normālspriegumi samazina lieces momenta radītos normālspriegumus gan stieptajā, gan spiestajā zonā. Maksimālās normālspriegumu vērtības uz ārējām virsmām paliek nemainīgas.

Precīzāki pētījumi rāda, ka plakano šķēlumu izliekšanās bīdes dēļ būtiski neietekmē garendeformācijas kā koncentrēta, tā arī izkliedēta slodzes gadījumos. Tātad šķērslieces gadījumā visai pamatoti normālspriegumu noteikšanai var izmantot jau iepriekš iegūtās sakarības tīrai liecei (8.10) un (8.11).

Piemērs 8.9. Noteikt to T veida profila plauktiņa platumu b , kurš nodrošina, ka maksimālais stiepes spriegums sastāda $1/3$ no maksimālā spiedes sprieguma. Sijas augstums $h = 10$ cm, sieniņas un plauktiņa biezumi $t = 2,5$ cm.



Atrisinājums. Uzdevuma nosacījums par spriegumu attiecību

$\sigma^- / \sigma^+ = \frac{1}{3}$ izpildīsies gadījumā, ja šķērsgriezuma smaguma centrs atradīsies attālumā $h/4$.

Pēc definīcijas

$$y_c = \frac{S_x}{A}, \quad \text{bet}$$

$$S_x = t \cdot (h - t) \cdot \left(h - \frac{h - t}{2} \right) + b \cdot t \cdot \frac{t}{2}; \quad A = bt + (h - t) \cdot t.$$

Tātad atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ir spēkā vienādojums:

$$\frac{\frac{t}{2}(h^2 - t^2 + bt)}{t(b + h - t)} = \frac{h}{4}.$$

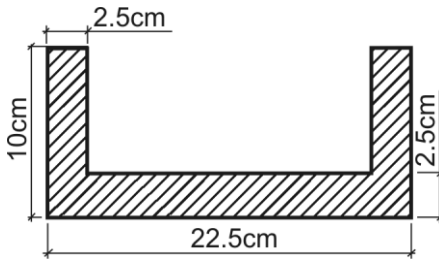
Atrisinot šo vienādojumu iegūstam

$$b = t + \frac{h^2}{h - 2t}.$$

Iespējams arī cits risinājuma variants.

Tā kā figūras smaguma centra C atrašana ir zināma no uzdevuma nosacījumiem, tad, izmantojot īpašību, ka figūras statiskais moments pret centrālo asi ir vienāds ar nulli, varam secināt, ka figūras augšējās daļas (virs x_c ass) un figūras apakšējās daļas (zem x_c ass) statiskajiem momentiem pret šo asi pēc absolūtās vērtības jābūt vienādiem. Tātad $b \cdot t \cdot \frac{t}{2} = t(h-t) \frac{h-t}{2}$ un līdz ar to $b = \frac{(h-t)^2}{t}$.

Tātad T profila plauktiņa platumam jābūt



$$b = 2,5 + \frac{10^2}{10 - 2 \cdot 2,5} = 22,5 \text{ cm}.$$

Uzdevums 8.3. Noskaidrot kāda būs σ^- / σ^+ attiecība, ja tiks liekta U veida sija ar attēlā dotajiem izmēriem.

8.8. Stiprības aprēķini liecē

1. Stiprības pārbaudes aprēķins pēc normālspriegumiem

Lai nodrošinātu sijas stiprību nepieciešams, lai lielākie stiepes un spiedes spriegumi sijas bīstamajā šķēlumā, tas ir šķēlumā ar maksimālo lieces momenta vērtību, nepārsniegtu atbilstošās pieļaujamo spriegumu vērtības.

Trausliem materiāliem, kuru īpašības stiepē un spiedē būtiski atšķiras ($[\sigma_{sp}]/[\sigma_{st}] \approx 3 \div 5$) ir lietderīgi lietot sijas ar nesimetriskiem pret neitrālo asi šķēļumiem. Šajos gadījumos jālieto divi stiprības nosacījumi:

a) pēc lielākajiem stiepes spriegumiem

$$\max \sigma_{st} = \frac{M_{\max} h_{st}}{I_x} = \frac{M_{\max}}{W_x^{st}} \leq [\sigma_{st}],$$

b) pēc lielākajiem spiedes spriegumiem

$$\max \sigma_{sp} = \frac{M_{\max} h_{sp}}{I_x} = \frac{M_{\max}}{W_x^{sp}} \leq [\sigma_{sp}],$$

kur:

h_{st}, h_{sp} – maksimālie attālumi šķēlumā no neitrālās ass stieptās un spiestās zonas virzienā;

W_x^{st}, W_x^{sp} – stieptās un spiestās daļas pretestības momenti.

Plastiskiem materiāliem, kuru īpašības stiepē un spiedē būtiski neatšķiras, parasti lieto sijas ar simetriskiem pret neitrālo asi šķēļumiem un šajā gadījumā ir jāpārbauda tikai viens stiprības nosacījums:

$$\max \sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

2. Dimensionēšanas aprēķins.

Lai noteiktu nepieciešamos sijas šķēsgriezuma izmērus izmanto sakarību (trausliem materiāliem divas sakarības):

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

Pie zināmas materiāla izvēles ($[\sigma]$) stiprība būs nodrošināta sijām, kuru ģeometriskie izmēri atbilst vērtībai W_x . Ir iespējamās dažādas materiālu, šķēsgriezuma izmēru un to formu kombinācijas.

3. Pieļaujamās slodzes noteikšanas aprēķins.

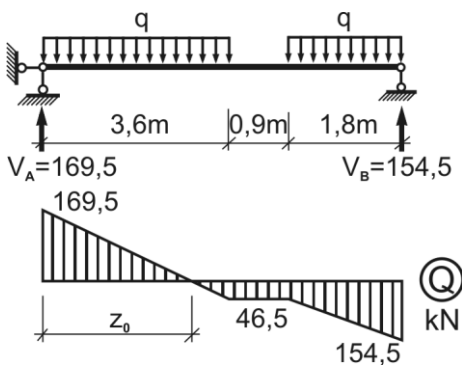
Pieļaujamais lieces moments nosakāms no sakarības:

$$[M] \leq W_x \cdot [\sigma].$$

Šis kritērijs, pie zināmām materiāla un šķēsgriezuma īpašībām, dod iespēju piemēklēt to ārējo slodžu izvietojuma shēmu un vērtības, kuru izraisītā maksimālā lieces momenta vērtība nepārsniedz pieļaujamo vērtību $[M]$.

Piemērs 8.10. Noteikt nepieciešamo lieces pretestības momentu attēlā dotajai sijai, ja $q = 60 \text{ kN/m}$, bet materiāla pieļaujamais spriegums $[\sigma] = 110 \text{ MPa}$, neievērojot sijas pašsvaru. Piemēklēt no sortimentu tabulas dubult-T profila siju, ņemot vērā sijas pašsvaru.

Atrisinājums. Balstu reakcijas ir $V_A = 169,5 \text{ kN}$, $V_B = 154,5 \text{ kN}$. Lai noteiktu šķēlumu, kurā ir max lieces moments, lietderīgi uzkonstruēt šķērsspēka epīru.



Koordināti z_0 šķēlumu, kurā šķērsspēks ir nulle un lieces momentam ir ekstremāla vērtība, nosaka no sakarības

$$V_A - qz = 0.$$

Iegūstam vērtību $z_0 = V_A/q = 2,82 \text{ m}$. Šai attālumā no balsta A lieces momentam ir max vērtība un tā ir

$$M_{\max} = V_A \cdot z_0 - \frac{qz_0^2}{2} = 239 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

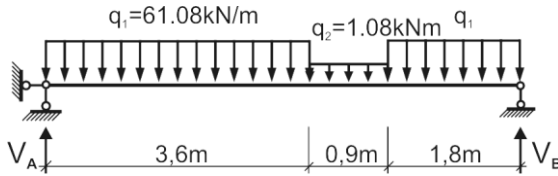
Nepieciešamo pretestības momentu liecei

nosaka sakarība

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

kurā ievietojot uzdevuma noteikumiem atbilstošās skaitliskās vērtības, iegūstam

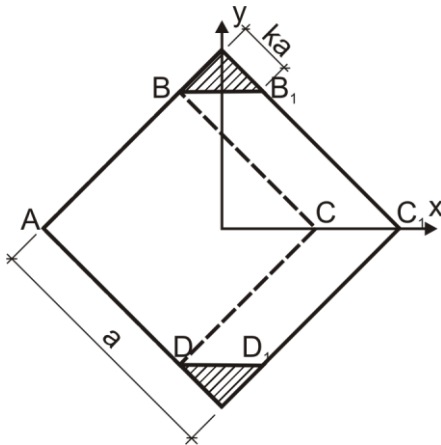
$$W = \frac{239 \text{ kNm}}{110 \text{ MPa}} = \frac{239 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{110 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2170 \text{ cm}^3.$$



Pēc sortimenta tabulām atrodam, ka vieglākais dubult-T profils ar nepieciešamo pretestības momentu ir Nr. 60. Šī profila sijas pašsvars ir 1,08 kN/m. Pievienojot to sijas slodzei, iegūstam attēlā redzamo sijas slodzes shēmu. Veicot analogus aprēķinus kā iepriekšējā slodzes gadījumā, nonākam pie rezultāta, ka max lieces moments palielinājies līdz 244,7 kNm. Līdz ar to nepieciešamais pretestības moments liecei palielināsies uz

$$W = \frac{244.7 \cdot 10^3 \text{ Nm}}{110 \cdot 10^6 \text{ Pa}} = 2225 \text{ cm}^3.$$

Par cik izvēlēta profila Nr. 60 pretestības moments liecē ir 2560 cm³ (sk. tabulā), tad sija kopējo slodzi iztur un paaugstināt profila Nr. nevajag. Pretējā gadījumā vajadzētu izvēlēties jaunu profila numuru un aprēķinu atkārtot.



Piemērs 8.11. Kvadrātveida sija tiek liekta plaknē, kurā atrodas kvadrāta diagonāle. Parādīt, kā samazinās max normālspriegumi, ja tiek nozāģēti zīmējumā iesvītrotie stūri.

Atrisinājums. Pilnā kvadrātveida šķēluma inerces moments un pretestības moments pret x asi ir

$$I_1 = \frac{a^4}{12}; \quad W_1 = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}.$$

Nozāģējot stūrus katras malas garums samazinās par $k \cdot a$ (k patvaļīgs skaitlis no 0 līdz 1). Jaunā šķērsriezuma laukums sastāv no kvadrāta ar malu garumu $a(1-k)$ un diviem paralelogramiem BB_1CC_1 un CC_1DD_1 . Šāda samazināta laukuma inerces moments pret asi x ir:

$$I_2 = \frac{a^4(1-k)^4}{12} + \frac{2ka\sqrt{2}}{3} \left[\frac{2(1-k)}{\sqrt{2}} \right]^3 = \frac{a^4(1-k)^3(1+3k)}{12}$$

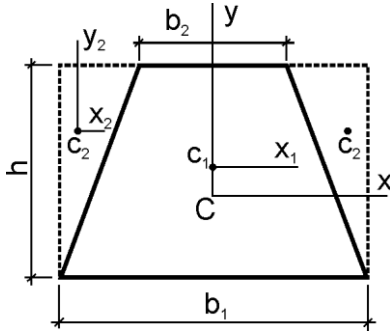
bet lieces pretestības moments

$$W_2 = \frac{I_2 \sqrt{2}}{a(1-k)} = \frac{\sqrt{2}a^3(1-k)^2(1+3k)}{12}$$

Maksimālā inerces momenta I_2 vērtība būs gadījumā, ja $k = 1/9$. Ievietojot šo vērtību W_2 izteiksmē, iegūstam $W_{\max} = 1,053W_1$. Esam ieguvuši, ka nozāģējot stūrus lieces pretestības moments ir palielinājies par 5%. tātad par 5 % samazinās maksimālie normālspriegumi. Šādu rezultātu viegli izprast ņemot vērā, ka pretestības moments ir inerces momenta dalījums ar šķērsriezuma augstuma pusi. Nozāģējot stūrus inerces moments relatīvi mazāk samazinājas par šķēluma augstumu un līdz ar to tiešām pretestī-

bas moments pieaug.

Piemērs 8.12. Atrast to trapeces formu, kura nodrošina sijas vienlaicīgu stiprības zudumu stiepē un spiedē, ja zinām, ka materiāla $[\sigma^-] = 1,5[\sigma^+]$.



Atrisinājums. Tā kā $\sigma^+ = \frac{M}{W_+}$, bet $\sigma^- = \frac{M}{W_-}$,

tad jāizpildās nosacījumam

$$[\sigma^+] \cdot W_+ = [\sigma^-] \cdot W_-.$$

Tātad iegūstam sakarību

$$[\sigma^+] \cdot W_+ = 1,5[\sigma^+] \cdot W_-$$

un līdz ar to vienādas lieces stiprības nosacījumu stiepē un spiedē

$$\frac{W_+}{W_-} = 1,5.$$

Tā kā pretestības momenti W_+ un W_- atšķiras ar to cik liels ir attālums no šķēluma neitrālās ass līdz sijas maksimāli stieptajai un spiestajai šķiedrai, tad uzdevums reducējas uz tādu trapeces šķēluma atrašanu, kura smaguma centrs atrastos no stieptās un spiestās šķiedras attālumos

$$y_- = 1,5y_+$$

Ja pieņemam, ka trapeces apakšējais pamats ir stiepts, tad

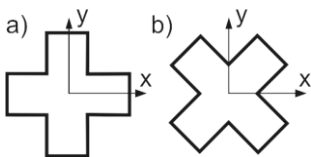
$$y_+ = y_c = \frac{h}{3} \left[1 + \frac{b_2/b_1}{1 + b_2/b_1} \right].$$

Tā kā $y_+ + y_- = h$, tad $h = 2,5y_+$ un no sakarības

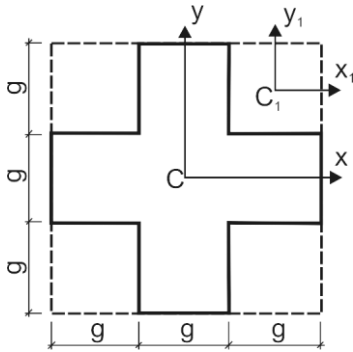
$$h = \frac{2,5h}{3} \left[1 + \frac{b_2/b_1}{1 + b_2/b_1} \right] \text{ jānosaka trapeces pamatu attiecība } b_2/b_1.$$

Šī attiecība $b_2/b_1 = 1/4$.

Tātad sija spiedē un stiepē sabruks vienlaicīgi, ja sijas šķērsgriezumu veidos trapece ar pamatu attiecību viens pret četri, bet trapeces augstumu noteiks pieļaujamo spriegumu vērtības un ārējās slodzes izraisītais maksimālais lieces moments.



Piemērs 8.13. Noteikt aksiālos pretestības momentus sijai ar šķērsgriezumiem a un b un noteikt, kura novietojuma gadījumā sija iztur lielāku lieces slodzi.

**Atrisinājums.**

a. variants. Koordinātu asis x , y ir figūras centrālās asis. Šajās asīs kvadrāta ar malas garumiem $3g$ inerces moments ir:

$$I_{kvx} = \frac{(3g)^4}{12} = 6,75g^4.$$

Analogi kvadrāta (tukšā) ar malu garumu g , inerces moments attiecībā pret kvadrāta centrālo asi x_1 ir

$$I_{x1} = \frac{g^4}{12} = 0,08g^4.$$

Attiecībā pret x asi šīs figūras inerces momenta vērtību nosakām izmantojot asu pārbīdes sakarību $I_x = I_{x1} + a^2 \cdot A$ un ņemot vērā, ka $a = g$, $A = g^2$.

Tātad kvadrāta ar smaguma centru punktā C_1 inerces moments attiecībā pret dotās figūras centrālo asi ir

$$I_{1x} = 0,08g^4 + g^2 \cdot g^2 = 1,08g^4.$$

Ņemot vērā, ka šādu „tukšo” kvadrātu skaits ir 4, un tie visi atrodas vienādā attālumā no centrālās ass x , nosakām dotās figūras inerces momentu, izmantojot sakarību

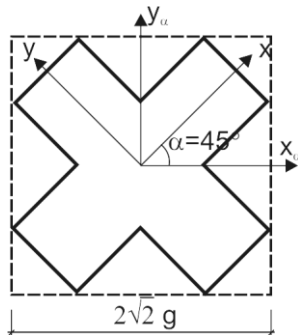
$$I_x^{(a)} = I_{kvx} - 4I_{1x}.$$

Rezultātā iegūstam a.variantā izvietotās figūras inerces momentu attiecībā pret tās centrālo asi

$$I_x^{(a)} = 6,75g^4 - 4 \cdot 1,08g^4 = 2,43g^4.$$

Saskaņā ar definīciju, dotās figūras pretestības momentu nosaka sakarība

$$W_x^{(a)} = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{2,43g^4}{1,5g} = 1,62g^3.$$



b. variants. Koordinātu asis x_α , y_α ir figūras centrālās asis. Dotās figūras pretestības momentu pret šīm asīm varam noteikt rīkojoties analogi kā iepriekšējā variantā, t.i., nosakot lielā kvadrāta ar malas garumu $2\sqrt{2}g$ inerces momentu un atsevišķo „tukšo” trīsstūru inerces momentus. Iesākām lasītājam veikt šādu aprēķinu un iegūt pretestības momenta vērtību dotajai figūrai pret asi x_α . Tomēr šāds aprēķins būs visai darbietilpīgs un neracionāls.

Tā kā **b** variants ir **a** varianta speciāls gadījums, kad koordinātu asis ir pagrieztas par leņķi $\alpha = 45^\circ$, varam izmantot asu pagriešanas sakarības figūras inerces momenta noteikšanai pagrieztajās asīs. Saskaņā ar sakarību (6.15) un ņemot vērā, ka $I_x = I_y$, bet $I_{xy} = 0$ (asis x un y ir figūras simetrijas asis), iegūstam

$$I_{x\alpha} = I_x \cos^2 45^\circ + I_x \sin^2 45^\circ = I_x.$$

Tātad figūras inerces momenti pret asīm x un x_α ir vienādi, bet atšķirīgi ir šķeluma attālkā punkta attālumi līdz atbilstošajām centrālajām asīm. Otrā varianta gadījumā

$$y_{\max} = \frac{2\sqrt{2}}{2} g \approx 1,41g.$$

Līdz ar to

$$W_{x\alpha} = \frac{I_{x\alpha}}{1,41g} = \frac{2,43g^4}{1,41g} \approx 1,72g^3$$

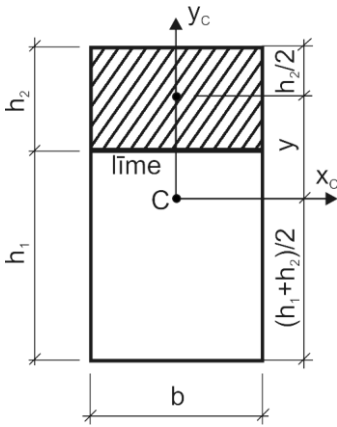
Esam konstatējuši, ka otrā varianta gadījumā aksiālais pretestības moments ir 1,06 reizes lielāks par aksiālo pretestības momentu pirmajā variantā. Tātad varam izdarīt secinājumu, ka attiecībā uz normālspriegumiem izdevīgāks ir otrā veida liektas sijas novietojuma variants, jo šai gadījumā 1,06 reizes samazinās maksimālā normālsprieguma vērtība, vai arī otrā veida sija nes slodzi, kura veido 1,06 reizes lielāku maksimālo lieces momentu vērtību.

4. Stiprības pārbaude uz bīdes spriegumiem

Tomēr šķērsās lieces gadījumā, kad sijā veidojas iekšējās piepūles M un Q , sijas stiprības novērtēšanai nepietiek ar stiprības pārbaudi pēc maksimāliem normālspriegumiem $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, bet nepieciešams veikt arī sijas materiāla stiprības pārbaudi uz bīdes spriegumiem:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}^*}{Ib} \leq [\tau] \quad (8.21)$$

Taisnstūra veida sijas gadījumā sijas platums b ir konstants, bet $S_{\max}^*$ ir augšējās (vai apakšējās) sijas šķeluma daļas statistais moments **pret neitrālo asi x_c** . Cita veida šķērsgriezumu gadījumos atšķelto daļu formas var būt atšķirīgas un tādā gadījumā $S_{\max}^*$ noteikšanai vēlams izvēlēties ērtāko. Parametra b vērtība šais gadījumos atbilst neitrālās ass līmenim.



att. 8.17

Līdzīgu bīdes stiprības pārbaudes sakarību iegūstam jebkuram patvaļīgi fiksētam sijas slānim. Bieži vien tas nepieciešams līmētas struktūras sijām, kurām jānovērtē līmes kārtas izturība konkrēta slodzes gadījumos. Tā, piemēram, taisnstūra šķērsgriezuma sijai, kura veidota no diviem salīmētiem slāņiem (att. 8.17) bīdes spriegumus līmes kārtā nosaka sakarība

$$\tau_{\lim} = \frac{Q_{\max} S_{\text{atsk}}^*}{Ib_{\lim}},$$

kur S_{atsk}^* ir virs (vai arī zem) līmes kārtas izvietotās figūras statistais moments pret nei-

trālo asi x_c . Konkrētajā gadījumā $S_{atsk}^* = bh_2 \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{h_2}{2} \right) = b \frac{h_2 h_1}{2}$.

Jāņem vērā, ka gadījumā, ja līmes kārtas platums atšķiras no sijas platuma b , tad $\tau_{līm}$ sakarībā jāizmanto līmes kārtas platums $b_{līm}$. Līmētās šuves izturību raksturo normēts (uzdots) parametrs $[\tau_{līm}]$ ar kuru tad arī jāsalīdzina noteiktā bīdes sprieguma $\tau_{līm}$ vērtība.

Sakarības (8.10) un (8.18) dod iespēju noteikt normālspriegumus σ_z sijas ass virzienā un tangenciālos (bīdes) spriegumus τ_{yz} jebkurā sijas punktā, ja zināmas lieces momentu un šķērsspēku epīras. Kā jau iepriekš konstatējām, maksimālās normālspriegumu vērtības veidojas uz sijas augšējās un apakšējās virsmas, bet tangenciālo spriegumu maksimālās vērtības parasti uz neitrālās ass. Nosakot sijas izmērus, kuri nodrošina sijas izturību, parasti izmanto tieši šīs ekstremālās spriegumu vērtības.

Tomēr eksistē gadījumi, kuros ir nepieciešama detalizētāka sijas spriegumstāvokļa analīze. Jebkurā punktā, kurš atrodas starp sijas neitrālo asi un ārējo virsmu, veidojas divu spriegumu σ_z un τ_{yz} vienlaicīga iedarbība. Kā jau tika parādīts, šo spriegumu vērtības pa sijas augstumu mainās.

Izmantojot asu pagriešanas formulas (skat. 11. nodaļu) varam noteikt to asu orientāciju, kurā uz elementārlaukumiņa skaldnēm darbojas tikai normālspriegumi. Šos spriegumus sauc par **galvenajiem spriegumiem**.

Stiprības pārbaudē uz normālspriegumiem svarīgi zināt maksimālo normālspriegumu vērtību. Viendabīgas taisnstūra šķērsriezuma sijas gadījumā, maksimālā normālsprieguma vērtība būs tā, kura atbilstoši sakarībai (8.11) veidojas uz sijas ārējām virsmām, bet gadījumos, kad šķērsriezuma forma ir atšķirīga, var veidoties situācija, ka maksimālā normālsprieguma vērtība tiek sasniegta no virsmām attālinātā punktā. Tā, piemēram, dubult-T veida profilam plauktu savienojuma vietās ar sienīņu var veidoties galvenā sprieguma vērtība, kura ir lielāka par sprieguma vērtību uz sijas virsmas.

Tādēļ dimensionējot šādu siju jārēķinās ar reālo σ_{max} vērtību, kura nav uz ārējām virsmām.

Piemērs 8.14. Noteikt bīdes spriegumu sadalījumu dubult-T tipa sijā.

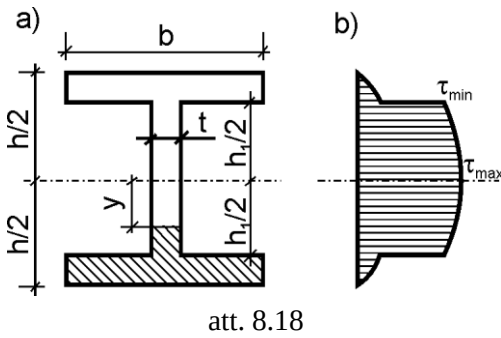
Atrisinājums. Attēlā 8.18 dota šādas sijas šķērsriezuma ģeometrija. Nošķeltās daļas statistiskais moments sienīņā izsakāms sekojošā veidā

$$S = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h/2 - h_1/2}{2} \right) + t \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \left(y + \frac{h_1/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right).$$

Tātad bīdes spriegumus sijas vertikālajā sienīņā nosaka sakarība

$$\tau = \frac{Q}{It} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{t}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2 \right) \right],$$

ja y mainās intervālā $(-h_1/2, h_1/2)$.



att. 8.18

Spriegumu ekstremālās vērtības sieniņā nosaka izmantojot nosacījumus $z_1 = 0$ un $z_1 = \pm h_1/2$. Tā rezultātā iegūstam

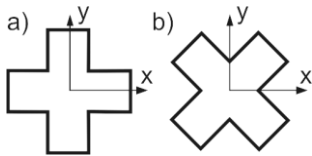
$$\tau_{\max} = \frac{Qbh^2}{8It} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \left(1 - \frac{t}{b} \right) \right];$$

$$\tau_{\min} = \frac{Qbh^2}{8It} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right].$$

Parasti sieniņas biezums t ir ļoti mazs salīdzinot ar plauktiņa platumu b . Tādēļ nošķeltās daļas statiskais moments sieniņā mainās maz un starpība starp $\tau_{\max}$ un $\tau_{\min}$ ir visai niecīga un praktiski bīdes spriegumi sieniņā pa augstumu izkliedēti vienmērīgi. Praktiski visu šķērsspēku Q uzņem sieniņa un tuvināti var pieņemt, ka max bīdes spriegums sijā ir vienāds Q/ht .

Bīdes spriegumu sadalījums plauktiņos atbilstoši izteiksmei (8.18) parādīts att. 8.18b. Tomēr šeit nav ņemts vērā, ka bīdes spriegumi plauktiņos sadalās nevienmērīgi un to noteikšana prasa papildus hipotēžu izmantošanu. Tiešām apakšējā plauktiņa virsējā malā bīdes spriegumi ir nulle, izņemot posmu, kur plauktiņš saskaras ar sieniņu. Šai posmā bīdes spriegumi ir vienādi ar $\tau_{\min}$ sieniņā.

Piemērs 8.15. Noteikt, kurā no sijas novietojumiem a vai b veidā tā izturēs lielāku maksimālā lieces momenta vērtību un kāda šai gadījumā ir bīdes spriegumu epīra.



Atrisinājums. Ņemot vērā, ka pieļaujamā lieces momenta vērtību nosaka sakarība $[M] = W [\sigma]$, varam konstatēt, ka lielāku ārējās slodzes izraisīto momenta vērtību pieļauj tāds šķērsgriezuma novietojums, kuram atbilst lielāka pretestības momenta vērtība. Saskaņā ar piemērā 8.13 iegūtajiem rezultātiem varam secināt, ka šāds novietojums ir variants b. Tātad otrā (b) veida sijas novietojuma gadījumā maksimālo normālspriegumu vērtība pie nemainīgas lieces slodzes ir 1,06 reizes mazāka par normālspriegumiem pirmā veida sijas novietojumam attiecībā pret neitrālo plakni, t.i., izdevīgāks ir otrā veida sijas novietojums.

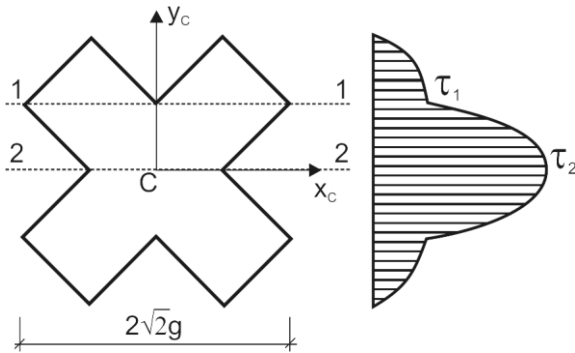
Lai uzkonstruētu bīdes spriegumu epīru sijas šķēlumam, kurā darbojas $Q_{\max}$, izmantotajam sakarību

$$\tau = (Q_{\max} / I) \cdot (S / b),$$

kur pirmais reizinātājs ir konstants lielums abiem sijas novietojuma variantiem, bet otrais mainās pa sijas augstumu visai atšķirīgā veidā.

Svarīgi ņemt vērā, ka S ir atšķeltās daļas statiskais moments **pret visas figūras neitrā-**

b)



$$\tau_1 = \frac{g^2}{3} \frac{Q}{I} = 0.333g^2 \frac{Q}{I};$$

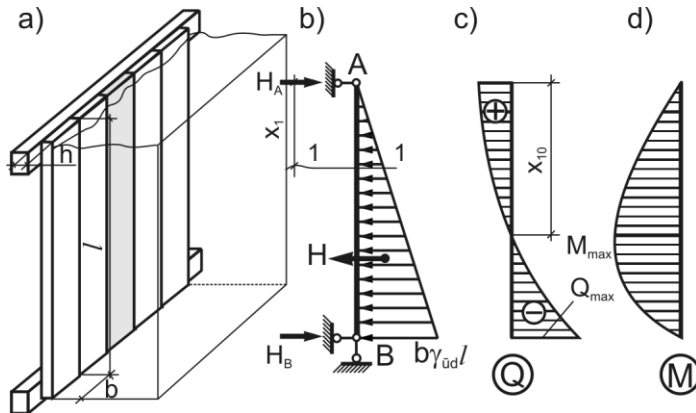
$$\tau_2 = 1,08g^2 \frac{Q}{I}.$$

Salīdzinot epīras $\tau^{(a)}$ un $\tau^{(b)}$ varam konstatēt, ka maksimālais bīdes spriegums tiek sasniegts otrās shēmas gadījumā un $\tau_{\max}^{(b)} = 1,08g^2 \frac{Q}{I}$ šķēluma vidusplaknē. Jāatzīmē,

ka pirmās shēmas gadījumā maksimālā bīdes sprieguma vērtība tikai par 8 % atšķiras no $\tau_{\max}^{(b)}$, bet darbojas citā šķēluma plaknē.

Bīdes spriegumu analīzei ir liela nozīme līmētu siju nestspējas noteikšanā.

Piemērs 8.16. Noteikt normāl un bīdes spriegumus ūdens aizsprostu veidojošās vertikālās 6 m garās koka blankās (att. 8.19a). Blanku biezums $h = 12\text{ cm}$, bet to platums $b = 20\text{ cm}$, ūdens īpatnējais svars - $\gamma_{\text{ūd}} = 10\text{ kN/m}^3$.



att. 8.19

Atrisinājums. Ūdens spiediens attālumā x_1 no ūdens virsmas $p = \gamma_{\text{ūd}} x_1$, maksimālais pie $x_1 = l$ vienāds ar $p = \gamma_{\text{ūd}} l$. Tā kā visas blankas atrodas vienādos apstākļos, pietiks, ja aprēķinu veiksīm vienai. Aprēķina shēma vienai blankai ar platumu $b = 20\text{ cm}$ brīvi balstītas sijas veidā dota att. 8.17b. Maksimālā lineāri mainīgās izkļiedētās slodzes vērtība ir $q_{\max} = b\gamma_{\text{ūd}} l$. Kopspēks H no trīsstūrveida izkļiedētās slodzes pielikts

tās smaguma centrā attālumā $x_1 = \frac{2}{3}l$ un skaitliski vienāds ar trīsstūrveida slodzes epīras laukumu $H = \frac{1}{2}b\gamma_{\bar{u}d}l^2$.

Balstu reakcijas iegūstam sastādot momentu līdzsvara vienādojumus pret balstiem A un B:

$$\sum M_A = H \cdot \frac{2}{3}l - H_B l = 0; \quad H_B = \frac{1}{3}b\gamma_{\bar{u}d}l^2;$$

$$\sum M_B = H \cdot \frac{1}{3}l - H_A l = 0; \quad H_A = \frac{1}{6}b\gamma_{\bar{u}d}l^2.$$

Šķērsspēka lielumu šķēlumā 1-1 nosaka sakarība (Q_{1-1} epīra att. 8.17c):

$$Q_{1-1} = H_A - \frac{1}{2}b\gamma_{\bar{u}d}x_1^2 = \frac{b\gamma_{\bar{u}d}l^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{x_1^2}{l^2} \right); \quad 0 \leq x_1 \leq l.$$

No nosacījuma $Q_{1-1} = 0$ iegūstam x_1 vērtību, pie kuras lieces momentam ir ekstremāla vērtība $x_{10} = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = 3,46m$. Lieces momenta vērtību šķēlumā 1-1 nosaka sakarība:

$$M_{1-1} = H_A x_1 - \frac{1}{2}b\gamma_{\bar{u}d}x_1^2 \cdot \frac{2}{3}x_1 = \frac{b\gamma_{\bar{u}d}x_1}{6}(l^2 - 2x_1^2); \quad 0 \leq x_1 \leq l,$$

no kurās pie $x_{10} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ iegūstam maksimālo lieces momenta vērtību $M_{\max} = \frac{b\gamma_{\bar{u}d}l^3}{18\sqrt{3}}$.

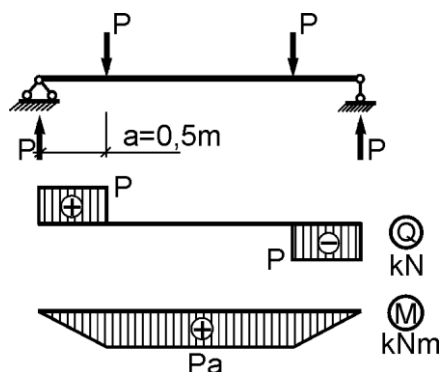
Ņemot vērā, ka taisnstūrveida šķērsgriezumam pretestības moments iegūstams atbilstoši sakarībai $W = \frac{bh^2}{6}$, maksimālais normālspriegums vienāds ar

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\gamma_{\bar{u}d}l^3}{3\sqrt{3}h^2} = 3464 \text{ kPa} = 3,464 \text{ MPa}$$

un maksimālais bīdes spriegums ar

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_{\max}}{A} = 1,5 \frac{b\gamma_{\bar{u}d}l^2}{3bh} = 1500 \text{ kPa} = 1,5 \text{ MPa}.$$

Salīdzinot iegūtās spriegumu vērtības ,piemēram, ar pieļaujamajiem spriegumiem priedes kokam (spiedē $[\sigma] = 6,9 \div 9,8 \text{ MPa}$; $[\tau] = 7,8 \text{ MPa}$), redzam, ka pieļaujamās spriegumu vērtības nav pārsniegtas.



Piemērs 8.17. Noteikt zīmējumā dotajai taisnstūrveida šķēluma sijai ar izmēriem $b=10$ cm, $h=15$ cm pieļaujamās slodzes P lielumu, ja pieļaujamie spriegumi $[\sigma] = 11$ MPa, $[\tau] = 1,5$ MPa.

Atrisinājums. Maksimālo lieces momentu un šķērsspēku nosaka sakarības $M=Pa$; $Q=P$.

Nemot vērā, ka

$$W = \frac{bh^2}{6}, \quad A = bh.$$

Iegūstam maksimālās normālo un bīdes spriegumu vērtības

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{6Pa}{bh^2}; \quad \tau_{\max} = \frac{3Q}{2A} = \frac{3P}{2bh}.$$

Pielietojot stiprības nosacījumus liektai sijai uz normāliem un bīdes spriegumiem, iegūstam divas iespējamās pieļaujamās slodzes P vērtības

$$[P_{\sigma}] = \frac{[\sigma] \cdot bh^2}{6a}; \quad [P_{\tau}] = \frac{2[\tau]bh}{3}.$$

Izmantojot uzdevuma nosacījumos dotās parametru vērtības, iegūstam

$$[P_{\sigma}] = 8,25 \text{ kN} \quad [P_{\tau}] = 15 \text{ kN}.$$

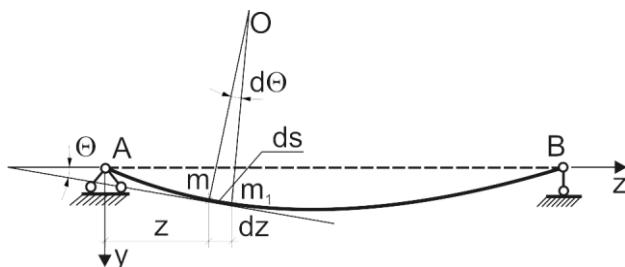
Uz iegūto rezultātu pamata varam secināt, ka dotajai sijai liecē pieļaujamās koncentrētās slodzes P lielumu limitē normālspriegumi un šī slodze nedrīkst pārsniegt $P = 8,25$ kN.

8.9. Sijas izlieces, sijas liektās ass diferenciālvienādojums

Veicot sijas aprēķinus inženierus interesē ne tikai ārējās slodzes izraisītais spriegumstāvoklis, bet arī tās radītie pārvietojumi. Sijas normālai ekspluatācijai nepieciešams, lai tās maksimālā izliece nepārsniegtu limitētu (normās noteiktu) vērtību, kura ir maza salīdzinot ar sijas laidumu. Parasti sijas maksimālās izlieces f attiecība pret sijas laidumu l sastāda

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{1000}.$$

Ārējās slodzes darbības rezultātā taisna sija izliecas un tās centrālā ass iegūst līklīnijas formu. Šo līkni sauc par sijas liekto asi (att. 8.20). Sakarība (8.9) dod iespēju noteikt sijas liekumu tīrās lieces gadījumā (sijā darbojas tikai lieces moments).



att. 8.20

Izliektās sijas elementa starp punktiem m un m_1 garums ir ds . Gadījumā, ja leņķis, ko veido pieskare punktā m ar stieņa asi x ir apzīmēts ar θ , tad normāles pret sijas asi punktos m un m_1 krustojas punktā O un veido leņķi $d\theta$. Nogriezni Om sauc par liekuma rādiusu, bet punktu O par liekuma centru.

Starp lieces parametriem ds , $d\theta$ un un liekuma rādiusu ρ pastāv sakarības

$$ds = \rho d\theta \quad \text{un} \quad \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|.$$

Praktiskos pielietojumos tiek pieļautas tikai ļoti mazas izlieces, un līdz ar to nebūtiski zaudējot precizitāti, varam izmantot tuvinājumus

$$ds \approx dz, \quad \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dz}. \quad (8.22)$$

Līdz ar to pieņemtā tuvinājuma ietvaros iegūstam sakarību

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (8.23)$$

Izmantojot sakarību (8.9), iegūstam

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = M. \quad (8.24)$$

Šis ir sijas liektās ass diferenciālvienādojums, kura atrisinājums nosaka sijas izlieces y . Pietiekami lokanu stieņu gadījumos, kuru izliekumi var būt visai lieli, nedrīkst izmantot sakarības (8.22), bet jālieto precīzā sakarība

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{dy}{dz} \right).$$

Tādā gadījumā

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{dy}{dz} \right) \right)}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^3}} \quad (8.25)$$

Salīdzinot precīzo sakarību (8.25) un tuvināto (8.23), konstatējam, ka tās atšķiras ar izteiksmi $\left(\frac{dy}{dz} \right)^2$ formulā (8.25). Tātad veiktais tuvinājums reducējas uz pieņēmumu,

ka $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ ir mazs salīdzinājumā ar vieninieku un to var neņemt vērā.

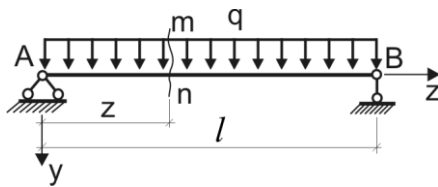
Diferencējot sakarību (8.24) pēc z un izmantojot sakarības $\frac{dM}{dz} = Q$, $\frac{dQ}{dz} = q$, iegūstam vienādojumus

$$EI \frac{d^3 y}{dz^3} = Q, \quad EI \frac{d^4 y}{dz^4} = q$$

sijas izlieču y noteikšanai. Vienādojumu atrisināšanai tiek lietotas lineāro diferenciālvienādojumu risināšanas metodes.

Vienmērīgi izkļiedētas slodzes radītās izlieces

Brīvi balstītai sijai, kura slogota visā garumā ar vienmērīgi izkļiedētu slodzi, lieces momentu jebkurā šķēlumā attālumā z no kreisā balsta nosaka sakarība



$$M = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2}.$$

Tādā gadījumā sijas liektās ass diferenciālvienādojums (8.24) iegūst formu

$$EI \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}.$$

Integrējot abas vienādojuma puses pēc z , iegūstam

$$EI \frac{dy}{dz} = \frac{ql}{4}z^2 - \frac{qz^3}{6} + C,$$

kur C ir pagaidām nezināma integrācijas konstante. Tās vērtība tiek noteikta no konkrētā uzdevuma nosacījumiem. Mūsu gadījumā varam konstatēt, ka pamatojoties uz slodzes simetriju, arī izlieces būs simetriskas un liektās ass pieskare sijas viduspunktā būs paralēla sijas asij. Tātad pie vērtības $z = \frac{l}{2}$ ir spēkā nosacījums $\frac{dy}{dz} = 0$. Līdz ar

to, ievietojot šīs vērtības diferenciālvienādojumā, iegūstam, ka $C = \frac{ql^3}{24}$, un vienādojums iegūst formu

$$EI \frac{dy}{dz} = \frac{qlz^2}{4} - \frac{qz^3}{6} + \frac{ql^3}{24}. \quad (8.26)$$

Integrējot šo vienādojumu, iegūstam funkcionālu sakarību

$$EIy = \frac{qlz^3}{12} - \frac{qz^4}{24} + \frac{ql^3}{24}z + C_1,$$

kuras konstanti C_1 nosakām izmantojot nosacījumu, ka vertikālo pārvietojumu balstos nav un tātad, ja $z = 0$, tad $y = 0$ un līdz ar to arī $C_1 = 0$.

Tādā gadījumā esam nonākuši pie funkcionālas sakarības starp mainīgo koordināti z un sijas izlieci šai koordinātei atbilstošā šķēlumā:

$$y = \frac{q}{24EI} (2lz^3 - z^4 + l^3z).$$

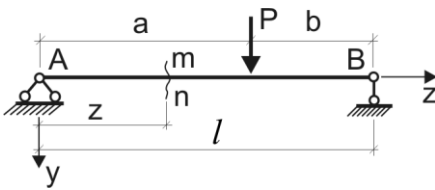
Lielākais pārvietojums konkrētā slogojuma gadījumā ($q = \text{const}$ visā sijas garumā) ir sijas vidū. Ievietojot izteiksmē vērtību $z = l/2$, iegūstam, ka

$$y_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Maksimālais liektās ass pieskares leņķis pret sākotnējo neslogoto stāvokli novērojams balstos. Ievietojot sakarībā (8.26) vērtību $z = 0$, iegūstam

$$\left(\frac{dy}{dz} \right)_{\max} = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Koncentrēta spēka radītas izlieces



Veiksim divbalstu sijas izlieču aprēķinu, ja slodze pielikta **koncentrēta spēka** veidā. Šai gadījumā ir divas atšķirīgas lieces momentu izteiksmes – izteiksme posmam pa kreisi no koncentrētās slodzes pielikšanas vietas un posmam pa labi no P pielikšanas vietas.

Kreisajā sijas posmā lieces momentu nosaka sakarība $M_a = \frac{Pb}{l}z$, bet labajā posmā

$M_b = \frac{Pb}{l}z - P(z - a)$. Līdz ar to sijas liektās ass vienādojums jāsastāda katram no

šiem posmiem atsevišķi. Iegūstam divus diferencālvienādojumus

$$EI \frac{dy^2}{dz^2} = \frac{Pb}{l}z, \quad \text{ja } 0 < z \leq a, \quad (8.27)$$

$$EI \frac{dy^2}{dz^2} = \frac{Pb}{l}z - P(z - a), \quad \text{ja } a \leq z \leq l.$$

Integrējot šos divus vienādojumus, iegūstam četras integrācijas konstantes un to noteikšanai izmantojam nosacījumus, ka šķēlumā, kurā $z = a$, pārvietojumiem pēc abiem vienādojumiem ir jābūt vienādiem, pie kam arī izlieces līnijas pieskarēm šai punktā jāsakrīt. Vēl divu konstanšu vērtības nosakām izmantojot nosacījumu, ka balstos, t.i. pie $z = 0$, $z = l$, izlieces ir vienādas ar nulli.

Atrisinot vienādojumus (8.27), iegūstam divas izlieču noteikšanas izteiksmes:

Posmā pa kreisi no spēka pielikšanas vietas izlieci nosaka sakarība

$$y = \frac{Pbz}{6lEI} (-l^2 + b^2 + z^2). \quad (8.28)$$

Posmam pa labi no spēka pielikšanas vietas -

$$y = \frac{Pbz}{6IEI} \left[-l^2 + b^2 + z^2 - \frac{l}{bz}(z-a)^3 \right]. \quad (8.29)$$

Analogā rakstura sakarības iegūstam arī izliektās stieņa ass slīpuma leņķa noteikšanai:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{Pb}{6IEI} (-l^2 + b^2 + 3z^2), \quad \text{ja } z \leq a; \quad (8.30)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{Pb}{6IEI} \left[-l^2 + b^2 + 3z^2 - \frac{3l}{b}(z-a)^2 \right], \quad \text{ja } z \geq a. \quad (8.31)$$

Sijas maksimālā izliece būs punktā, kurā liektās ass pieskare ir vērsta horizontāli. Gadījumā, ja $a > b$, tad sijas maksimālā izliece būs kreisajā sijas daļā. Šī punkta stāvokli nosaka sakarība $\left(\frac{dy}{dz} = 0 \right)$:

$$-l^2 + b^2 + 3z^2 = 0.$$

Tātad, gadījumā ja $a > b$ sijas maksimālā izliece būs šķēlumā ar koordināti

$$z = \frac{\sqrt{3(l^2 - b^2)}}{3}. \quad (8.32)$$

Ievietojot šo koordinātes vērtību sakarībā (8.28), iegūstam maksimālo izlieces vērtību

$$y_{\max} = \frac{Pb\sqrt{(l^2 - b^2)^3} \cdot 3}{27IEI}. \quad (8.33)$$

Gadījumā, ja $a = b$, t.i. koncentrētā slodze pielikta sijas vidū, tad arī maksimālā izliece būs sijas vidū un tās vērtība ir

$$y_{x=l/2} = \frac{Pl^3}{48EI}.$$

Izmantojot izteiksmi (8.30) varam konstatēt, ka neatkarīgi no spēka P novietojuma izlieces maksimālā vērtība praktiski atrodas tuvu sijas vidum. Tiešām, gadījumā, ja $b \rightarrow 0$, koordinātas z vērtība tiecas uz $\frac{l}{\sqrt{3}}$. Tātad maksimālā izliece atrodas attālumā $(0,577 - 0,5)l = 0,077l$ no sijas vidus. Līdz ar to izliece sijas vidū praktiski vienāda ar maksimālo izlieci. Izliece sijas vidū ir

$$y_{x=l/2} = \frac{Pb}{48EI} (-3l^2 + 4b^2). \quad (8.34)$$

Starpība starp izlieču vērtībām atbilstoši sakarībām (8.33) un (8.34) nelabvēlīgākajā gadījumā, t.i., kad b tiecas uz nulli, sastāda tikai 2,5 % no maksimālās izlieces vērtības. Tas nozīmē, ka **visos sloģojuma novietojuma gadījumos sijas maksimālo izlieci var identificēt ar tās izlieci viduspunktā.**

Salīdzinot maksimālās izlieču vērtības ar izkliektu slodzi un sijas vidū ar vienlīdz lielu

koncentrētu spēku ($P=gl$) slogotām sijām, konstatējam, ka $y_{\max}(q)=0.625y_{\max}(P)$. Tātad izklīdētas slodzes gadījumā sijas maksimālā izliece sastāda tikai 62,5% no maksimālās izlieces, kas rodas slodzi savācot sijas vidū. Izklīdētas slodzes gadījumā arī spriegumi ir divas reizes mazāki kā koncentrēta spēka gadījumā.

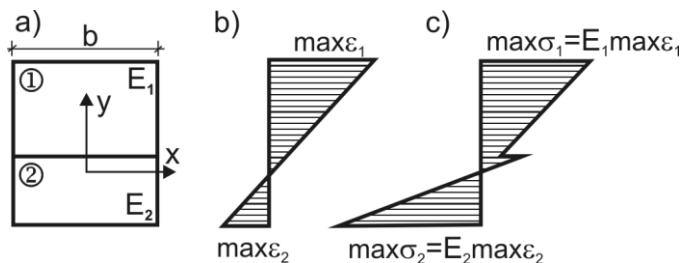
Uzdevums 8.3. Noteikt ar koncentrētu spēku $P = 8 \text{ kN}$ slogotas sijas maksimālo izlieci gadījumā, ja sija izgatavota no dubult-T profila $N^0 20$ un spēka novietojuma parametri ir $a = 3,6 \text{ m}$, $b = 2,4 \text{ m}$.

Uzdevums 8.4. Kā izmainīsies maksimālā izliece, ja dubult-T profila metāla siju no mainām ar koka siju ar izmēriem $10 \times 20 \text{ cm}$?

Uzdevums 8.5. Noteikt konsoles gala pārvietojumu un pagriezienu leņķi, ja tā slogota brīvajā galā ar spēkpāri m .

8.10. Kompozītu siju liece

Sija, kura izgatavota no vairākiem atšķirīgiem materiāliem, tiek saukta par kompozītu siju. Sijas šķērsgriezuma laukuma ģeometrija var būt patvaļīga, bet visparastākā tā forma ir taisnstūris, kuru sastāda atšķirīga (vai vienāda) biezuma slāņi ar atšķirīgām deformatīvajām (arī stiprības) īpašībām. Slāņi savā starpā sastiprināti tā, lai varētu uzskatīt siju par vienu veselu. Tādu siju piemēri ir bimetaliskas sijas, dzelzsbetona sijas, kā arī sijas pastiprinātas ar plānām ārējām kārtām.



att. 8.21

Kompozīto siju aprēķinos var tikt izmantota lieces teorija, kuru pielietojām viendabīgu siju gadījumā.

Pieņemot tīrās lieces gadījumā ($Q=0$) plakano šķēlumu hipotēzi, lineārās deformācijas sijas ass virzienā sadalās pa šķērsgrie-

zuma augstumu pēc lineāra likuma.

Att. 8.21-a parādīts divu materiālu sijas šķērsgriezums, bet att. 8.21-b shematisks deformāciju sadalījums.

Gadījumos, kad sijas struktūra attiecībā pret vidusplakni nav simetriska (dažādi slāņu biezumi, atšķirīgas deformatīvās īpašības), sijas neitrālās plaknes stāvoklis nav zināms. Speciālā gadījumā, ja sijas šķērsgriezuma struktūra ir simetriska, neitrālā plakne sakrīt ar vidusplakni.

Normālspriegumus katrā šķēluma punktā var iegūt pareizinot deformāciju šai punktā ar attiecīgā slāņa elastības moduli. Ja pieņemam, ka att. 8.21 attēlotajai sijai $E_2 > E_1$, tad spriegumu sadalījums pa augstumu redzams att. 8.21-c.

Liekta elementa lineārās deformācijas lielums sijas ass virzienā ir atkarīgs no punkta attāluma y no neitrālās plaknes un nosakāms ar sakarību

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} = \alpha y, \quad (8.35)$$

kur ρ - elementa liekuma rādiuss, bet α – liekums.

Izmantojot sakarību (8.35), normālspriegumu sadalījums pa šijas augstumu nosakāms atbilstoši sakarībām

$$\sigma_{z1} = \alpha E_1 y, \quad \sigma_{z2} = \alpha E_2 y. \quad (8.36)$$

Neitrālās plaknes stāvokli var noteikt, izmantojot nosacījumu, ka lieces gadījumā summārais ass spēks šijas asij perpendikulārā šķēlumā ir vienāds ar nulli.

Tātad

$$\int_{A_1} \sigma_{z1} dA + \int_{A_2} \sigma_{z2} dA = 0. \quad (8.37)$$

Izmantojot sakarības (8.36), iegūstam

$$E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA = 0. \quad (8.38)$$

Integrāļi ir attiecīgo laukumu statistiskie momenti pret neitrālo plakni un sakarību (8.38) var izmantot neitrālās plaknes stāvokļa noteikšanai.

Šijas lieces moments tīrajā liecē ir visu normālspriegumu izraisīto elementāro momentu $dM = \sigma_x dA \cdot z$ summa. Tātad ir spēkā sakarības

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma_z y dA = \int_{A_1} \sigma_{z1} y dA + \int_{A_2} \sigma_{z2} y dA = \\ &= \alpha E_1 \int_{A_1} y^2 dA + \alpha E_2 \int_{A_2} y^2 dA = \alpha (E_1 I_1 + E_2 I_2) \end{aligned} \quad (8.39)$$

Šeit I_1 un I_2 – laukumu A_1 un A_2 inerces momenti pret neitrālo plakni. Ir spēkā sakarība $I = I_1 + I_2$, kur I - aksiālais inerces moments visam šķērsgriezuma laukumam A .

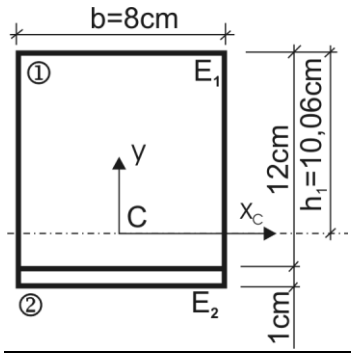
Izmantojot sakarības (8.36) un (8.39), iegūstam sekojošas izteiksmes spriegumu aprēķināšanai šijā, kura liekta ar momentu M :

$$\sigma_{z1} = \frac{y E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M, \quad (8.40-a)$$

$$\sigma_{z2} = \frac{y E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} M. \quad (8.40-b)$$

Speciālā gadījumā, ja abu slāņu materiālu deformatīvās īpašības vienādas, ir spēkā sakarības $E_1 = E_2 = E$ un abu izteiksmju (8.40) vietā iegūstam jau zināmo sakarību

$$\sigma_x = \frac{y M}{I}.$$



Piemērs 8.18. Sija, kuras šķēsgriezuma izmēri doti zīmējumā, liekta ar momentu $M = 3,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$. Jānosaka max un min spriegumi abos materiālos, ja $E_1 = 7 \text{ GPa}$, $E_2 = 140 \text{ GPa}$.

Atrisinājums. Vispirms jānosaka sijas šķērsšķēluma neitrālās ass x_C stāvoklis. Ievēdam apzīmējumus h_1 un h_2 – attālumus no neitrālās ass līdz šķēluma ārējām virsmām. Tādā gadījumā sakarības (8.38) saskaitāmie izsakāmi sekojošā veidā

$$E_1 \int_{A_1} y dA = E_1 \cdot S_{x_C}^1 = E_1 \cdot 8 \cdot 12 \cdot (h_1 - 6) = 672(h_1 - 6),$$

$$E_2 \int_{A_2} y dA = E_2 \cdot S_{x_C}^2 = E_2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot (13 - h_1 - 0,5) = 1120(12,5 - h_1).$$

Ievietojot šīs izteiksmes sakarībā (8.38) un atrisinot iegūto vienādojumu

$$672(6 - h_1) + 1120(12,5 - h_1) = 0$$

attiecībā pret nezināmo h_1 , iegūstam $h_1 = 10,06 \text{ cm}$.

Inerces momentus I_1 un I_2 pret neitrālo plakni var iegūt izmantojot teorēmu par asu paralēlo pārbīdi:

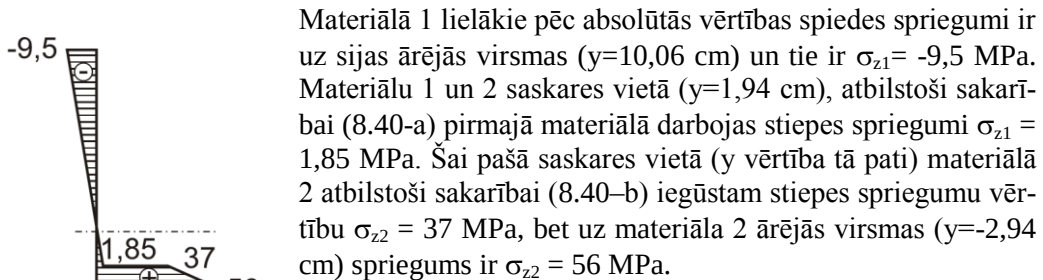
$$I_1 = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12(10,06 - 6)^2 = 2732 \text{ cm}^4;$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 1 + 1 \cdot 8(12,5 - 10,06)^2 = 48 \text{ cm}^4.$$

Kopējais inerces moments sijai

$$I = I_1 + I_2 = 2780 \text{ cm}^4.$$

Izmantojot sakarības (8.40-a) un (8.40-b) iegūstam sekojošus rezultātus:



Materiālā 1 lielākie pēc absolūtās vērtības spiedes spriegumi ir uz sijas ārējās virsmas ($y=10,06 \text{ cm}$) un tie ir $\sigma_{z1} = -9,5 \text{ MPa}$. Materiālu 1 un 2 saskares vietā ($y=1,94 \text{ cm}$), atbilstoši sakarībai (8.40-a) pirmajā materiālā darbojas stiepes spriegumi $\sigma_{z1} = 1,85 \text{ MPa}$. Šai pašā saskares vietā (y vērtība tā pati) materiālā 2 atbilstoši sakarībai (8.40-b) iegūstam stiepes spriegumu vērtību $\sigma_{z2} = 37 \text{ MPa}$, bet uz materiāla 2 ārējās virsmas ($y=-2,94 \text{ cm}$) spriegums ir $\sigma_{z2} = 56 \text{ MPa}$.

Tātad kritiski var būt materiālā 1 spiedes spriegumi $\sigma_{z1} = -9,5 \text{ MPa}$ un stiepes spriegumi $\sigma_{z1} = 1,85 \text{ MPa}$, bet materiālā 2 – stiepes spriegumi $\sigma_{z2} = 56 \text{ MPa}$. Sijas dimensionēšana jāveic atbilstoši šīm vērtībām. Normālspriegumu epīra kompozītajai sijai redzama attēlā.

8.11. Reducētā šķēluma metode

Šī metode ir ērta no dažādiem materiāliem veidotu slāņainu siju šķēlumu reducēšanai uz ekvivalentu viena materiāla siju. Iegūtais šķēlums tiek saukts par reducēto šķēlumu un tam var pielietot viendabīgas sijas lieces teoriju.

Šķēlums būs ekvivalents dotās slāņainās sijas šķēlumam, ja tam būs tā pati neitrālā ass kā dotajam un tāda pati pretestība lieces momentam.

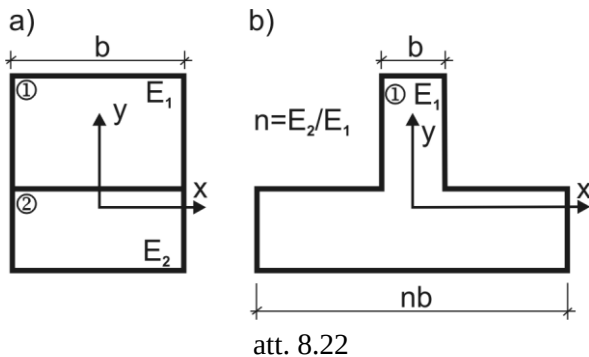
Noteiksim reducēto šķēlumu divslāņu sijas gadījumā. Izmantosim parametru, kurš raksturo abu materiālu elastības moduļu attiecību $n = E_2 / E_1$. Tādā gadījumā sakarību (8.38) var pārrakstīt sekojošā formā:

$$\int_{A_1} y dA + \int_{A_2} ny dA = 0. \quad (8.41)$$

No šīs sakarības izriet, ka neitrālās ass stāvoklis neizmainīsies, ja otrā materiāla katrs elementārlaukums dA palielināsies n reizes tā, lai tā attālums no neitrālās ass nemainītos. Citiem vārdiem sakot, var uzskatīt, ka slānis 1 ir tāds kā iepriekš, bet slāņa 2 vietā ir slānis ar n reizes lielāku platumu un pirmā slāņa deformatīvajām īpašībām. Tādā veidā ir radīta sija, kuras šķērsspriegums ir ar slāņa 1 elastīgām īpašībām (elastības modulis E_1), bet izmainītu ģeometriju. Dotais šķērsspriegums un reducētais attēloti att. 8.22.

Reducētā šķēluma neitrālās ass stāvoklis sakrīt ar dotās šķēluma neitrālās ass stāvokli (tas izriet no sakarības (8.41)). Reducētā šķēluma spēja pretoties lieces momentam analoga dotam šķēlumam.

Spriegumus reducētā šķēlumā nosaka iepriekš iegūtā sakarība normālspriegumu atkarībai no lieces momenta, šķēluma inerces momenta un attāluma no neitrālās ass. Tātad ir spēkā sakarība



$$\sigma_{z1} = \frac{M \cdot y}{I_{red}}, \quad (8.42)$$

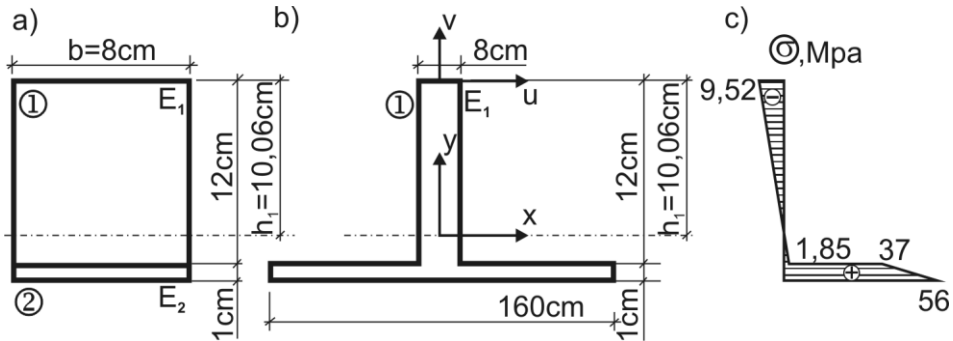
kur $I_{red} = I_1 + nI_2$ - reducētā šķēluma inerces moments pret neitrālo asi.

Sakarība (8.42) nosaka normālspriegumu dotās sijas slānī 1. Normālspriegumus slānī 2 iegūst ar sakarību (8.42) noteiktos spriegumus pareizinot ar n .

Reducēto šķēlumu principu viegli vispārināt arī uz lielāku atšķirīgu materiālu slāņu skaitu. Tad reducētais šķēlums sastāvēs no vairākiem atšķirīga platuma slāņiem, kuru elastības moduļi būs n_i reizes lielāki par kādu brīvi izvēlētu elastības moduļa vērtību E .

Piemērs 8.19. Noteikt spriegumus divslāņu sijā ar reducēto šķēluma metodi. Izejas dati no iepriekšējā piemēra.

Atrisinājums. Tātad šķēlumu, kurš attēlots att. 8.23a var aizstāt ar att. 8.234b attēloto šķēlumu.



att. 8.23

Lai noteiktu šāda šķēluma neitrālās ass stāvokli, jānosaka attēlotās figūras (reducētā šķēluma) smaguma centra koordinātes. Izmantojot smaguma centra koordinātu izteiksmes saliktas struktūras figūrām (pret asi u) iegūstam

$$h_1 = \frac{8 \cdot 12 \cdot 6 + 160 \cdot 1 \cdot 12,5}{8 \cdot 12 + 160 \cdot 1} = 10,06 \text{ cm} = 0,1006 \text{ m}.$$

Reducētā šķēluma inerces moments pret galveno centrālo asi x ir

$$I_{\text{red}} = 8 \cdot 12^3 / 12 + 8 \cdot 12 \cdot (4,06)^2 + 160 \cdot 1^3 / 12 + 1 \cdot 160 \cdot (2,44)^2 = 3698 \text{ cm}^4 = 3,698 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4.$$

Spriegumu vērtības malējās šķiedrās un slāņu saskares vietā nosaka, izmantojot sakarību (8.40).

Maksimālie spiedes spriegumi (uz augšējās virsmas) ir

$$\sigma^{(-)} = \frac{M \cdot y_-}{I_{\text{red}}} = \frac{3500 \cdot (-0,1006)}{36,98 \cdot 10^{-6}} = -9,52 \text{ MPa},$$

bet maksimālie stiepes spriegumi (uz apakšējās virsmas)

$$\sigma^{+} = \frac{M \cdot y_+}{I_{\text{red}}} = \frac{3500 \cdot 0,0294}{36,98 \cdot 10^{-6}} = 2,8 \text{ MPa}.$$

Slāņu saskares vieta ir stiepta (tā atrodas zem neitrālās ass) un šis spriegums ir

$$\sigma_{1-2} = \frac{M \cdot y_{1-2}}{I_{\text{red}}} = \frac{3500 \cdot 0,0194}{36,98 \cdot 10^{-6}} = 1,85 \text{ MPa}.$$

Šie iegūtie spriegumi būs spēkā dotai sijas daļai, kura izgatavota no materiāla 1. Sijas daļai, kurā ir materiāls 2 (tā elastības modulis 20 reizes lielāks par pirmā materiāla elastības moduli) aprēķinātie spriegumi būs 20 reizes lielāki. Tātad dotajai sijai materiālu saskares vietā otrajā slānī būs spriegums

$$\sigma_{II} = \sigma_{1-2} \cdot 20 = 1,85 \cdot 20 = 37 \text{ MPa},$$

bet uz stieptās šķiedras (sijas apakšējā virsma)

$$\sigma_{II}^{(+)} = \sigma^{(+)} \cdot 20 = 2,8 \cdot 20 = 56 \text{ MPa}.$$

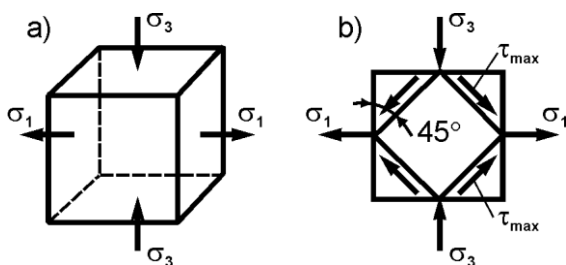
Tātad izmantojot reducētā šķēluma metodi, iegūtie rezultāti sakrīt ar iepriekšējā piemērā iegūtajiem. Tie shematiski attēloti att. 8.23c.

9. BĪDE

Slokojuma veidu, kad uz elementa virsmām darbojas tikai bīdes spriegumi, sauc par tīro bīdi. Virsmas, kurās darbojas tikai bīdes spriegumi sauc par tīrās bīdes virsmām. Tīrās bīdes stāvoklī ir visi apaļa vērpta stieņa punkti. Praksē svarīgu vietu konstrukciju stiprības aprēķinos ieņem aprēķini ne tikai uz tīro bīdi, bet arī aprēķini pēc bīdes spriegumiem neatkarīgi no tā, vai tie darbojas tīrās bīdes plaknēs vai jebkurās citās plaknēs. Tādus aprēķinus sauc par bīdes vai cirpes aprēķiniem. Cirpes aprēķinu piemēri ir bul-tveida, metinājuma, kniedējuma un līmes savienojumu aprēķini. Prakse rāda, ka cirpes aprēķini, neskatoties uz virkni vienkāršojumu, ir pietiekami droši.

9.1. Spriegumu stāvoklis tīrā bīdē

Speciālā plaknes spriegumu stāvokļa gadījumā, kad divi galvenie spriegumi ir pēc moduļa vienādi, bet pēc virziena pretēji, t.i. viens no tiem ir spiedes, bet otrs stiepes spriegums,



att. 9.1

plaknēs, orientētās 45° leņķī pret galveno asu virzieniem, izveidojas tīrās bīdes stāvoklis. Attēlā 9.1. maksimālais galvenais spriegums (tas ir stiepes spriegums) apzīmēts ar σ_1 , bet otrs galvenais spriegums, kurš ir negatīvs, ar σ_3 , jo trešā galvenā sprieguma vērtība ir $\sigma_2 = 0$.

Tā kā $\sigma_1 = -\sigma_3$, tad saskaņā ar plakana spriegumu stāvokļa sakarībām

iegūstam:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_1 \sin^2 \alpha = \sigma_1 \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = 0,5(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\alpha = 0,5(\sigma_1 - (-\sigma_1)) \sin 2\alpha = \sigma_1 \sin 2\alpha$$

Šais sakarībās ievietojot $\alpha = 45^\circ$ (vai 135°), iegūstam, ka

$$\sigma_{45} = \sigma_{135} = 0, \quad \tau_{45} = \sigma_1, \quad \tau_{135} = -\sigma_1 = \sigma_3.$$

Šāds spriegumu stāvoklis attēlots att. 9.1b.

Tīrā bīde ir vienīgais plakanā spriegumstāvokļa gadījums, kad caur punktu var novilkt divas savstarpēji perpendikulāras plaknes, kurās nav normālspriegumu, bet bīdes spriegumi ir maksimālie.

Līdzās definīcijai:

Tīrā bīde ir speciāls plakanā spriegumstāvokļa gadījums, kad galvenie spriegumi ir vienādi pēc skaitliskās vērtības un pretēji pēc zīmes ,

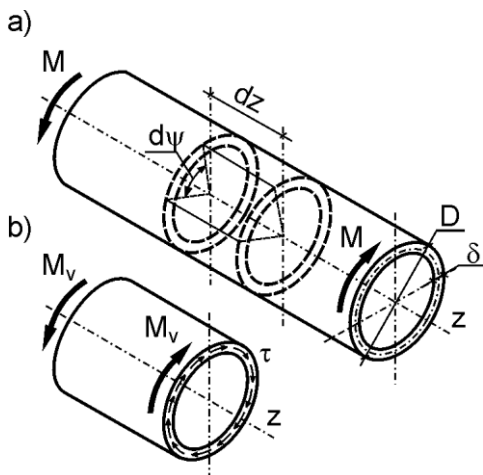
iespējama arī cita:

par tīro bīdi sauc tādu plakano spriegumstāvokli, kad dota punkta apkārtņē iespējams izveidot elementu, uz kura četrām malām būtu tikai savā starpā vienādi bīdes spriegumi.

Pēdējo definīciju var uzskatīt par analizējamā spriegumstāvokļa – tīrās bīdes skaidrojumu.

9.2. Plānsieniņu caurules vērpe kā tīrās bīdes realizācija

Izmantojot šķēluma metodi, no atšķeltās daļas (att. 9.2) līdzsvara seko, ka jebkurā caurules šķērssšķēlumā darbojas tikai viena iekšējā piepūle – vērpes moments M_v skaitliski

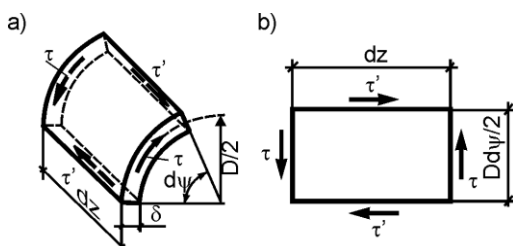


att. 9.2

vienāds ar ārēji pielikto momentu. Caurules šķērssšķēlumā rodas bīdes spriegumi, jo tikai bīdes spriegumi rada momentu attiecībā pret caurules asi. Tā kā caurule ir plāna, tad visai pamatots ir pieņēmums, ka bīdes spriegumi pa caurules sienas biezumu izkliedēti vienmērīgi. Visi punkti uz caurules asij paralēlām taisnēm atrodas vienādos apstākļos. Līdz ar to visos caurules punktos ir vienāds vienmērīgs spriegumu stāvoklis.

Pārliecināsimies, ka vērptas plānsieniņu caurules jebkura punkta spriegumstāvoklis tiešām ir tīrā bīde.

Ar diviem attālumā dz viens no otra savstarpēji paralēliem caurules asij perpendi-



att. 9.3

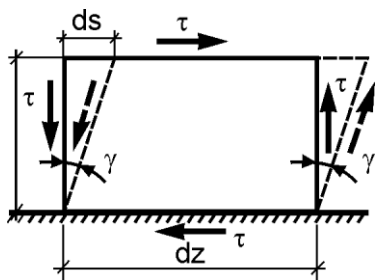
kulāriem šķēlumiem un diviem radiāliem šķēlumiem, starp kuriem ir leņķis $d\psi$, izgriežam no caurules sienas bezgala mazu elementu (att. 9.2b). Šāds elements atsevišķi attēlots att. 9.3a. Tā kā šis elements ir bezgala mazs, tad var pieņemt, ka tas ir taisnleņķa paralelepīpeds ar malu garumiem dz, δ un $(D/2)d\psi$. Šķērssšķēlumiem atbilstošajās plaknēs darbojas bīdes spriegumi τ . Tiem atbilst iekšējo spēku pāris. Pieņemot, ka rodas tikai šie spriegumi, izgrieztais elements nebūs līdzsvarā. Tātad uz garenšķēlumu plaknēm arī

jādarbojas bīdes spēkiem (spriegumi τ'). Tie veido pāri, kuru moments līdzsvaro šķērssšķēlumu momentu (att. 9.3). Pārējās elementa plaknēs spriegumu nav, jo tās atbilst caurules ārējai un iekšējai virsmām, kurām ārējā slodze nav pielikta. Tātad uz četrām elementa virsmām darbojas tikai bīdes spriegumi tādā veidā atbilstot otrajai „tīrās bīdes” definīcijai.

Sastādām uz elementu darbojošos spēku līdzsvara vienādojumus, ņemot vērā, ka τ darbojas uz laukumu $\delta \cdot 0,5D d\psi$, bet spriegumi τ' – uz laukumu δdz , un attiecīgo spēku pleci ir dz un $0,5D d\psi$:

$$(\tau \delta 0,5D d\psi) dz = (\tau' \delta dz 0,5D) d\psi$$

Tātad $\tau = \tau'$ un ir pierādīts bīdes spriegumu **pāra likums**.



att. 9.4

Att. 9.4. attēlots elements uz kura malām darbojas tīrās bīdes spriegumi. Šo spriegumu ietekmē taisnstūra elements deformējas par paralelogramu.

Tā kā mūs interesē elementa deformēšanās, nevis tā pārvietošanās, tad vienu no malām varam uzskatīt par nekustīgu. Bīdes deformācijas mērs ir sākotnēji taisnā leņķa izmaiņa. Šo leņķi apzīmē ar γ un sauc par **bīdes leņķi**. To mēra radiānos. Atkarībā no materiāla īpašībām zināmās robežās starp bīdes deformācijām un bīdes spriegumiem pastāv lineāra sakarība – Huka likums bīdē:

$$\tau = G\gamma$$

Bīdes modulis G ir materiāla konstante un raksturo materiāla stingrību bīdē. Tā dimensija sakrīt ar bīdes sprieguma dimensiju, t.i. Pa.

Var pierādīt, ka izotropu materiālu gadījumā starp trim elastīgām konstantēm – elastības moduli E , Puasona koeficientu μ un bīdes moduli G – ir spēkā sakarība:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Jau iepriekš konstatējām, ka Puasona koeficienta μ vērtības iespējamās robežās $0 \leq \mu \leq 0,5$. Tātad bīdes modulis G sastāda $0,33 \dots 0,5$ no elastības moduļa E . Daudziem metāliem un sakausējumiem $G \approx 0,4 E$. Tēraudam $G = 8 \cdot 10^4$ MPa. Tā kā materiālu elastīgo konstanšu vērtības tiek noteiktas eksperimentāli, tad varam secināt, ka no neatkarīgiem eksperimentiem pietiek noteikt jebkuras divas no šīm konstantēm, bet trešo var izskaitļot ar augstāk uzrādītās sakarības palīdzību.

9.3. Apaļa stieņa vērpes spriegumi un deformācijas

Meklējot apaļa stieņa vērpes spriegumu un savērpes leņķa aprēķina formulas, izmantosim šādus pieņēmumus:

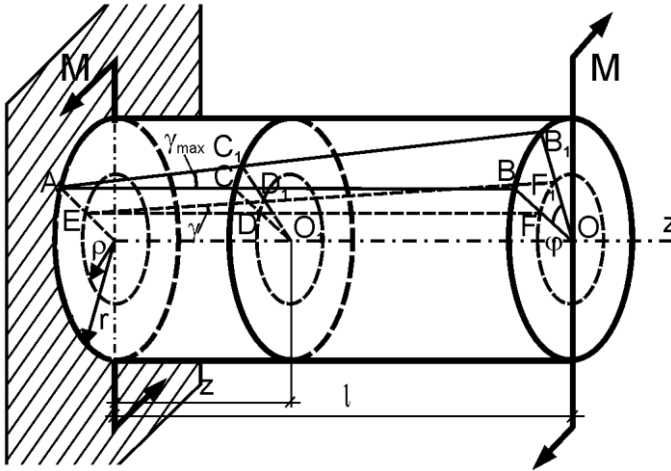
1. stieņa šķērsgriezumi deformācijas laikā paliek plakani un perpendikulāri stieņa asij (Bernulli hipotēze);
2. attālumi starp šķērsgriezumiem paliek nemainīgi;
3. šķērsgriezumos novilkto rādiusi deformācijas laikā nesaliecas, t.i., pagriežoties paliek taisni.

Teorija, kas balstās uz šiem pieņēmumiem, atbilst eksperimentiem, ko veic ar apaļiem stieņiem.

Var saskatīt, ka vērpe atsevišķi stieņa elementi pakļaujas tīrās bīdes deformācijām. Patiešām stieņa šķērsgriezuma punkts D (att. 9.5), kas pirms deformācijas atradās uz kādas veidules EF (tā novilkta attālumā ρ no stieņa ass), pārvietojas stāvoklī D_1 .

Stieņa elementiem, kas atrodas uz veidules EF, bīdi raksturo leņķis γ , kuru deformāciju niecīguma dēļ var uzskatīt par vienādu ar šī leņķa tangensu, t.i.

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{DD_1}{ED}.$$



Visām daļiņām, kas atrodas attālumā ρ no stieņa ass, bīdes leņķis γ ir viens un tas pats un tas vienāds ar leņķi starp veidules EF sākotnējo stāvokli un nobīdīto stāvokli EF_1 . Elementiem, kuru attālums ρ no stieņa ass ir atšķirīgs, arī leņķa γ lielums ir cits. Vislielāko vērtību bīdes leņķis sasniedz uz ārējās virsmas, t.i., ja $\rho = r$. Šajā

gadījumā bīdes leņķi, kas vienāds ar leņķi starp veidules AB sākotnējo stāvokli un nobīdīto stāvokli AB_1 , apzīmē ar $\gamma_{\max}$.

Saskaņā ar jau minētajiem pieņēmumiem šķērsgriezumu rādiusi deformācijas laikā nesaliecas un šķērsgriezumi paliek plakani, tāpēc

$$\frac{FF_1}{OF} = \frac{BB_1}{OB}$$

vai

$$FF_1 = BB_1 \frac{OF}{OB} = BB_1 \cdot \frac{\rho}{r}.$$

Tā ka atbilstoši zīmējumam

$$FF_1 = EF \cdot \operatorname{tg} \gamma = l \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

bet

$$BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg} \gamma_{\max} = l \cdot \operatorname{tg} \gamma_{\max},$$

tad

$$l \cdot \operatorname{tg} \gamma = l \cdot \operatorname{tg} \gamma_{\max} \frac{\rho}{r},$$

vai (saīsinot ar l),

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_{\max} \frac{\rho}{r}.$$

Leņķi γ un $\gamma_{\max}$ ir ļoti mazi, tāpēc leņķu tangensus var aizvietot ar leņķu lielumu (radiānos):

$$\gamma = \frac{\rho}{r} \gamma_{\max}.$$

Kā redzams, bīdes leņķis γ ir tieši proporcionāls attālumam ρ no stieņa ass. Ja $\rho = 0$, arī $\gamma = 0$; ja $\rho = r$ (uz ārējās virsmas), $\gamma = \gamma_{\max}$.

Atsevišķu stieņa elementu bīdes deformāciju pavada bīdes spriegumu rašanās stieņa šķērsgrīzumos.

Ja ir zināms relatīvās nobīdes lielums, izmantojot Huka likumu bīdē, var noteikt bīdes spriegumus jebkurā šķērsgrīzuma punktā, kas atrodas attālumā ρ no šķērsgrīzuma centra:

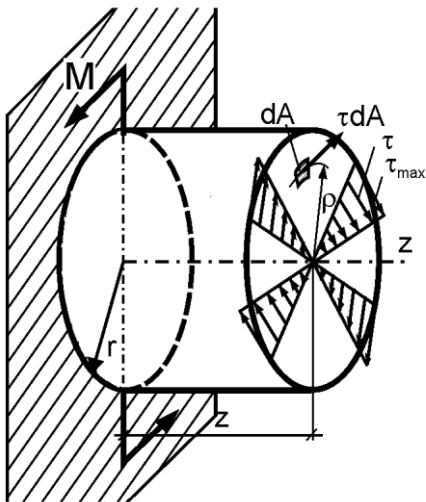
$$\tau = G\gamma = G \frac{\rho}{r} \gamma_{\max}.$$

Tā kā $G \cdot \gamma_{\max} = \tau_{\max}$ (maksimālais bīdes spriegums punktos, kuri visvairāk attālināti no centra),

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max}. \quad (9.1)$$

No formulas izriet, ka spriegumi šķērsgrīzumā mainās tieši proporcionāli aplūkojamā punkta attālumam ρ no šķērsgrīzuma centra, citiem vārdiem, lineāri mainās pa rādiusa garumu. Tā kā vērpes laikā elementu bīde notiek pa aploču pieskarēm, tad bīdes sprieguma virziens kādā šķērsgrīzuma punktā ir perpendikulārs attiecīgajam rādiusam.

Spriegumu sadalījums pa rādiusa garumu šķērsgrīzuma plaknē redzams att. 9.6. Spriegumi šķērsgrīzumā sadalīti nepārtraukti, t.i., darbojas katra tā punktā.



att. 9.6

Tagad, kad esam noteikuši bīdes spriegumu sadalījuma likumu stieņa šķērsgrīzumā, var nosacīt arī šo spriegumu lielumu atkarībā no vērpes momenta šķērsgrīzumā. Jebkurā stieņa šķērsgrīzumā iekšējie spēki reducējas uz spēkpāri, kas darbojas šķērsgrīzuma plaknē. Iekšējo bīdes spēku summāro momentu attiecībā pret stieņa asi sauc par vērpes momentu šajā šķērsgrīzumā.

Šķērsgrīzuma laukuma A robežās esošo elementāro laukumiņu apzīmēsim ar dA (att. 9.6).

Elementārais iekšējais spēks, kas darbojas uz attālumā ρ no stieņa ass novietoto laukumiņu dA , ir τdA . Šī spēka moments attiecībā pret stieņa asi vienāds ar $\tau dA \rho$.

Pēc definīcijas visu elementāro iekšējo bīdes spēku momentu summa veido vērpes momentu M_v attiecīgajā šķērsgrīzumā:

$$\int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = M_v.$$

Elementāro momentu τdA summēšana attiecināma uz visiem elementārajiem laukumiņiem, kas veido šķērsriezuma laukumu A .

Saskaņā ar formulu (9.1) aizstājot τ ar $\frac{\rho}{r} \tau_{\max}$ un konstanto reizinātāju $\frac{\tau_{\max}}{r}$ iznesot pirms integrāļa zīmes, iegūstam

$$\frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA = M_V.$$

Lielumu $\int_A \rho^2 dA$, ko iegūst, pa visu šķērsriezuma laukumu summējot elementāru laukumiņu reizinājumus ar šo laukumiņu attālumu no centra kvadrātiem, sauc par šķērsriezuma laukuma polāro inerces momentu un apzīmē ar I_p :

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Šo lielumu mēra vienībās, kas atbilst garuma mērvienību ceturtajai pakāpei (mm^4 , cm^4 , m^4). Izmantojot šo apzīmējumu, iegūstam

$$\frac{\tau_{\max}}{r} I_p = M_V,$$

no kurienes

$$\tau_{\max} = \frac{M_V r}{I_p}. \quad (9.2)$$

Ievērojot sakarību

$$\tau = \frac{\rho}{r} \tau_{\max}$$

atrodam, ka

$$\tau = \frac{M_V}{I_p} \rho.$$

Ar šo formulu apaļa stieņa vērpes gadījumā nosaka tangenciālā sprieguma lielumu jebkurā šķērsriezuma punktā.

Vislielāko vērtību spriegumi sasniedz punktos uz stieņa virsmas, t.i., no stieņa ass visvairāk attālinātajos punktos.

Formulu (9.2) var pārveidot šādi:

$$\tau_{\max} = \frac{M_V}{\left(\frac{I_p}{r}\right)} = \frac{M_V}{W_p}. \quad (9.3)$$

Attiecību $\frac{I_p}{r} = W_p$ sauc par šķērsriezuma laukuma polāro pretestības momentu. To mēra vienībās, kas atbilst garuma mērvienību kubam (mm^3 , cm^3 , m^3).

Meklēsim formulu savērpes leņķa noteikšanai. Atbilstoši att. 9.5 loks BB_1 aprēķināms šādi:

$$BB_1 = OB \cdot \varphi = r\varphi.$$

No taisnleņķa trīsstūra B_1AB

$$BB_1 = AB \cdot \operatorname{tg} \gamma_{\max} \approx l\gamma_{\max}.$$

Pielīdzinot abas izteiksmes vienu otrai, iegūstam sakarību starp stieņa savērpes leņķi un bīdes leņķi uz stieņa virsmas:

$$r\varphi = l\gamma_{\max}.$$

No šīs sakarības izsakot φ un ievērojot, ka $\tau_{\max} = G\gamma_{\max}$ iegūstam

$$\varphi = \frac{l}{r} \gamma_{\max} = \frac{l}{r} \cdot \frac{\tau_{\max}}{G},$$

vai, izmantojot formulu (9.2),

$$\varphi = \frac{l}{r} \cdot \frac{M_v r}{GI_p} = \frac{M_v l}{GI_p}. \quad (9.4)$$

Leņķis φ mērīts radiānos.

Pagrieziena leņķi φ pēc formulas (9.4) drīkst noteikt vienīgi stieņa posmam ar pastāvīgu šķērsriezumu, ja vērpes moments šī posma robežās ir nemainīgs. Vispārīgā gadījumā, kad šķērsriezuma izmēri un vērpes moments ir mainīgi lielumi, pie tam šo lielumu izmaiņas likums dažādos stieņa posmos ir dažāds, savērpes leņķi nosaka pēc formulas

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_v dz}{GI_p}, \quad (9.5)$$

kur

i — tā posma numurs, kura robežās saglabājas vērpes momenta M_v un polārā inerces momenta I_p izmaiņas likumi;

n — šādu posmu skaits pa visu stieņa garumu;

l_i — katra posma garums.

Ja stienim ir pakāpjveida šķērsriezums un vērpes moments pa stieņa garumu mainās nevis nepārtraukti, bet lēcienveidā, no formulas (9.5) izriet

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{vi} l_i}{GI_{pi}}. \quad (9.6)$$

Posmus ierobežo kā ārējo momentu pielikšanas vietas, tā arī vietas, kur mainās šķērsriezuma izmēri.

10. SALIKTIE SLOGOJUMI

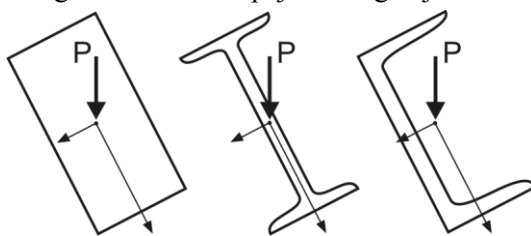
Iepriekš tika risināti uzdevumi, kuros stienis ieguva kādu no vienkāršākajiem deformāciju veidiem: vienasīgu stiepi vai spiedi, vērpi vai plakanu lieci. Prakse rāda, ka konstrukciju elementi vienlaicīgi tiek pakļauti piepūļu kombinācijām, kuru rezultātā veidojas sarežģīta kombinētu deformāciju aina. Kopņu stieņi reālās konstrukcijās (locīkla to savienojumu vietās ir tikai pieņēmums) tiek ne tikai stiepti vai spiesti, bet arī liekti. Rāmju piepūļu aprēķinos parasti nonākam pie secinājuma, ka gan statī, gan rīģeļi tiek pakļauti vienlaicīgām ass spēka, lieces momenta un šķērsspēka iedarbībām.

Izejas hipotēžu ietvaros (spēku darbības neatkarības princips lineāri deformējamu materiālu spriegumu diapazonā un mazi stieņu sistēmu pārvietojumi) ir spēkā apgalvojums, ka vienas iedarbes rezultāts ir neatkarīgs no otras iedarbes un līdz ar to rezultējošie spriegumi un deformācijas ir atsevišķo iedarbju rezultātu summa.

10.1. Greizā liece

Normālspriegumu noteikšanai liecē tika izmantota sakarība (8.10). Tomēr jāņem vērā, ka šī sakarība attiecināma uz gadījumu, kad visas ārējās piepūles darbojas vienā no galveno inerces momentu plaknēm, kura iet caur lieces centru (parasti šķēluma smaguma centru).

Praksē nākas saskarties ar gadījumiem, kad spēku darbības plakne nesakrīt ne ar vienu no stieņa šķērsgriezuma simetrijas plaknēm. Eksperimenti rāda, ka stieņa izliektā ass šai gadījumā neatradīsies spēku darbības plaknē un realizēsies tā saucamā greizā liece. Att. 10.1 parādīti daži no greizās lieces iespējamiem gadījumiem.



att. 10.1

Iepazīsimies ar spriegumu un pārvietojumu noteikšanas metodiku, slogojot vienā galā iespīlētu taisnstūrveida šķērsgriezuma siju ar spēku P , kurš darbojas šķēluma plaknē un vērsts virzienā, kas veido leņķi α ar galveno asi Cy (att. 10.2).

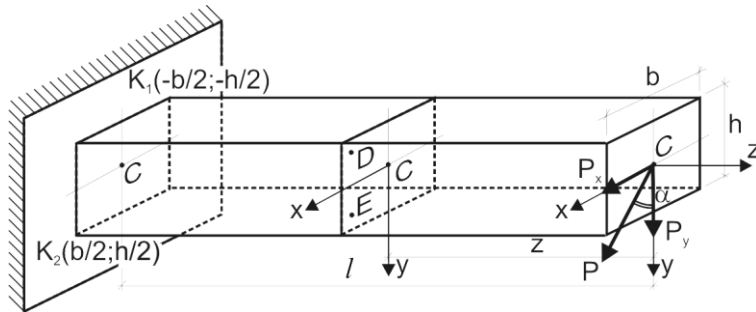
Sijas stiprības pārbaudei nepieciešams noteikt punktu, kurā veidojas maksimālais normālspriegums. Sadalām spēku P komponentēs P_x un P_y , kuras vērstas galveno inerces asu Cy un Cx virzienos.

Spēka komponentu vērtības nosaka sakarības:

$$P_x = P \sin \alpha; \quad P_y = P \cos \alpha.$$

Aizvietojot ārēji pielikto spēku P ar tā komponentēm P_x un P_y , esam reducējuši greizās lieces slogojumu uz divām plaknām liecēm galvenajās inerces plaknēs. Summējot katrā no šīm liecēm iegūtās spriegumu vai deformāciju vērtības, iegūstam attiecīgos

rezultātus greizajā liecē.



att. 10.2

Noteiksim pilno normālspriegumu vērtību šijas plaknē, kura atrodas attālumā z no slozdes pielikšanas plaknes, punktā E ar koordinātēm x_E, y_E . Spēku komponentes P_x un P_y punktu E un D plaknē veido momentu komponentes

$$M_y = -P_x \cdot z = -Pz \sin \alpha;$$

$$M_x = -P_y \cdot z = -Pz \cos \alpha.$$

Lieces momenta M_x (negatīvs atbilstoši pieņemtajam zīmju likumam šijas liecē) rezultātā punktā E rodas spiedes spriegumi, kurus nosaka sakarība

$$\frac{M_x \cdot y_E}{I_x}.$$

Līdzīgā veidā lieces moments M_y punktā E arī izraisa spiedes spriegumu, un tā vērtība ir

$$\frac{M_y \cdot x_E}{I_y}.$$

Tātad šijas punktā E veidojas spiedes spriegums

$$\sigma_E = -Pz \left(\frac{y_E \cos \alpha}{I_x} + \frac{x_E \sin \alpha}{I_y} \right).$$

Līdzīgā veidā varam noteikt arī normālspriegumu vērtību citos šķēluma punktos. Tā, piem., punktā $D(x_D, y_D)$ normālspriegums veidojas kā summa no stiepes sprieguma

$$\frac{M_x \cdot y_D}{I_x} \text{ (} y_D \text{ ir negatīvs) spiedes sprieguma } \frac{M_y \cdot x_D}{I_y} \text{ (} x_D \text{ ir pozitīvs).}$$

Tātad summārais normālspriegums punktā D ir

$$\sigma_D = -Pz \left(\frac{y_D \cos \alpha}{I_x} + \frac{x_D \sin \alpha}{I_y} \right).$$

Spriegumu noteikšanas metodika šijas šķērsgrīzumā greizās lieces gadījumā tika ilustrēta vienam konkrētam šijas nostiprinājuma un slogojuma gadījumam, bet tā ir vispā-

rināma arī visiem citiem sijas balstīšanas gadījumiem pie patvaļīga slodzes izvietojuma.

No sijas stiprības viedokļa svarīgi noteikt maksimālās spiedes un stiepes normālspriegumu vērtības. Konsolsijas gadījumā šīs vērtības būs sijas iespīlējuma plaknē (tātad, pie nosacījuma $z = l$) punktos K_1 un K_2 .

Maksimālā stiepes spriegumu vērtība ir

$$\sigma_{K_1}^+ = Pl \left(\frac{h \cos \alpha}{2I_x} + \frac{b \sin \alpha}{2I_y} \right) = \frac{6Pl}{bh} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right),$$

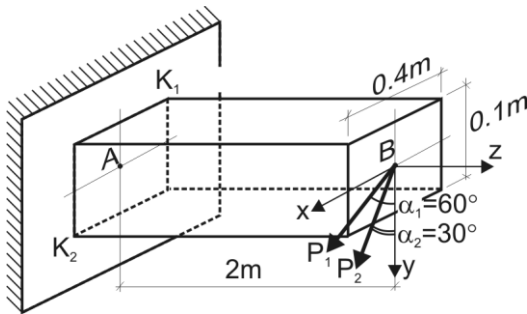
bet maksimālā spiedes spriegumu vērtība

$$\sigma_{K_2}^- = -\frac{6Pl}{bh} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right).$$

Sijas stiprības nosacījumu, līdzīgi kā plakanajā liecē, nosaka sakarība

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma], \quad (10.1)$$

kurā $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{K_1}^+| \text{ vai } |\sigma_{K_2}^-|$.



Piemērs 10.1. Noteikt, par cik atšķiras spēku P_1 vai P_2 graužošā vērtība sijai (sk. att.), ja šie spēki darbojas dažādās plaknēs, kuras orientētas 60° lenķi pret šķēluma vertikālo vai horizontālo simetrijas plakni. Materiāla pieļaujamais normālspriegums ir $[\sigma] = 12 \text{ MPa}$.

Atrisinājums. Maksimālās normālspriegumu vērtības veidosies sijas iespīlējuma plaknē punktos K_1 un K_2 . Pirmajā slogojuma gadījumā, kad spēka darbības plakne ar vertikālo plakni veido 60° lenķi, izmantojot iepriekš iegūtās sakarības, iegūstam:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{K_1}^+| = |\sigma_{K_2}^-| = \frac{6 \cdot P_1 \cdot 2}{0,4 \cdot 0,1} \left(\frac{\cos 60^\circ}{0,1} + \frac{\sin 60^\circ}{0,4} \right) = 2,15 \cdot 10^3 P_1.$$

Tā kā no stiprības viedokļa jāizpildās nosacījumam:

$$2,15 \cdot 10^3 P_1 \leq 12 \cdot 10^3 \text{ KPa},$$

tad sijas stiprība attiecībā uz normālspriegumiem tiks nodrošināta gadījumā, ja

$$P_1 \leq 5,58 \text{ kN}.$$

Gadījumā, ja sija tiek slogota ar spēku P_2 , kura darbības plakne veido 60° lenķi ar horizontālo plakni, t.i., ar vertikālo plakni veido 30° lenķi, iegūstam, ka

$$\sigma_{\max} = 2,973 \cdot 10^3 P_2.$$

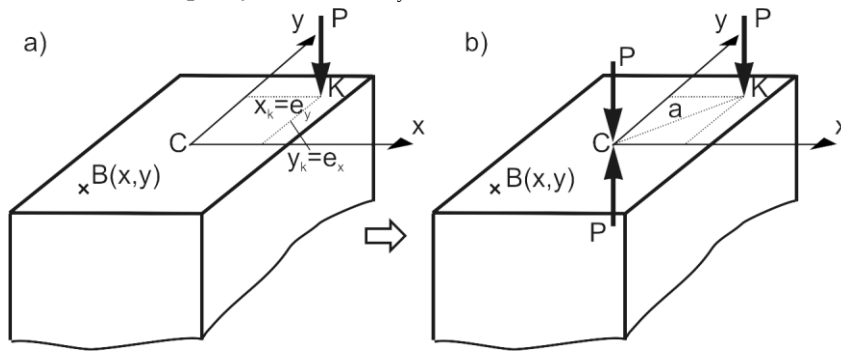
Tātad, saskaņā ar stiprības nosacījumu pieliktais spēks P_2 nedrīkst pārsniegt vērtību

$$P_2 = 4,04 \text{ kN}.$$

Esam konstatējuši, ka otrā veida slogojums no stiprības viedokļa attiecībā uz normālsprīegumiem ir bīstamāks. Robežslodžu vērtības konkrētajos slogojumu gadījumos atšķiras par 1,54 kN.

10.2. Ekscentriskā spiede

Noskaidrosim kā sadalās spriegumi kolonnā, kura ir slogota ar koncentrētu spēku punktā K, kurš nesakrīt ar šķēluma smaguma centru C (att. 10.3a). Slodzes pielikšanas punkta K koordinātes ir x_k un y_k . Vienlaicīgi šīs koordinātes ir arī spēka P pielikšanas punkta ekscentrisitātes pret y un x asīm e_y un e_x .



att. 10.3

Lai noteiktu spriegumus jebkurā patvaļīgi izvēlētajā punktā B(x,y), papildinām doto slogojuma shēmu ar šķēluma smagumcentrā C kolonnas ass virzienā pieliktiem diviem pretēji vērstiem spēkiem P (att. 10.3b). Tādā gadījumā kolonnas šķēlums ir noslogots divos neatkarīgos veidos: ar spiedes spēku P šķērsgrīezuma smagumcentrā un spēkpāri $M = Pa$ ar plecu $a = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$.

Spiedes spēka darbības rezultātā kolonnas šķērsgrīzumā rodas konstanti spiedes spriegumi

$$\sigma' = -\frac{P}{A}. \quad (10.2)$$

Spēkpāris rada lieces momentus. Tā kā spēkpāra darbības plakne nesakrīt ar šķēluma galvenajām asīm, veidojas greizā liece, kuras lieces momentu komponentes pret x un y asīm nosaka sakarības

$$M_x = P \cdot e_y; \quad M_y = P \cdot e_x. \quad (10.3)$$

Līdz ar to patvaļīgā punktā B veidojas spriegumi

$$\sigma'' = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \sigma''' = -\frac{M_y}{I_y} \cdot x. \quad (10.4)$$

Spriegumu σ'' un σ''' vērtības var būt kā negatīvas tā arī pozitīvas (atkarībā no koordinātu x un y zīmes). Rezultējošais spriegums brīvi izvēlētajā punktā veidojas kā spriegumu summa no centriskās spiedes un greizās lieces

$$\sigma(x, y) = -\frac{P}{A} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (10.5)$$

Ievietojot momentu vērtības atbilstoši sakarībām (10.3), iegūstam pārveidotu izteiksmi

$$\sigma(x, y) = -\frac{P}{A} - \frac{P \cdot e_x \cdot y}{I_x} - \frac{P \cdot e_y \cdot x}{I_y} = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{A}{I_x} e_x y + \frac{A}{I_y} e_y x \right).$$

Izmantojot apzīmējumus $\frac{I_x}{A} = i_x^2$ un $\frac{I_y}{A} = i_y^2$, kur i_x un i_y ir šķēluma inerces rādiusi, iegūstam sakarību spriegumu noteikšanai patvaļīgā ekscentriski spiesta stieņa punktā:

$$\sigma(x, y) = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{e_y x}{i_y^2} + \frac{e_x y}{i_x^2} \right) \quad (10.6)$$

Svarīgi ņemt vērā, ka parametri e_x un e_y nosaka ekscentriskās slodzes pielikšanas vietu un to vērtības jālieto ņemot vērā to zīmes izvēlētajā koordinātu sistēmā.

Ekscentriskās spiedes gadījumā normālspriegumi var būt gan negatīvi (spiede), gan pozitīvi (stiepe), gan arī nulle. Pielīdzinot izteiksmi (10.6) nullei, iegūstam vienādojumu taisnei, kas atdala šķēluma spiesto un stiepto daļu:

$$1 + \frac{e_y}{i_y^2} x + \frac{e_x}{i_x^2} y = 0. \quad (10.7)$$

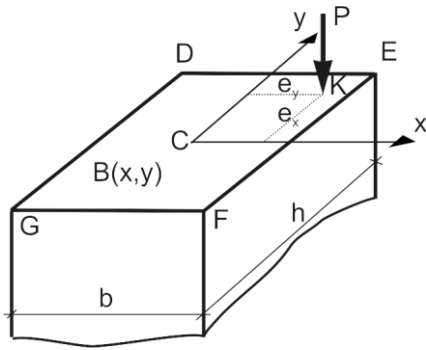
Vienādojums (10.7) nosaka taisni, kura neiet caur koordinātu sākumpunktu un vispārīgā gadījumā var atrasties ārpus stieņa šķērssrieguma robežām (šajā gadījumā šķēlumā būs tikai spiedes spriegumi).

Gadījumā, ja stieņa šķērssriegums ir taisnstūris ar malu garumiem b un h (att. 10.4), normāls-

spriegumu vērtības šķēluma punktos GDEF nosakām ar sakarībām (10.6), ievietojot atbilstošās koordinātu vērtības. Svarīgi ņemt vērā, ka šo punktu koordinātes šķēluma galvenajās asīs ir sekojošas:

$$D\left(-\frac{b}{2}; \frac{h}{2}\right); \quad E\left(\frac{b}{2}; \frac{h}{2}\right); \quad F\left(\frac{b}{2}; -\frac{h}{2}\right); \quad G\left(-\frac{b}{2}; -\frac{h}{2}\right)$$

Spriegumu vērtības šajos robežpunktos ir



att. 10.4

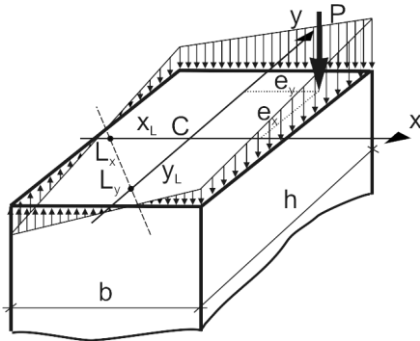
$$\sigma_D = -\frac{P}{A} \left(1 - \frac{e_x}{i_y^2} \frac{b}{2} + \frac{e_y}{i_x^2} \frac{h}{2} \right); \quad \sigma_E = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{e_x}{i_y^2} \frac{b}{2} + \frac{e_y}{i_x^2} \frac{h}{2} \right); \quad (10.8)$$

$$\sigma_F = -\frac{P}{A} \left(1 + \frac{e_x}{i_y^2} \frac{b}{2} - \frac{e_y}{i_x^2} \frac{h}{2} \right); \quad \sigma_G = -\frac{P}{A} \left(1 - \frac{e_x}{i_y^2} \frac{b}{2} - \frac{e_y}{i_x^2} \frac{h}{2} \right).$$

Sakarības (10.8) dod iespēju secināt, ka punktā E ir vislielākais spiedes spriegums, bet punktā G varētu būt arī stiepes spriegums. Kā jau tika minēts, spriegumu zīme mainās pa taisni, kuras stāvokli nosaka vienādojums (10.7). Ievietojot pēc kārtas šajā vienādojumā argumentu vērtības $x = 0$ un $y = 0$, nosakām nogriežņus, kurus nulles taisne atšķēļ uz koordinātu asīm x un y . Ievietojot vienādojumā (10.7) $x = 0$, iegūstam vērtību

$$CL_y = y_L = -\frac{i_x^2}{e_x}, \text{ bet ja ievietojam } y = 0, \text{ iegūstam vērtību } CL_x = x_L = -\frac{i_y^2}{e_y} \text{ (att. 10.5).}$$

Atliekot attiecīgos nogriežņus uz koordinātu asīm un savienojot punktus L_x un L_y ar taisni, iegūstam nulles līniju.



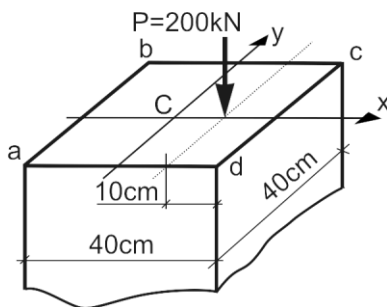
att. 10.5

Pa labi no šīs līnijas ir spiestā stieņa daļa, bet pa kreisi – stieptā daļa.

Pie mazām ekscentritāšu e_x vai e_y vērtībām, nogriežņu CL_x un CL_y garumi var būt lielāki par $b/2$ vai $h/2$ un nulles taisne atrasties ārpus stieņa šķērsgriezuma. Šādā gadījumā šķēlumā radīsies tikai spiedes spriegumi.

Att. 10.5 parādīts ar spēku P ekscentriski spiesta stieņa normālspriegumu epīras raksturs.

Speciālā gadījumā, kad ekscentriski novietotā spēka pielikšanas punkts atrodas uz kādas no šķēluma galvenām asīm x vai y , neitrālā ass orientēta paralēli vienai no šīm asīm.



Piemērs 10.2. Uzkonstruēt normālspriegumu epīru šķēlumā **abcd** ekscentriski spiestai kolonnai. Noteikt, kāda ir attiecība starp maksimālajām spiedes un stiepes spriegumu vērtībām un par cik atšķiras maksimālais spiedes spriegums ekscentriskā spiedē no spiedes spriegumiem vienlielā centriskā spiedē.

Atrisinājums. Doto slogojuma shēmu reducējam uz ekvivalentu, kuru veido ass spēks P šķēluma smaguma centrā C un spēkpāris $M = P \cdot e$. Ar e

apzīmēta novirze no simetrijas ass. Mūsu gadījumā tā ir 10 cm. Tātad spēkpārim atbilstošā lieces momenta vērtība ir $M = P \cdot e = 200 \cdot 0,1 = 20 \text{ kNm}$ Šķēluma $abcd$ laukums ir $A = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \text{ m}^2$, bet inerces moments pret y asi

$$I_y = \frac{(0,4)^4}{12} = 21,33 \cdot 10^{-4} m^4.$$

Šķēluma inerces rādiuss pret y asi ir

$$i_y = \sqrt{21,33 \cdot 10^{-4} / 0,16} = 0,1154 m,$$

bet pretestības moments

$$W = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{21,33 \cdot 10^{-4}}{0,2} = 10,67 \cdot 10^{-3} m^3.$$

Izmantojot noteiktās šķēluma abcd raksturojošo parametru vērtības, nosakām spriegumus no centriskās spiedes

$$\sigma_{sp} = -\frac{P}{A} = -\frac{200 \cdot 10^3 N}{0,16 m^2} = -1,25 MPa;$$

spriegumus uz šķautnes ab, kurus izraisa spēkpāra moments M

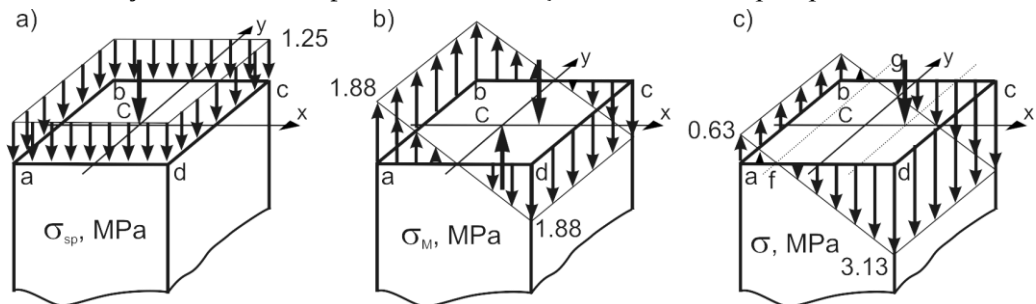
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M}{W} = \frac{20 \cdot 10^3 Nm}{10,67 \cdot 10^{-3} m^3} = 1,87 MPa;$$

spriegumus uz šķautnes cd, kurus izraisa moments M

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{M}{W} = -\frac{20 \cdot 10^3 Nm}{10,67 \cdot 10^{-3} m^3} = -1,87 MPa.$$

Tātad, ekscentriskās spiedes rezultātā uz šķautnes **ab** veidojas stiepes spriegumi $\sigma_{ab} = \sigma_{sp} + \sigma_{\max}^+ = -1,25 + 1,87 = 0,62 MPa$, bet uz šķautnes **cd** veidojas spiedes spriegumi $\sigma_{cd} = \sigma_{sp} + \sigma_{\max}^- = -1,25 - 1,87 = -3,12 MPa$.

Aprēķinu rezultātā konstruējam divas epīras – no centriskās spiedes σ_{sp} (att. 10.6a) un lieces momenta σ_M (att. 10.6b). Summējot šīs epīras, iegūstam spriegumu epīru σ , kura veidojas ekscentriski spiestas kolonnas šķēlumā **abcd**. Šī epīra parādīta att. 10.6c.



att. 10.6

No iegūtajiem aprēķinu rezultātiem varam konstatēt, ka ekscentriskās spiedes rezultātā šķēlumā **abcd** maksimālo spiedes un stiepes spriegumu attiecība ir $\sigma_{ab} / \sigma_{cd} = 3,12 / 0,62$

= 5,03, bet ekscentrisitātes dēļ kolonnā rodas spiedes spriegumi, kuru maksimālā vērtība ir 2,5 reizes lielāka par spriegumiem vienlielā centriskā spiedē.

Attēlā 10.6c līnija fg ir nulles līnija. Uz šīs līnijas spriegumi ir nulle. Līnijas stāvokli nosaka sakarība

$$CL_x = x_L = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{0,1154^2}{0,1} = 0,133m.$$

Interesi izraisa jautājums - cik lielas ekscentrisitātes gadījumā nulles līnijas stāvoklis sakrīt ar šķautni ab. Tā kā $e_y = -i_y^2/x_L$, bet $x_L = -0,2m$, tad $e_y = 0,067m$. Tātad, ja spēks P pielikts kolonai attālumā 6,7 cm no šķēluma smaguma centra, tad šķēluma neitrālā ass sakrītīs ar šķēluma malu un tātad stiepes spriegumu šķēlumā nebūs.

10.3. Šķēluma kodols

Atkarībā no spiedes spēka pielikšanas punkta K atrašanās vietas, kolonnas šķēluma veida un izmēriem, necentriski spiesta stieņa (kolonnas) šķēlumā var veidoties kā spiedes, tā arī stiepes spriegumi. Izgatavojot stieņus no materiāliem, kuriem ir zema stiepes stiprība (betons, mūris), svarīgi panākt, lai arī ekscentriski spiestā stieņa viss šķēlums būtu tikai spiests.

Stiepes spriegumi neradīsies, ja ekscentrisitāte būs „pietiekami maza”, t.i. tā nepārsniegs noteiktas robežas. Stiepes spriegumu esamību nosaka neitrālās ass stāvoklis. Ja neitrālā ass krusto kolonnas šķēlumu, tad vienā tās pusē veidojas spiedes, bet otrā pusē stiepes spriegumi.

Konstruktoram vēlams zināt, cik liela ekscentrisitāte konkrētas formas šķēlumam pieļaujama, neriskējot spiestajā stienī izraisīt stiepes spriegumus.

Tātad, lai šķēlumā neveidotos stiepes spriegumi ir nepieciešams, lai neitrālā ass atrastos ārpus šķēluma kontūra vai uz tā robežas.

Spiedes spēka P pieļaujamās maksimālās ekscentricitātes noteikšanai izmanto robežgadījumu, kad neitrālā ass šķēluma kontūrai tikai pieskaras.

Aprēķinot maksimālās ekscentrisitātes dažādos virzienos, attēlojot tās grafiski uz izvēlētajiem virzieniem un savienojot katras blakus esošās ekscentrisitātes galus, iegūstam ap šķēluma smaguma centru noslēgtu kontūru, ko sauc par **šķēluma kodolu**. Kodols raksturo to šķēluma apgabalu, kura robežās, slogojot stieni ar spiedes spēku, stienī neradīsies stiepes spriegumi.

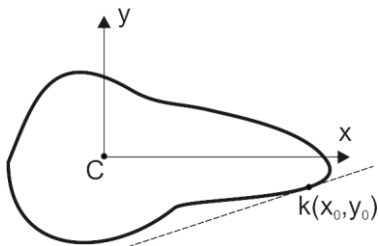
Ar līkni norobežota šķēluma kodols

Neitrālā ass ir šķēluma kontūras pieskare. Pieskaršanās punkti jāizvēlas tā, lai neitrālā ass nešķērsotu šķēluma kontūru.

Šķēluma kontūru (sk. att.) vispārīgā veidā apraksta vienādojums:

$$y = f(x).$$

Pieņemam, ka koordinātu asis x un y ir galvenās centrālās inerces asis. Caur kontūra punktu K(y_0, x_0)



novilkto pieskari apraksta vienādojums:

$$y - y_0 = (x - x_0) f'(x_0).$$

Pārveidojam šo vienādojumu formā

$$\frac{x}{b_1} + \frac{y}{c_1} - 1 = 0,$$

kur parametri b_1 un c_1 nosaka taisnes atšķelto nogriežņu garumus uz koordinātu asīm un to vērtības ir:

$$b_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} y_0 \quad c_1 = y_0 - x_0 f'(x_0).$$

Tā kā neitrālās ass vienādojumam ir analoga forma

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{c} - 1 = 0,$$

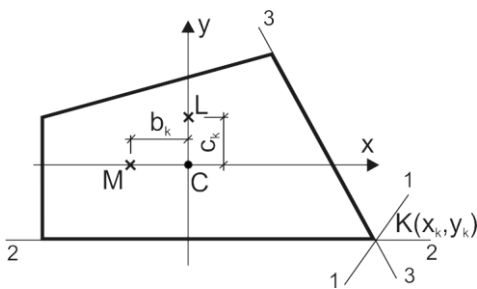
kur $b = -\frac{i_y^2}{e_y}$ un $c = -\frac{i_x^2}{e_x}$.

Pielīdzinot atbilstošos parametrus $b_1 = b$ un $c_1 = c$, iegūstam

$$\frac{e_x}{i_x^2} = -\frac{1}{y_0 - x_0 f'(x_0)}, \quad \frac{e_y}{i_y^2} = -\frac{f'(x_0)}{y_0 - x_0 f'(x_0)}.$$

No šīm sakarībām iespējams aprēķināt y_0 un x_0 atkarībā no spēka pielikšanas punkta koordinātēm e_x un e_y .

Tā kā punkts $K(x_0, y_0)$ atrodas uz šķēluma kontūras (līknes), tad ievietojot šo koordinātu vērtības, kas izteiktas caur e_x un e_y , līknes vienādojumā, iegūstam kodola kontūras vienādojumu šķēluma galveno centrālo inerces asu sistēmā.



Daudzstūra gadījumā neitrālā ass var griezties ap daudzstūra virsotnēm līdz tā sakrīt ar daudzstūra malām. Ja neitrālā ass iet caur daudzstūra virsotni K, tad šīs virsotnes koordinātes y_k un x_k apmierina neitrālās ass vienādojumu. Ievietojot šīs koordinātes vienādojumā (10.7), iegūstam:

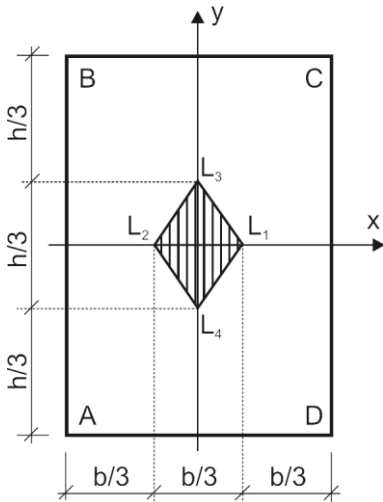
$$\frac{y_k}{i_x^2} e_x + \frac{x_k}{i_y^2} e_y + 1 = 0.$$

Šajā vienādojumā tekošās koordinātes ir spēka pielikšanas punkta koordinātes e_x un e_y . Tas nozīmē, ka neitrālai asij griežoties ap daudzstūra virsotni līdz tā sakrīt ar daudzstūra malām, spēka iedarbības punkts pārvietojas pa taisni. Šī taisne dod kodola kontūras vienu malu. Katrai virsotnei ir atsevišķa taisne. Taisnēm krustojoties, izveidojas kodola kontūras. Kodola malu konstruēšanai nosakām taisnes nogriežņus uz koordinātu asīm:

$$b_k = -\frac{i_y^2}{x_k}; \quad c_k = -\frac{i_x^2}{y_k}.$$

Jāievēro y_k un x_k zīmes pret šķēluma galvenajām centrālajām asīm.

Ja neitrālā ass sakrīt ar malu 2 – 2, tad spēks ir pielikts punktā L. Ja sakrīt ar malu 3 – 3, tad P ir pielikts punktā M. Kad spēks pa taisni pārvietojas no L uz M, tad neitrālā ass griežas ap punktu K.



Taisnstūra šķērssgriezuma gadījumā neitrālā ass sakrīt ar taisnstūra malām pie nosacījuma, ka ekscentriskā slodze atrodas uz centrālajām asīm attālumā $h/6$ vai $b/6$ no šķērssgriezuma smaguma centra C. Pie šāda secinājuma nonākam, neitrālās ass vienādojumā (10.7) ievietojot parametra vērtību $e_x = 0$ un nosakot ekscentricitātes e_y vērtību pie nosacījuma $x = \pm b/2$. Rezultātā iegūstam divas e_y vērtības:

$$e_y = -i_y/(\pm b/2) = \pm b/6.$$

Analogā veidā iegūstam $e_x = \pm h/6$.

Tādā veidā esam ieguvuši četrus punktus L_1 , L_2 , L_3 , L_4 uz šķēluma simetrijas asīm. Pārvietojoties slodzei pa taisni L_1L_3 , neitrālā ass pagriežas ap punktu A. Līdzīgā veidā, pārvietojoties slodzei pa

taisnēm L_1L_4 , L_2L_4 un L_2L_3 , neitrālā ass pagriežas ap punktiem B, C un D. Šķēluma iesvītrotā daļa veido taisnstūra ABCD šķēluma kodolu

11. STIPRĪBAS KRITĒRIJI

11.1. Sprieguma un deformāciju stāvoklis punktā

Jau iepriekš tika konstatēts, ka stiepta vai spiesta stieņa dažādos šķēlumos rodas atšķirīgs spriegumu stāvoklis. Vispārīgā gadījumā rodas divas sprieguma komponentes – normālspriegumi un tangenciālie (bīdes) spriegumi. Šo spriegumu vērtības ir atkarīgas no šķēluma orientācijas attiecībā pret stieņa asi un nosakāmas ar sakarībām: $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$, $\tau_\alpha = 0,5\sigma \sin 2\alpha$. Tātad normālspriegumu maksimālās vērtības ir šķēlumos, kuri perpendikulāri stieņa ass virzienam, bet tangenciālo – šķēlumos, kuri orientēti zem 45° leņķa attiecībā pret stieņa asi. Sarežģītākos stieņu sloojuma gadījumos maksimālo spriegumu vērtības un plaknes, kurās tie darbojas, nosakāmas ņemot vērā slodžu izraisīto spriegumu lielumus un to darbības virzienus. Veidojas problēma par deformētu ķermeņa spriegumstāvokli konkrētā punktā.

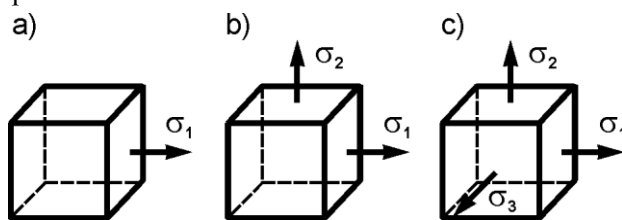
Par spriegumstāvoklī punktā sauc spriegumu kopu jebkurā iespējamā šķēlumā, kurš iet caur doto punktu.

Stieņa centriska stiepe vai spiede ir vienkāršākais stieņa deformēšanas veids, jo šajā gadījumā visu stieņa punktu spriegumstāvoklis ir vienāds (viendabīgs spriegumstāvoklis). Vispārīgā gadījumā stieņos spriegumu stāvoklis ir nevienmērīgs – no punkta uz punktu tas mainās. Līdz ar to jebkurā stieņa šķēlumā spriegumi sadalās nevienmērīgi. Lai raksturotu spriegumstāvokli punktā, ap to izveido paralelepipedu ar malu garumiem dx , dy un dz .

Tā kā šāds paralelepipeds ir bezgala mazs, tad var uzskatīt, ka spriegumi visos tā punktos ir vienādi un sakrīt ar spriegumiem izvēlētajā punktā. Līdz ar to var uzskatīt, ka uz visām paralelepipeda skaldnēm un arī jebkurā tā šķēlumā spriegumi sadalīti vienmērīgi. Spriegumi uz paralelepipeda skaldnēm tiek uzskatīti par zināmiem, bet spriegumi tā šķēlumos tiek noteikti no atšķēlētās daļas līdzsvara nosacījumiem. Turpmākos izklāstos tiks pierādīts, ka patvaļīgi orientētam paralelepipedam vienmēr ir iespējams izvēlēties tādu orientāciju, lai uz tā skaldnēm darbotos tikai normālspriegumi.

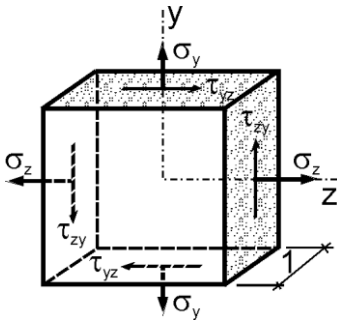
Tādas plaknes, kurās nedarbojas bīdes spriegumi, sauc par **galvenajām**, bet tām perpendikulāros normālspriegumus par **galvenajiem spriegumiem**.

Spriegumstāvokļu klasifikāciju ērti veikt izmantojot galvenos spriegumus. Atkarībā no tā vai stiepes (spiedes) galvenie spriegumi darbojas attiecīgi vienā, divās vai trīs savstarpēji perpendikulārās plaknēs (att. 11.1), izšķir vienasīgu, divasīgu vai trīsasīgu spriegumstāvokli punktā.



att. 11.1

11.1.1. Spriegumu zīmju likums



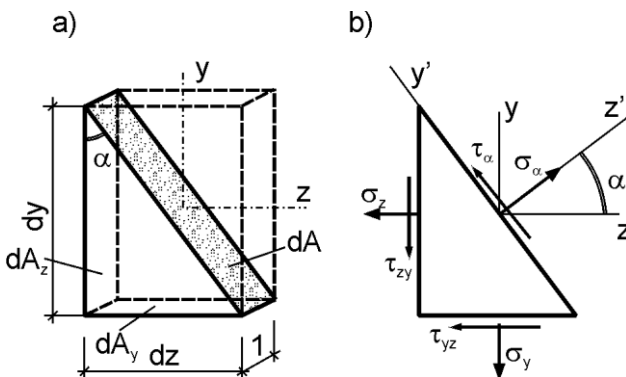
att. 11.2

Tiek pieņemts, ka stiepes spriegumi ir pozitīvi, bet spiedes spriegumi – negatīvi. Attiecībā uz bīdes spriegumiem pieņemsim, ka pirmais indekss norāda bīdes sprieguma darbības plaknes normāles virzienu, bet otrais indekss norāda virzienu, kurā darbojas bīdes spriegums šai plaknē. Bīdes spriegumu zīme ir saistīta ar koordinātu asu virzieniem. Izmantosim ārējās normāles likumu. Saskaņā ar to gadījumos, kad sprieguma darbības plaknes ārējā normāle sakrīt ar attiecīgās koordinātu ass virzienu un sprieguma darbības virziens šai plaknē sakrīt ar attiecīgās koordinātu ass virzienu, tad spriegums ir pozitīvs. Ja normāles vai sprieguma darbības virziens nesakrīt ar asu pozitīvajiem virzieniem, bīdes spriegums ir negatīvs.

Visi uz kuba skaldnēm attēlā 11.2 redzami spriegumi ir pozitīvi.

11.1.2. Spriegumi slīpos šķēļumos plakana spriegumstāvokļa gadījumā

Paralelepipedu (att. 11.3), kurš slogots y un z ass virzieniem perpendikulārās plaknēs pāršķēlam ar slīpu plakni. Šī plakne ar asi y veido leņķi α . Šķēluma plaknē vispārīgā gadījumā veidojas spriegumi σ_α un τ_α , kuri nav zināmi un ir jānosaka. Izveidojam koordinātu asis y' un z' , kuru orientācija redzama att. 11.3b. Šīs asis iegūtas izdarot asu xy pagriezienu par leņķi α pozitīvā virzienā. Par pozitīvu tiek pieņemts virziens, kurā



att. 11.3

pagrieziens no ass z uz asi y tiek veikts pa īsāko ceļu. Mūsu gadījumā, tas ir virziens pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam. Atbilstoši att 11.3 varam konstatēt, ka

$$dA_z = 1 \cdot dy = dA \cos \alpha,$$

$$dA_y = 1 \cdot dz = dA \sin \alpha.$$

Spriegumu noteikšanai slīpajā šķēlumā izmantojam atšķeltās prizmas līdzsvara nosacījumus. Projicējot uz prizmas

skaldnēm darbojošos spēkus uz z' un y' asīm, iegūstam vienādojumus

$$\sigma_\alpha dA - \sigma_z dA_z \cos \alpha - \sigma_y dA_y \sin \alpha - \tau_{zy} dA_z \sin \alpha - \tau_{yz} dA_y \cos \alpha = 0,$$

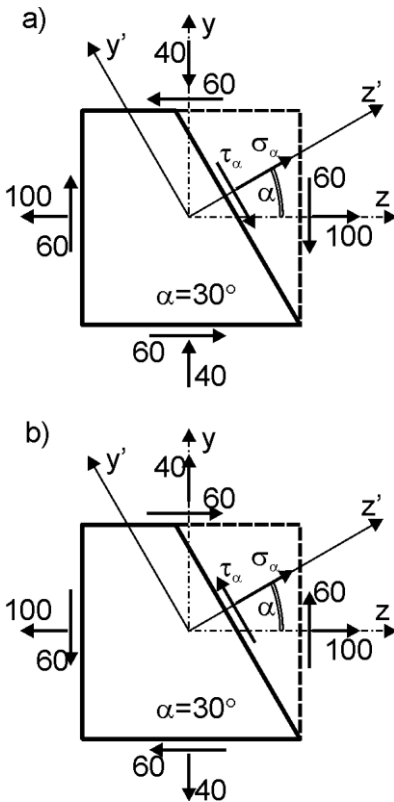
$$\tau_\alpha dA + \sigma_z dA_z \sin \alpha - \sigma_y dA_y \cos \alpha - \tau_{zy} dA_z \cos \alpha + \tau_{yz} dA_y \sin \alpha = 0.$$

Ievietojot dA_z un dA_y un izmantojot bīdes spriegumu pāra likumu, kura rezultātā $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ iegūstam formulas normālo un tangenciālo spriegumu noteikšanai slīpos šķēļumos:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha, \quad (11.1)$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (11.2)$$

Piemērs 11.1. Attēlā doti divi plakani spriegumstāvokļi punktā. Jānosaka spriegumi σ_{α} un τ_{α} šķēlumā, kurš pagriezts par $\alpha = 30^\circ$.



Atrisinājums.

a) Saskaņā ar ārējās normāles likumu

$$\sigma_z = 100 \text{ MPa};$$

$$\sigma_y = -40 \text{ MPa};$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -60 \text{ MPa}.$$

Ievietojot šīs vērtības formulā (11.1) un (11.2), iegūstam

$$\begin{aligned} \sigma_{30} &= 100 \cos^2 30^\circ - 40 \sin^2 30^\circ - \\ &- 60 \sin 60^\circ = 13 \text{ MPa}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{30} &= -\frac{100 + 40}{2} \sin 60^\circ - \\ &- 60 \cos 60^\circ = -82 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

b)

$$\sigma_z = 100 \text{ MPa};$$

$$\sigma_y = 40 \text{ MPa};$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = 60 \text{ MPa}.$$

Izmantojot spriegumu aprēķina formulas slīpos šķēlumos, iegūstam

$$\sigma_{30} = 100 \cos^2 30^\circ + 40 \sin^2 30^\circ + 60 \sin 60^\circ = 137 \text{ MPa};$$

$$\tau_{30} = -\frac{100 - 40}{2} \sin 60^\circ + 60 \cos 60^\circ = 4 \text{ MPa}.$$

Salīdzinot iegūtos rezultātus, konstatējam, ka sākumstāvokļa spriegumu vērsums būtiski izmaina spriegumu vērtības slīpajā šķēlumā.

11.1.3. Galvenie spriegumi

Kā jau konstatējām iepriekš, spriegumi slīpos šķēlumos ir atkarīgi no šo šķēlumu orientācijas pret pamatasīm zy . Mainoties šķēluma slīpumam izmainās spriegumu vērtības un rodas loģisks jautājums, kādā gadījumā šie spriegumi iegūst maksimālās vērtības.

Lai to noteiktu, veicam sprieguma σ_α ekstrēma aprēķinu, t.i. pielīdzinām nullei atvasinājumu $d\sigma_\alpha/d\alpha$ izmantojot sakarību (11.1). Tā rezultātā iegūstam vienādojumu

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \left(-\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \right) = 0. \quad (11.3)$$

Izmantojot formulu (11.2), konstatējam, ka nosacījums (11.3) ir līdzvērtīgs nosacījumam

$$2\tau_\alpha = 0 \quad (11.4)$$

Tātad kādai pagrieziņa leņķa vērtībai $\alpha = \alpha_0$, kurai atbilst nosacījums $\tau_{\alpha_0} = 0$ atbilst ekstremāla normālsprieguma vērtība.

Līdz ar to varam izdarīt svarīgu secinājumu: plaknēs, uz kurām darbojas ekstremālas normālspriegumu vērtības, bīdes spriegumi ir nulle. Šādas plaknes sauc par galvenajām un tām atbilstošos spriegumus par galvenajiem spriegumiem punktā.

No vienādojuma (11.3) varam noteikt galveno plakņu normālu slīpuma leņķi α_0 . Šo vērtību aprēķinām ar formulu

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (11.5)$$

Izteiksme (11.5) nosaka divus savstarpēji perpendikulārus virzienus ar slīpuma leņķiem α'_0 un $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$, kuros darbojas galvenie spriegumi $\sigma_{\max}$ un $\sigma_{\min}$. Izmantojot trigonometriskās sakarības $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ un $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, pārveidojam izteiksmi (11.1) formā

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} + \tau_{zy} \operatorname{tg} 2\alpha \right) \cos 2\alpha. \quad (11.6)$$

Ievietojot šai sakarībā leņķa vērtību α_0 un ņemot vērā, ka

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}} = \pm \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}},$$

iegūstam divas galveno spriegumu vērtības

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{zy}^2}, \quad (11.7)$$

no kurām pirmā (izmantojot zīmi “+”) ir maksimālā, bet otrā minimālā vērtība.

Tātad varam secināt, ka jebkuras izejas spriegumu kombinācijas $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{zy}$ gadījumā, materiāla punktā eksistē paralelepīpeds, uz kura skaldnēm darbojas tikai normālspriegumi. Tātad galveno spriegumu asīs spriegumu tenzors plakana spriegumstāvokļa gadī-

jumā ir

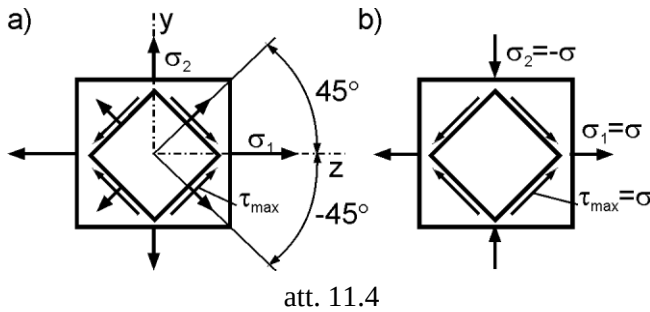
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Lai spriestu par max galvenā sprieguma orientāciju, var ņemt vērā, ka bīdes spriegumi vienu no elementa diagonālēm izstiep, bet otru saspiež. Līdz ar to $\sigma_{\max}$ virziens būs piesaistīts izstieptajai diagonālei.

Lai noteiktu ekstremālās tangenciālo spriegumu vērtības, par izejas stāvokli pieņemsim koordinātu asis xy , kuru virzienos darbojas galvenie spriegumi. Tādā gadījumā formulas (11.3) un (11.2) pārraksta sekojošā veidā

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (11.8)$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha, \quad (11.9)$$



att. 11.4

kur leņķis α tiek atskaitīts no σ_1 virziena (att. 11.4).

No formulas (11.9) varam secināt, ka pie

$$\alpha = -45^\circ \quad (\sin 2\alpha = -1),$$

tangenciāliem spriegumiem ir ekstremālas vērtības

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (11.11)$$

Tātad maksimālie tangenciālie spriegumi darbojas plaknēs, kuras orientētas 45° attiecībā pret galvenajiem un to vērtība ir puse no galveno spriegumu starpības.

Ievietojot sakarību (11.7) izteiksmē (11.11), iegūstam

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \quad (11.11)$$

Vispārīgā gadījumā plaknēs ar $\tau_{\max}$ normālie spriegumi nav nulle. Tiešām, ievietojot formulā (11.8) leņķa vērtību $\alpha = \pm 45^\circ$, iegūstam

$$\sigma_{\pm 45} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

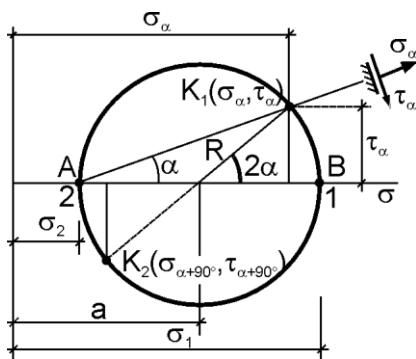
Speciālā gadījumā, kad abi galvenie spriegumi ir vienādi pēc vērtības, bet pretēji vērsti ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$), ekstremālā tangenciālā sprieguma vērtība ir vienāda ar galvenā sprieguma vērtību σ , bet normālsprīgumi šajā gadījumā ir nulle. Šo spriegumstāvokli

sauc par **tīro bīdi**, bet plaknes, kurās darbojas tikai bīdes spriegumi, par **tīrās bīdes plaknēm**.

Spriegumu σ_α un τ_α izmaiņas ģeometriskai interpretācijai vācu zinātnieks O. Mors piedāvāja izveidot riņķveida diagrammu, kura tika nosaukta par Mora riņķi vai spriegumu riņķi. Riņķa konstruēšana balstīta uz sakarību (11.8) un (11.9) grafisku interpretāciju. Šīs sakarības pārrakstot formā

$$\sigma_\alpha = a + R \cos 2\alpha, \quad \tau_\alpha = -R \sin 2\alpha \quad (11.12)$$

koordinātās $\sigma - \tau$, iegūstam riņķa līnijas vienādojumu parametriskā formā, kur $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ir riņķa rādiuss, bet $a = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ konstants parametrs.

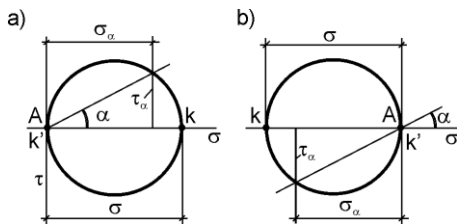


att. 11.5

Atbilstoši šiem vienādojumiem konstruēts riņķis parādīts att. 11.5. Katrai parametra α vērtībai uz riņķa līnijas atbilst punkts K ar koordinātām $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Savstarpēji perpendikulārām plaknēm atbilst punkti K_1 un K_2 (sk. att. 11.5), pie kam $\tau_{\alpha+90} = -\tau_\alpha$.

Ja ir zināmi galvenie spriegumi un galvenās plaknes, tad spriegumu riņķi konstruē balstoties uz punktiem A un B, velkot no punkta A, kurš dotā gadījumā uzskatāms par riņķa polu, staru paralēli slīpā šķēluma normālei, iegūstam šī stara un riņķa līnijas krustpunktu, kuru coordi-

nātes ir meklētie spriegumi σ_α un τ_α .



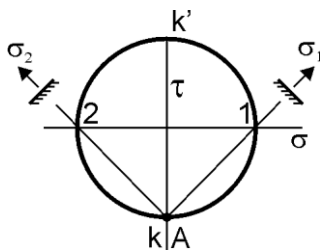
Piemērs 11.2. Uzkonstruēt spriegumu riņķi gadījumos:

a) $\sigma_y = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = \sigma,$

b) $\sigma_y = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = -\sigma.$

Atrisinājums. Izejas dati tād doti galvenajās plaknēs, jo tajās nedarbojas bīdes spriegumi. Darbojas viens galvenais spriegums σ_z , bet otrs σ_y vienāds ar nulli. Abos ga-

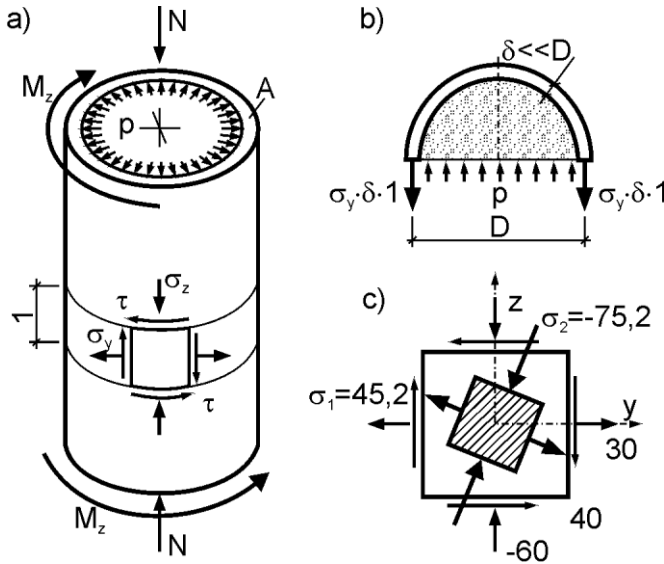
dījumos riņķa pols k' , sakrīt ar koordinātu asu $\sigma - \tau$ sākumpunktu. Iegūtie riņķi parādīti attēlā.



Piemērs 11.3. Uz divām savstarpēji perpendikulārām plaknītēm darbojas bīdes spriegumi $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$. Uzkonstruēt sprieguma riņķi.

Atrisinājums. Dotais spriegumstāvoklis ir tīrās bīdes

stāvoklis un tātad plaknītēs, kuras orientētas 45^0 leņķī pret dotajām, darbojas galvenie spriegumi $\sigma_1 = \tau$ un $\sigma_2 = -\tau$. Atbilstošajam spriegumu riņķim koordinātu $\sigma_1 - \tau$ sākumpunkts atrodas riņķa centrā.



Piemērs 11.4. Veikt spriegumstāvokļa analīzi plānsienas caurules sienai, ja tā pakļauta vērpei (vērpes moments M_z), ass spiedei (ass spēks N) un iekšējam spiedienam (p). Šāda slogojuma gadījumā rodas spriegumi, kurus nosaka sakarības

$$\sigma_z = \frac{N}{A};$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{W_{vēērpe}} = \frac{2M_z}{\pi D^2 \delta};$$

$$\sigma_y = \frac{pD}{2\delta}.$$

(pēdējā sakarība iegūta izmantojot pusriņķa spēku līdzsvara nosacījumu $1 \cdot pD - 2\delta\sigma_y \cdot 1 = 0$).

Izejas spriegumi $\sigma_z = -60 \text{ MPa}$; $\tau_{zy} = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 30 \text{ MPa}$.

Atrisinājums. Galveno spriegumu vērtības un virzienus nosakām izmantojot sakarības (11.7) un (11.5):

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(-60 + 30) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-60 - 30)^2 + 4 \cdot 40} = -15 \pm 60,2;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 40}{-60 - 30} = -\frac{8}{9}.$$

Tātad $\sigma_1 = 45,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -75,2 \text{ MPa}$, bet $\alpha_1 = 69^0$ un $\alpha_2 = -21^0$.

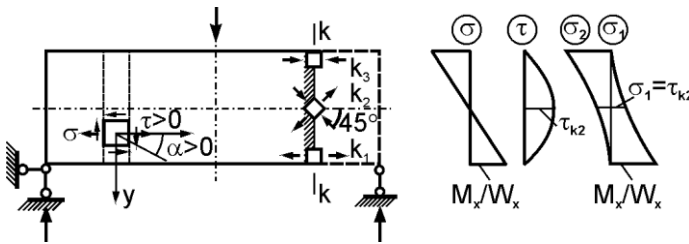
Maksimālie bīdes spriegumi $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = 60,2 \text{ MPa}$ darbojas plaknēs, kuras pagrieztas 45^0 leņķī pret galvenajām asīm.

Galveno spriegumu orientācija uzdevuma noteikumos dotajam plānsieniņu caurules sloojumam parādīta attēlā c.

Piemērs 11.5. Veikt spriegumu stāvokļa analīzi liektā sijā.

Atrisinājums. Saskaņā ar pieņēmuma par sijas deformēšanos bez šķērsā spiediena

starp tās horizontālajiem slāņiem iegūstam $\sigma_y = 0$. Pārējos spriegumus nosaka sakarības:



att. 11.6

$$\sigma_z = \sigma = \frac{M_x}{I} y;$$

$$\tau_{yz} = \tau = \frac{Q_y S_x}{I \cdot b}.$$

Galvenos spriegumus un to pagriezienu leņķi nosakām ar sakarībām

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau}{\sigma_{1,2}}. \quad (11.13)$$

Tā kā sijas spriegumstāvoklis (spriegumi stieņa asij perpendikulārā laukumā) pa sijas augstumu nepārtraukti mainās, tad mainās arī galveno spriegumu vērtības un orientācija. Attēlā parādīts, ka augšējā šķiedrā ir vienasīga spiede, apakšējā šķiedrā vienasīga stiepe, uz neitrālās ass tīrā bīde, bet visos pārējos starpstāvokļos kombinēts normālsprieguma un bīdes spriegumu stāvoklis. Galveno spriegumu epīra parādīta attēlā 11.6.

Uzskatāmu priekšstatu par iekšējo piepūli plūsmu slogotā ķermenī sniedz galveno spriegumu trajektorijas.

Galveno spriegumu trajektorija ir līnija, kuras katrā punktā tās pieskare sakrīt ar galvenā spriegumā virzienu šai punktā.

Stieņa stiepes gadījumā galveno spriegumu trajektorijas ir stieņa asij paralēlas un perpendikulāras taisnes.

Apāļa stieņa vērpes gadījumā galvenie spriegumi orientēti 45° leņķī pret stieņa asi un galveno spriegumu trajektorijas veido ortogonālu 45° leņķī pret stieņa asi orientētu tīklu uz stieņa virsmas. Ar šo arī izskaidrojami dažādu materiālu stieņu atšķirīgie sabrukuma mehānismi. Tā, piemēram, čuguna stieņa vērpe, kuram stiepes stiprība ir mazāka par cirpi, sabrukums notiek pa skrūvveida virsmu no galvenajiem stiepes spriegumiem. Tērauda stieņiem bīstamākā ir bīdes deformācija un šāds stienis sabrūk no cirpes pa stieņa šķērsgrīzumu. Savukārt kokam mazākā stiprība ir cirpē šķiedru virzienā un vērptam stienim vispirms parādās tā asij paralēlas plaisas.

Liektas sijas galveno spriegumu trajektorijas iegūstam, atrisinot vienādojumus

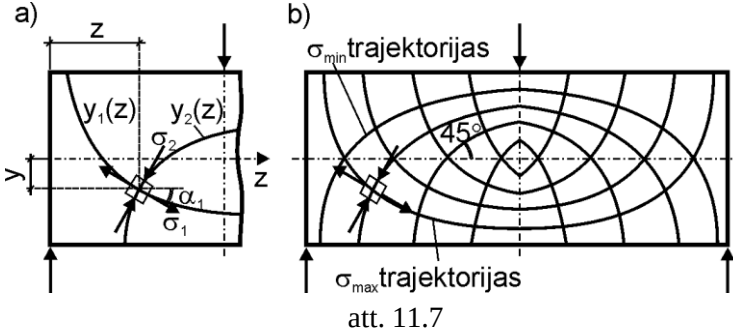
$$\frac{dy_1}{dz} = \frac{\tau(y, z)}{\sigma_1(y, z)}, \quad \frac{dy_2}{dz} = \frac{\tau(y, z)}{\sigma_2(y, z)}, \quad (11.14)$$

kur y_1 un y_2 ir galveno spriegumu σ_1 un σ_2 trajektoriju ordinātas. Vienādojumi (11.14) iegūti sakarībām (11.13) piemērojot apzīmējumu $\operatorname{tg} \alpha_i = dy_i / dz$. Vienādojumu (11.14) atrisinājumus ērti iegūt skaitliskās integrēšanas veidā, izmantojot kādu no tuvinātām diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodēm.

Attēlā 11.7 parādīts galveno spriegumu trajektoriju raksturs ar koncentrētu spēku liektā

sijā.

Veicot ar trauslu laku pārklātu sijas lieci, loks saplaisā, veidojot plaisas pa līnijām, ku-



ras perpendikulāras $\sigma_{\max}$ virzienam, t.i. pa līnijām, kuras sakrīt ar spiedes sprieguma $\sigma_{\min}$ trajektorijām. Zinot galveno spriegumu trajektorijas, daudzos gadījumos iespē-

jams racionalizēt detaļas vai konstrukcijas daļas struktūru. Tā, piemēram, rīkojas dzelzsbetona sijās izvietojot slīpu armatūru, lai nodrošinātu stiepes spriegumu uzņemšanu parādoties betona plaisām.

11.1.4. Telpiskais spriegumstāvoklis

Vispārīgā gadījumā telpisko spriegumstāvokli materiāla punktā raksturo sešas neatkarīgas sprieguma tenzora komponentes (ņemot vērā, ka $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Arī telpiskā spriegumstāvokļa gadījumā var atrast tādu ap materiāla punktu izveidota paralelepēda stāvokli, ka uz tā skaldnēm nedarbojas bīdes spriegumi. Šīs skaldnes un uz tām darbošos normālsprriegumus sauc par galvenajām plaknēm un galvenajiem spriegumiem.

Veicot paralēlskaldņa pagriezienu ap tā asīm, iespējams noteikt galveno plakņu stāvokļus un arī galveno spriegumu vērtības. Galvenie spriegumi punktā ir kubiska algebriska vienādojuma

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (11.15)$$

atrisinājumi.

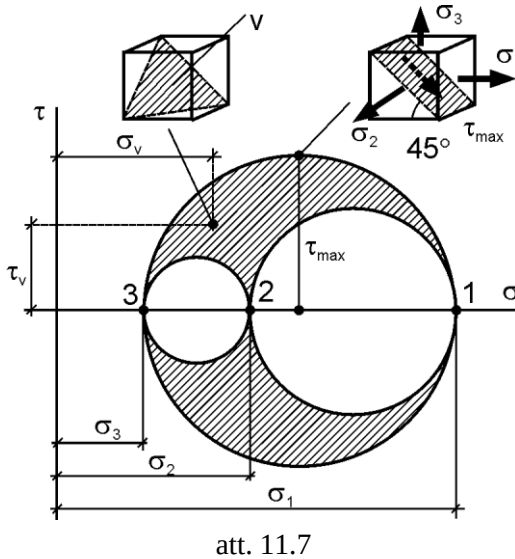
Lielāko no tiem apzīmējam ar σ_1 , mazāko – ar σ_3 , bet trešo – ar σ_2 . Tātad starp galvenajiem spriegumiem pastāv sakarība $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Vienādojuma (11.15) koeficienti I_i ir spriegumstāvokļa invarianti un to vērtības nosaka sakarības

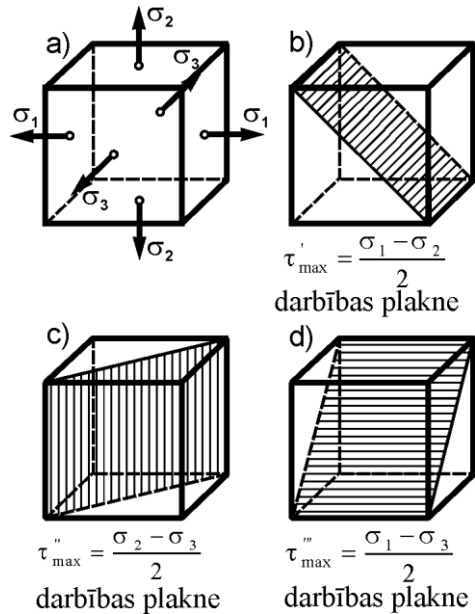
$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \end{aligned} \quad (11.16)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz}.$$

Invarianti I_i nav atkarīgi no koordinātu asu orientācijas. Tātad vienādojuma (11.15) koeficienti nemainās mainoties koordinātu asu stāvoklim un līdz ar to, neatkarīgi no koordinātu asu izvēles, vienādojumam vienmēr būs vienas un tās pašas saknes: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - galvenie spriegumi. Parametrus I_1, I_2, I_3 sauc par spriegumstāvokļa (spriegumu tenzora) pirmo, otro un trešo invariantu.



att. 11.7



att. 11.8

Att. 11.7 redzami trīs spriegumu aplī, kuri katrs atbilst vienam galveno spriegumu pārim: $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$ un $\sigma_1 - \sigma_3$. Šo aplu punktu koordinātes nosaka spriegumu vērtības plaknēs, kuras perpendikulāras plaknēm $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$ vai $\sigma_1 - \sigma_3$. Spriegumu vērtības pret galvenajām asīm patvaļīgi orientētās plaknēs nosaka punktu koordinātes iesvītrotajā starpaplū daļā.

Tā, piemēram, maksimālais bīdes spriegums dotajā punktā ir galveno spriegumu starpības puse un tas darbojas plaknē, kura orientēta 45° leņķī pret galveno spriegumu virzieniem (att. 11.8). Tātad $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Maksimālais bīdes spriegums ir svarīgs

materiāla stiprību raksturojošs parametrs. Bieži vien slogota materiāla pāreju plastiskā stadijā saista ar maksimālo bīdes spriegumu vērtību.

11.1.5. Deformētais stāvoklis punktā

Jau tika minēts, ka materiāla patvaļīgu punktu K aptveroša elementa ($dx \times dy \times dz$) deformācijas trīs savstarpēji perpendikulārās asīs raksturo deformāciju kopa, kuru sauc par deformāciju tenzoru. Mainot savstarpēji perpendikulāro koordinātu asu x, y, z stāvokli tās pagriežot attiecībā pret punktu K, mainās arī deformācijas attiecībā pret jaunajām asīm.

Relatīvo pārvietojumu un nobīdes leņķu kopu visiem iespējamiem koordinātu asu stāvokļiem dotajā punktā, sauc par deformēto stāvokli punktā.

Līdzīgi kā spriegumstāvokļa gadījumā, var noteikt trīs ortogonālu koordinātu asu stāvokli, kurās nobīdes leņķi neeksistē, bet relatīvās lineārās deformācijas iegūst vērtības $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, no kurām ε_1 ir maksimālā, bet ε_3 minimālā. Šīs deformācijas sauc par galvenajām deformācijām punktā.

Deformāciju tenzoru komponentes pie asu pagriezienu mainās analogi spriegumu tenzoru komponentēm. Svarīgi atzīmēt, ka elastīga izotropā materiāla punktos galveno deformāciju un galveno spriegumu virzieni sakrīt. Materiāliem ar komplicētākām fizikālajām īpašībām, šāda sakritība var arī nebūt. Materiālu mehānikā būtiska loma ir deformāciju noteikšanai eksperimentālā ceļā. Izmantojot eksperimentāli noteiktās deformāciju vērtības, tiek noteikti materiālu elastīgie un stiprības parametri, kā arī pārbaudīti dažādi teorētiski rezultāti, kuri iegūti izmantojot modeļus vai arī reālajos objektos. Dažādu eksperimentālo metožu apguve sastāda svarīgu materiālu pretestības daļu, kura tiek realizēta laboratorijas darbu veidā, veicot pārbaudes un mērījumus dažādu materiālu paraugiem pie dažādiem slodzes veidiem.

Par eksperimentālo metožu pamatmetodi tiek uzskatīta tenzometriskā metode.

Tās būtību sastāda mazu deformāciju mērīšana noteiktos konstrukciju elementu vai paraugu punktos un tam sekojoša sprieguma noteikšana izmantojot Huka likumu.

Ar speciālu mērinstrumentu (tenzometru) palīdzību uz detaļas virsmas tiek nomērīts absolūtais bāzes (nogrieznis ar fiksētu garumu) pagarinājums un noteikta vidējā pa bāzes garumu relatīvā deformācija. Uz detaļas virsmas vispārīgā gadījumā veidojas plakana spriegumstāvoklis ar galvenajiem spriegumiem σ_1 un σ_2 un deformācijām ε_1 un ε_2 . Tieši šīs deformācijas var nomērīt ar tenzometriskām metodēm.

Izotropu materiālu gadījumā ir spēkā Huka likums

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_1.\end{aligned}\tag{11.17}$$

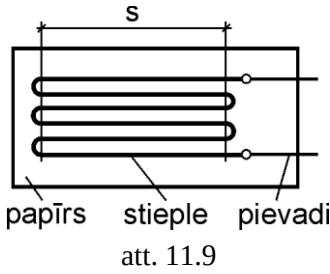
Atrisinot šo sistēmu attiecībā pret spriegumiem, iegūstam

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1).\end{aligned}\tag{11.18}$$

Izmantojot sakarības (11.18), tenzometrijas metodē tiek noteikti spriegumi, kuri atbilst eksperimentāli noteiktajām deformācijām ε_1 un ε_2 .

Deformāciju mērīšanai ir iespējams izmantot dažāda veida tenzometrus: mehāniskos, optiskos, hidrauliskos, pneimatiskos u.c. Plašu pielietojumu guvuši elektriskie tenzometri, kuru darbības princips balstīts uz deformācijas izraisītās vadītāja stieples omiskās pretestības izmaiņu. Parasti šādi tenzometri ir izveidoti no vairākās cilpās izkārt-

tas plānas stieples, kura uzlīmēta uz papīra (att. 11.9).

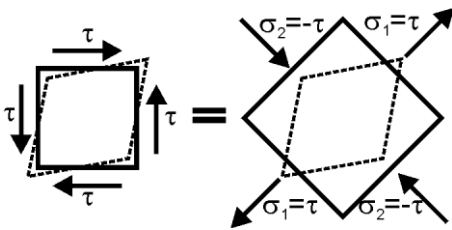


Tīrās bīdes stāvokli plaknē iespējams realizēt divos veidos: slogojot elementārlaukumu (att. 11.11) pa malām ar bīdes spriegumu τ vai arī realizējot divus galvenos spriegumus $\sigma_1 = \tau$ un $\sigma_2 = -\tau$, kuri vērsti laukuma diagonāļu virzienos.

Elementārlaukuma diagonāles d relatīvo pagarinājumu no sprieguma τ nosaka sakarība $\frac{\Delta d}{d} = \frac{\tau}{2G}$, bet no

galvenajiem spriegumiem sakarība

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\tau}{E} + \mu \frac{\tau}{E} = \frac{1 + \mu}{E} \tau.$$



att. 11.11

Tātad iegūstam, ka

$$\frac{1}{2G} = \frac{1 + \mu}{E}.$$

Līdz ar to ir noteikta sakarība starp izotropā materiāla trim elastīgajām konstantēm

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (11.19)$$

Sakarība (11.19) liecina par to, ka izotropam materiālam neatkarīgas ir tikai divas elastīgās konstantes. Trešā nosakāma no šīs sakarības. Tā, piemēram, ja ir zināmi materiāla Junga modulis E un bīdes modulis G , Puassona koeficientu varam noteikt no sakarības

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Tērauda gadījumā, kad $E = 200$ GPa, bet $G = 80$ GPa, nosakām, ka $\mu = 0,25$. Šādu vērtību iegūstam arī eksperimentāli, slogojot tērauda plāksnīti ar stiepes spēku un izmērot garenās un šķērsās deformācijas.

11.1.6. Potenciālā enerģija telpiskā spriegumstāvokļa gadījumā

Ar jēdzienu potenciālā enerģija tiek domāta tā relatīvā enerģija, ko uzkrāj materiāla elementārkubiņš lineāras deformēšanās gadījumā pie telpiska spriegumstāvokļa. Vienasīgas stiepes gadījumā elementārkubiņa (ar šķautnes garumu 1) relatīvā potenciālā

enerģija ir $u = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$. Vispārinot šo sakarību uz trīsasīgu galveno spriegumu gadījumu, iegūstam

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3). \quad (11.20)$$

Ievietojot sakarībā (11.20) vispārinātā Huka likuma izteiksmes

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

potenciālās enerģijas noteikšanai galveno spriegumu gadījumā iegūstam sakarību

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (11.21)$$

Gadījumos, kad elementārkubiņa skaldnes nav galvenie laukumiņi (to normāles nesa-krīt ar galveno spriegumu virzieniem) un tajos darbojas kā normālie tā bīdes spriegumi, sakarības (11.21) vietā iegūstam

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}). \quad (11.22)$$

11.2. Stiprības teorijas

Novērtējot būvju konstrukciju nestspēju jāņem vērā, ka to robežstāvoklis var iestāties kā plastisko deformāciju dēļ, tā arī konstrukcijas sabrukuma dēļ. Gadījumos, kad būvju elementos veidojas vienasīgs spriegumstāvoklis, plastisko deformāciju vai sabrukuma brīdis novērtējams visai vienkārši. Atliek salīdzināt spriegumu ar tecēšanas vai stiprības robežu. Situācija kļūst daudz sarežģītāka gadījumos, kad konstrukcijas elementā veidojas plakanisks vai telpisks spriegumstāvoklis.

Zinot, ka vispamatotākais materiāla mehānisko īpašību noteikšanas veids ir eksperimentāli pētījumi, varētu ieteikt tieši šādu materiāla stiprības novērtēšanas paņēmieni. Diemžēl jāsecina, ka eksperimentālā tehnika (pārbaudes iekārtas un mērījumu tehnoloģija) nedod iespēju radīt patvaļīgu spriegumstāvokli paraugā un nodrošināt ticamus rezultātus. Rodas nepieciešamība noteikt tādu spriegumstāvokli raksturojošu mēru, kura sasniegšana raksturotu pāreju no elastīgā uz robežstāvokli. Šādu robežstāvokļa mēru nosaka plasticitātes (tecēšanas) un stiprības (sabrukuma) kritēriji. Jāatzīst, ka universālu kritēriju nav, toties ir plašs kritēriju spektrs, kuru pamatā likti tie vai citi faktori (maksimālie spriegumi, maksimālie pagarinājumi, deformācijas enerģija u.t.t.). Katrs no daudzajiem kritērijiem savā visai netiešā veidā ievērtē vēl ne līdz galam izpētīto robežstāvokļa iestāšanās procesu materiālā. Katrs no kritērijiem izrādās piemēro- tāks kādiem konkrētiem apstākļiem. Svarīgi ņemt vērā, ka jēdzieni „stiprība” un „plas- ticitāte” ir principiāli atšķirīgi, kaut arī tie var būt savstarpēji saistīti. Plasticitātes raša- nās vēl nebūt nav materiāla sabrukums, tādēļ stiprības un plasticitātes kritēriji nav identificējami.

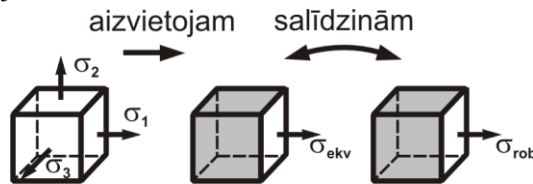
Ir jābūt iespējai izmantojot tecēšanas un stiprības kritērijus salīdzinot dažādu materiāla spriegumstāvokļa bīstamības pakāpi. Salīdzināšanu ērti veikt, ja par pamatstāvokli iz- vēlas to, kuru viegli realizēt eksperimentāli. Šādu spriegums sauc par ekvivalentu. Pa- rasti par ekvivalento spriegumstāvokli izvēlas vienasīgo stiepi.

To spriegumu vērtību σ_{ekv} , pie kuras materiāla paraugs vienasīgā spriegumstāvokļa gadījumā izrādās vienlīdz bīstamā stāvoklī salīdzinājumā ar analizējamo salikto spriegumstāvokli punktā, sauc par ekvivalento spriegumu.

Jebkuru salikto spriegumstāvokli raksturo tā galvenie spriegumi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Izmantojot konkrēto kritēriju var tikt noteikta sakarība $\sigma_{ekv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Līdz ar to robežstāvokļa iestāšanās nosacījumu apraksta sakarība

$$\sigma_{ekv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0,$$

kur σ_0 – tas bīstamais spriegums, pie kura vienasīga slogojuma gadījumā iestājas robežstāvoklis, tātad tas ir vai nu σ_T vai σ_B . Robežstāvokļa iestāšanās novērtējums grafiski attēlojams sekojošā veidā



11.2.1. Maksimālo normālspriegumu (pirmā) stiprības teorija

Saskaņā ar šo teoriju materiāla bīstamais stāvoklis iestājas tad, kad kāds no galvenajiem normālspriegumiem sasniedz vērtību, kura ir materiāla stiprības robeža, vai arī tecēšanas robeža stiepē vai spiedē.

Šādas teorijas pamatlicējs ir G. Galilejs un tās piekritēji bija ievērojami zinātnieki Leibnics, Lamē, Klebss un Renniks. Maksimālo normālspriegumu teoriju literatūrā bieži sauc par Rennika teoriju.

Maksimālo normālspriegumu teorijas stiprības nosacījumu nosaka sakarība

$$\sigma_{ekv} \leq \frac{\sigma_0}{n} = [\sigma] \quad (11.23)$$

kur σ_0 – normālais robežspriegums (materiāla stiprības robeža vai tecēšanas robeža)

n – stiprības rezerves (drošības) koeficients.

Šeit σ_{ekv} ir maksimālais stiepes vai spiedes galvenais spriegums.

Diemžēl šī stiprības teorija pozitīvu praktisku apstiprinājumu guvusi tikai trausliem materiāliem. Tā tiek lietota visai reti. Par teorijas trūkumu jāuzskata tas apstāklis, ka netiek ņemts vērā pārējo divu galveno spriegumu (σ_2, σ_3) iespaids uz materiāla stiprību.

Praktiski normālais robežspriegums σ_0 tiek noteikts eksperimentāli pie vienasīga slogojuma, bet tas attiecināts arī uz trīsasīgu slogojumu.

11.2.2. Maksimālo relatīvo deformāciju (otrā stiprības) teorija

Teorija balstīta uz pieņēmumu, ka kritiskais stāvoklis materiālā iestājas brīdī, kad maksimālā relatīvā lineārā deformācija sasniedz savu robežvērtību.

No vispārinātā Huka likuma zinām, ka

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Deformācijas ε_1 maksimālā vērtība atbilst nosacījumam $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Šajā gadījumā materiāla sabrukuma nosacījums ir

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1, \quad (11.24)$$

bet stiprības nosacījums

$$|\varepsilon_{\max}| \leq |\varepsilon_1| = \frac{\sigma_1}{E}, \quad (11.25)$$

vai

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_2 + \sigma_3).$$

Tā kā vienasīgās stiepes gadījumā pieļaujamā relatīvā deformācija ir

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E},$$

tad iegūstam

$$\frac{1}{E} \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{[\sigma]}{E}$$

vai

$$\sigma_{ekv2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (11.26)$$

Šīs stiprības teorijas priekšrocība attiecībā pret 1. stiprības teoriju ir tas apstāklis, ka nosakot materiāla stiprību, tiek ņemti vērā visi galvenie spriegumi.

Maksimālo relatīvo deformāciju teorijas pamatlicējs bija Mariots (1662.g.), bet tās piekritēji Navjē un San-Venāns.

Diemžēl arī šī stiprības teorija eksperimentāli apstiprinājusies tikai trausliem materiāliem un savu praktisko nozīmi mūsu dienās ir zaudējusi..

11.2.3. Maksimālo bīdes spriegumu (trešā stiprības) teorija

Trešā stiprības teorija balstīta uz hipotēzi par to, ka materiāla stiprību nosaka maksimālā bīdes spriegumu kritiskā vērtība. Šīs teorijas pamatlicējs ir Š. Kulons (1773.g.).

Sakarā ar izvirzīto hipotēzi materiāla stiprība salikta spriegumstāvokļa gadījumā ir nodrošināta, ja maksimālais spriegums nepārsniedz pieļaujamo bīdes spriegumu vienasīga slogojuma gadījumā. Pieļaujamā bīdes sprieguma vērtība vienasīga slogojuma gadījumā ir

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Tātad stiprības nosacījums ir

$$\tau_{\max} \leq [\sigma]/2. \quad (11.27)$$

Maksimālo bīdes spriegumu vērtības dažādās plaknēs nosaka sakarības

$$\tau_{\max 1} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2,$$

$$\tau_{\max 2} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2,$$

$$\tau_{\max 3} = (\sigma_2 - \sigma_3) / 2.$$

Tā kā mēs izmantojam nosacījumu $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, tad $\tau_{\max 1}$ visos gadījumos būs lielāks par $\tau_{\max 2}$ un $\tau_{\max 3}$.

Līdz ar to maksimālo bīdes spriegumu stiprības teorijas kritērijs aprakstās ar sakarību:

$$\sigma_{\text{ekv}3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (11.28)$$

vai

$$\sigma_{\text{ekv}3} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Par trūkumu var uzskatīt to apstākli, ka trešā stiprības teorija neņem vērā vienu galveno spriegumu komponenti, t.i. spriegumu σ_2 .

Maksimālo bīdes spriegumu teorijas tiek lietota konstrukciju elementu aprēķinos, kuri izgatavoti no plastiskiem materiāliem ar vienādām stiprības īpašībām stiepē un spiedē.

11.2.4. Enerģētiskā (ceturtā) stiprības teorija

Itāļu zinātnieks E. Beltrani 1885. gadā izteica hipotēzi, ka materiāla bīstamais stāvoklis salikta spriegumstāvokļa gadījumā iestājas tad, kad materiāla relatīvā potenciālā enerģija sasniegusi savu robežvērtību. Saskaņā ar šo hipotēzi, materiāla stiprība salikta spriegumstāvokļa gadījumā ir nodrošināta, ja deformācijas relatīvā potenciālā enerģija nepārsniedz pieļaujamo, no vienasīga eksperimenta noteiktu, relatīvo potenciālo enerģiju

$$n \leq [n].$$

Elementa tilpuma un formas izmaiņai nepieciešamo pilno potenciālo enerģiju nosaka sakarība

$$n_p = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)].$$

Hipotēze par to, ka materiāla sabrukuma iemesls ir pilnā potenciālā enerģija, eksperimentāli neapstiprinājās. Tādēļ 1904. gadā amerikāņu zinātnieks Hubers izvirzīja citu – reducētu hipotēzi: materiāla stiprību nosaka nevis pilnā patērētā enerģija, bet tikai tās daļa, kura tiek patērēta slogotā elementa formas maiņai. Formas maiņai patērēto enerģiju nosaka sakarība

$$u_f = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3].$$

Līdz ar to stiprības kritēriju nosaka sakarība

$$u_f \leq [u_f].$$

Vienasīgās stiepes gadījumā pieļaujamo formas maiņas potenciālo enerģiju nosaka sakarība

$$u_f = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma]^2.$$

Tātad atbilstoši Hubera hipotēzei iegūstam materiāla stiprības kritēriju

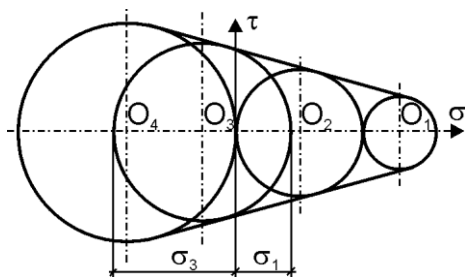
$$\sigma_{ekv4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma]. \quad (11.29)$$

Enerģētiskā stiprības teorija (11.7) parasti labi sakrīt ar eksperimentāli iegūtiem rezultātiem un tiek plaši lietota plastisku materiālu stiprības aprēķinos.

11.2.5. Mora stiprības teorija

Jāatzīmē fakts, ka materiālu stiprības teorijas nepārtraukti tiek pilnveidotas un papildinātas, meklējot iespēju arvien precīzāk aprakstīt konkrēto materiālu eksperimentālo pārbaužu rezultātus. Vērojama tendence vispārīgās stiprības teorijas (pilnam spriegumstāvoklim) aizvietot ar stiprības teorijām konkrētiem sloģojumu veidiem un konkrētiem materiāliem (piem., kompozītiem). Prakse pierādījusi, ka virknei materiālu stiprības īpašības stiepē un spiedē atšķiras, pie kam šī atšķirība ir visai būtiska. Tā, piemēram, ķieģeļu mūrim stiepes un spiedes stiprības atšķiras 10 reizes. Līdzīgi ir arī betonam, kura stiprības robeža stiepē ir 0,1 MPa, bet spiedē (5 ... 35) MPa.

No daudzskaitlīgām stiprības teorijām plašu popularitāti guvusi vācu zinātnieka O. Mora piedāvātā. Tā guvusi plašu aprobāciju un apliecinājusi labu sakritību ar eksperimentālajiem rezultātiem. Mora teorija pamatojas uz pieņēmumu, ka vidējais galvenais spriegums σ_2 nebūtiski iespaido materiāla robežstāvokli un to aprēķinos var neņemt vērā.



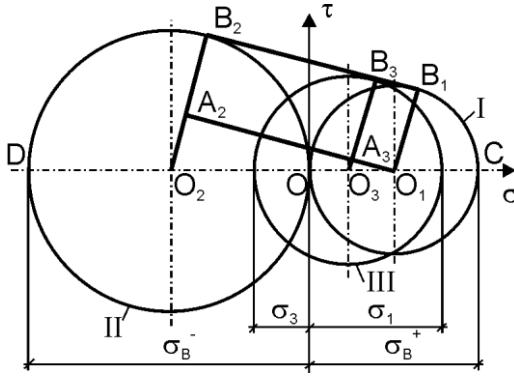
att. 11.11

Mora teorijas pamatā ir pieskares konstruēšana Mora apliem, kuri atbilst dažādiem materiāla robežstāvokļiem. Katrs no Mora apliem, kurš sasniedz robežpieskari, dod priekšstatu par materiāla robežstāvokli. Tā, piemēram, aplim ar centru O_3 (att. 11.11) robežstāvokli raksturo spriegumi σ_1 (pozitīvs) un σ_3 (negatīvs).

Jebkuram uzdotam spriegumstāvoklim iespējams uzkonstruēt Mora apli, palielinot šo

apli līdz tas pieskares robežpieskarei. Dotā un robežstāvokļa aplu rādīsim attiecība ir dotā spriegumstāvokļa rezerves koeficients. Mora stiprības teorijas analītisko sakarību iegūstam izmantojot trīs robežstāvokļu Mora aplus ar centriem O_1 , O_2 un O_3 (att. 11.12).

Aplis ar centru O_1 atbilst vienasīgai stiepei ($\sigma_1 = \sigma_B^+$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), aplis ar centru O_2 – vienasīgai spiedei ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_B^-$), aplis ar centru O_3 – robežstāvoklim ar galvenajiem spriegumiem σ_1 un σ_3 .



att. 11.12

Tā kā $\Delta O_1 O_3 A_3 \sim \Delta O_1 O_2 A_2$, tad ir spēkā sakarība $\frac{O_3 A_3}{O_2 A_2} = \frac{O_1 O_3}{O_1 O_2}$,

$$\text{vai } \frac{O_3 B_3 - O_1 B_1}{O_2 B_2 - O_1 B_1} = \frac{OO_1 - OO_3}{OO_1 + OO_2}.$$

Aizvietojot nogriežņus ar atbilstošām spriegumu vērtībām iegūstam

$$\frac{\sigma_B^- - \sigma_B^+}{\sigma_B^- + \sigma_B^+} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_B^+}{\sigma_B^+ - (\sigma_1 - \sigma_3)},$$

kur σ_B^+, σ_B^- - robežstiprības vienasīgā

stiepē un spiedē, jeb

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-} \sigma_3 = \sigma_B^+.$$

Ievēdot parametru $k = \frac{\sigma_B^+}{\sigma_B^-}$ un apzīmējot vienādojuma kreiso pusi ar σ_{ekv5} , iegūstam

$$\sigma_{ekv5} = \sigma_1 - k \sigma_3 = \sigma_B^+.$$

Līdz ar to Mora stiprības nosacījumu nosaka sakarība

$$\sigma_{ekv5} = \sigma_1 - k \sigma_3 \leq [\sigma^+], \quad (11.30)$$

kur $[\sigma^+]$ - materiāla pieļaujamā stiprība vienasīgā stiepē.

Gadījumā, ja $k = 1$, Mora teorija sakrīt ar maksimālo bīdes spriegumu teoriju.

Plakana spriegumstāvokļa gadījumā, kad materiāla punktā darbojas vienasīgs normālspriegums σ un tam perpendikulārā plaknē bīdes spriegums τ , izteiksme (11.30) reducējas uz

$$\sigma_{ekv5} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma^+]. \quad (11.31)$$

Plastiskiem materiāliem Mora teorija dod rezultātus, kuri labi sakrīt ar eksperimentāli iegūtajiem gadījumos, kad spriegumstāvokļa apli atrodas starp apliem, kuri atbilst vienasīgai stiepei un vienasīgai spiedei, t.i. $\sigma_1 > 0$, $\sigma_3 < 0$.

Mora teorija principiāli atšķiras no iepriekš aplūkotajām ar to, ka tā pilnībā bāzējas uz eksperimentāliem rezultātiem un šiem rezultātiem uzkrājoties var tikt precizēta.

11.2.6. Stiprības teoriju attīstība

Visas iepriekš aplūkotās stiprības teorijas attiecināmas uz tradicionāliem konstruktīviem viendabīgiem, izotropiem materiāliem. Toties pēdējos gados daudzās tehnikas nozarēs, tostarp arī būvniecībā, pielietojumu gūst jauni, tā saucamie kompozītie mate-

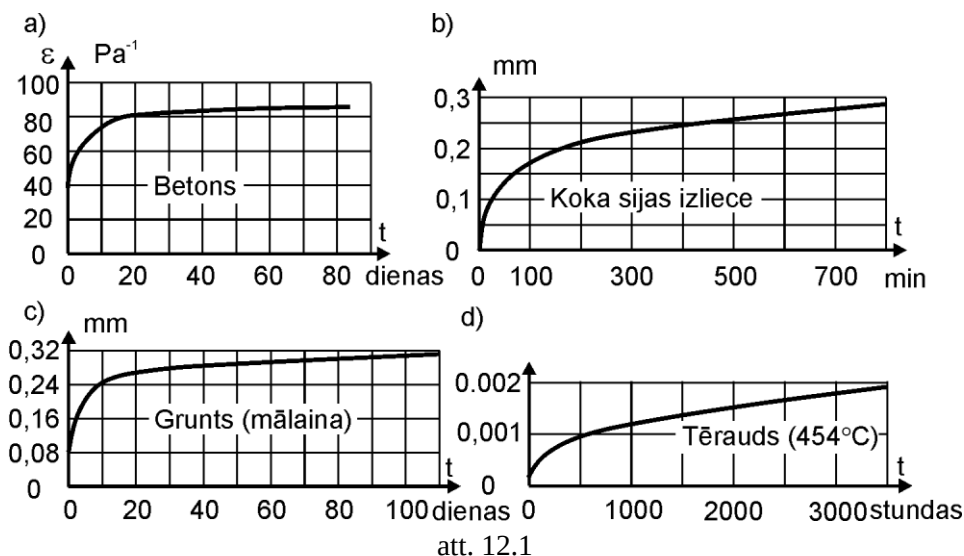
12. ŠĻŪDE

12.1. Būvmateriālu šļūde

Daudziem būvniecībā pielietojamiem materiāliem raksturīga īpašība ir to deformāciju pieaugums laikā nemainīgas slodzes apstākļos. Šo parādību sauc par **šļūdi**.

Lielākā vai mazākā mērā šļūde piemīt visiem konstruktīviem materiāliem. Arī metāliem novērojama šļūde. Tēraudiem tā īpaši izteikta paaugstinātu temperatūru apstākļos, bet krāsainiem metāliem pat pie istabas temperatūrām.

Šļūdes deformāciju realizēšanās dēļ kompozītos materiālos notiek spriegumu pārdalīšanās starp tos veidojošajām komponentēm, realizējoties principam – spriegumiem pieaugot mazāk šļūdošos materiālos uz vairāk šļūdošu materiālu atslogošanās rēķina. Tā, piem., dzelzsbetona konstrukciju stiegrās betona šļūdes dēļ, spriegumi pieaug 2 – 2,5 reizes.



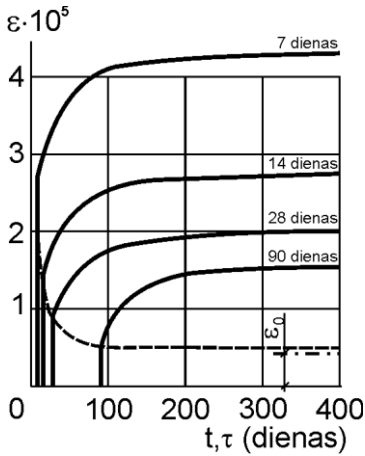
Dažādiem materiāliem deformāciju pieaugums laikā ir atšķirīgs. Tas lielā mērā raksturojas ar deformēšanās ātrumu.

Līkni, kura attēlo deformācijas izmaiņu laikā konstantas slodzes rezultātā sauc par **šļūdes līkni**. Šādu līkni iegūst ilglaicīga eksperimenta rezultātā. Svarīgi visā eksperimenta gaitā nodrošināt nemainīgus ārējās iedarbības apstākļus: temperatūru, mitrumu, kā arī jānodrošinās pret gadījuma veida grūdieniem, vibrācijām, u.c.

Att. 12.1a-d parādītas dažādu materiālu šļūdes līknes. Visām šīm līknēm ir vienāds raksturs. Pie nelieliem spriegumiem šļūdes deformācijas ir proporcionālas slodzei, t.i., konkrētā materiāla šļūdes līkņu ordinātas pie dažādām slodzēm ir proporcionālas šīm slodzēm. Šādos gadījumos sakām, ka šļūde ir lineāra.

Šļūdes deformācijas lielā mērā ir atkarīgas kā no materiāla apkārtējās vides iespaida (temperatūras, mitruma), tā arī no citiem faktoriem. Piemēram, betona šļūde mainās atkarībā no ūdens – cementa attiecības, cementa un pildvielas veida, mēroga faktora, u.c. Ir materiāli, kuru mehāniskās īpašības mainās laikā neslogotā stāvoklī pie nemi-

nīgiem apkārtējās vides apstākļiem. Betona īpašību izmaiņas pamatā ir ilglaicīgi ķīmiski procesi cementa masā, bet plastmasās un citos materiālos – lēni notiekošie oksidēšanās procesi.

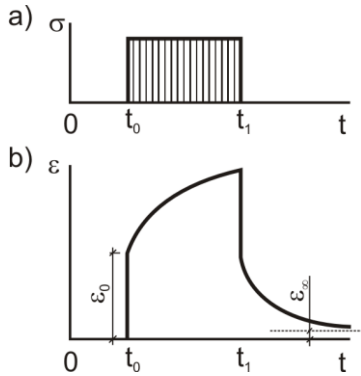


att. 12.2

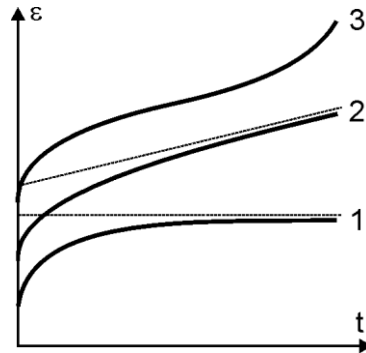
Mehānisko īpašību izmaiņas procesu sauc par materiāla novecošanos. Novecojoša materiāla šķūde ir atkarīga ne tikai no slogojuma ilguma, bet arī no noslogojuma momenta, t.i. no materiāla vecuma noslogojuma brīdī.

Att. 12.2 redzamas četras betona šķūdes līknes, kuras iegūtas noslogojot betona paraugus pēc 7, 14, 28 un 90 dienām no to izgatavošanas brīža. Līknes atbilst spriegumam $\sigma = 0,1$ MPa. No iegūtajiem datiem var konstatēt, ka arī īslaicīgā deformācija mainās līdz ar materiāla vecumu. Šai deformācijai ir tendence asimptotiski samazināties sasniedzot galējo vērtību ε_0 . Atslogojot ilgstoši noslogotu paraugu, tā deformācijas kā momentāni, tā arī laikā samazinās (att. 12.3) līdz vērtībai ε_∞ . Šo procesu sauc par **atgriezenisko šķūdi**.

Speciālā gadījumā (lineārā šķūde) iespējams, ka $\varepsilon_\infty = 0$, t.i. pēc neierobežoti ilga laika paraugs atgūst savus sākotnējos izmērus. Šo materiāla īpašību sauc par



att. 12.3



att. 12.4

elastīgo pēcdarbību.

Pie lielākām slodzēm proporcionalitāte starp slodzi un deformāciju fiksētā laika momentā nesaglabājas un šķūdes parādība kļūst nelineāra. Pie vēl lielākām slodzēm izmaiņās arī šķūdes līkņu raksturs – tās slogojuma gaitā aizvien vairāk tiecas uz augšu. Att. 12.4 redzamas simboliskas šķūdes līknes trijos atšķirīgos spriegumu līmeņos. Pirmā veida līkņu raksturīga īpatnība ir to horizontālā asimptote. Otrā veida līkņu īpatnība ir slīpi orientēta asimptote, bet trešā veida līknēm nav asimptotes un tās attēlo šķūdes procesu tai nozīmē, ka deformācijas sāk katastrofāli augt un noved materiāla pie sabrukuma.

12.2. Lineārā šļūde

Lineāras šļūdes gadījumā, pārejot no sloģojuma režīma $\sigma = f(t)$ uz režīmu $\sigma = af(t)$, kur a konstants reizinātājs, iegūstam deformāciju līkni, kuras ordinātas katrā laika momentā ir a reizes lielākas.

Deformācijas noteikšanai lineārās šļūdes gadījumā pie konstanta sprieguma $\sigma = \text{const}$ pielietojama sakarība

$$\varepsilon = \sigma F(t), \quad (12.1)$$

kur $F(t)$ - šļūdes līkne pie sprieguma $\sigma = 1$, kurš pielikts laika momentā $t = 0$.

Tūlīt pēc slodzes pielikšanas deformācija pieaug momentāni līdz noteiktai vērtībai, bet pēc tam turpina pieaugt laikā.

Nosacīti tiek pieņemts, ka momentāno deformāciju nosaka sakarība

$$\varepsilon_m = \sigma / E,$$

kur E – materiāla momentānais elastības modulis.

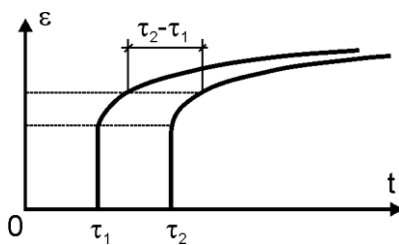
Pieaugot deformēšanās laikam konstantas slodzes apstākļos deformācija pakāpeniski tuvojas savai galējai ilglaicīgās deformēšanās vērtībai

$$\varepsilon_i = \sigma / H,$$

kur H – materiāla ilglaicīgais elastības modulis.

Ilglaicīgās deformācijas ε_i vērtība raksturo materiāla šļūdētspēju. Dažādiem materiāliem šī vērtība ir atšķirīga. Tātad dažādu materiālu ilglaicīgās elastības moduļi līdzīgi kā īslaicīgās elastības moduļi ir atšķirīgi. Ilglaicīgo elastības moduļu vērtības H konkrētiem materiāliem vienmēr ir mazākas par attiecīgo materiālu momentāno elastības moduļu vērtībām. To mērvienības ir vienādas (Pa). Ierobežotā šļūde dabīgos ekspluatācijas apstākļos (temperatūras, mitrums) raksturīga betonam, kokam, plastmasām un arī citiem konstruktīviem materiāliem. Visiem šiem materiāliem $H > 0$. Gadījumos, ja slodze $\sigma = \text{const}$ netiek pielikta sākuma momentā $t = 0$, bet vēlāk, pie vērtības $t = \tau$, tad šļūdes līknes vispārīgais raksturs izmainās. Šai gadījumā funkcija F jāuzskata par funkciju ar diviem argumentiem: t – deformāciju novērošanas moments un τ - konstantās slodzes pielikšanas moments. Līdz ar to sakarības (12.1) vietā iegūstam

$$\varepsilon = \sigma F(t, \tau) \quad (12.2)$$



att. 12.5.

Dabīgs ir pieņēmums, ka pie nosacījuma $t < \tau$ (slodze vēl nav pielikta un deformācija nerodas) funkcija $F(t, \tau) = 0$.

Materiāliem, kuru īpašības laikā nemainās (nav novērojams rukums, novecošanās), konstantās slodzes $\sigma = \text{const}$ pielikšanas momenta τ izmaiņa neizmaina šļūdes līknes raksturu, bet vienīgi nobīda deformāciju par lielumu $\tau_2 - \tau_1$ (att.

12.5). Šādā gadījumā šļūdes funkcija F kļūst viena argumenta funkcija un šis argu-

ments ir $(t - \tau)$ – intervāls starp deformācijas novērošanas momentu t un slodzes pielikšanas momentu τ . Šādu materiālu sauc par invariantu vai laikā nemainīgu. Laikā invarianta materiāla gadījumā ir spēkā sakarība

$$\varepsilon = \sigma F(t - \tau) \quad (12.3)$$

Neinvarianta materiāla ar laikā mainīgām mehāniskām īpašībām piemērs ir mazcietējis betons. Šādam materiālam sakarība (12.3) nav pielietojama un tās vietā jālieto vispārīgāka sakarība (12.2). Līkni (12.3) nosaka eksperimentāli dažādos laika momentos fiksējot ar konstantu slodzi slogotu paraugu deformācijas. Momentānās deformācijas rodas slodzes pielikšanas brīdī. Tātad šai brīdī $t = \tau$ un saskaņā ar sakarību (12.2) iegūstam, ka

$$\varepsilon_i = \sigma F(\tau, \tau)$$

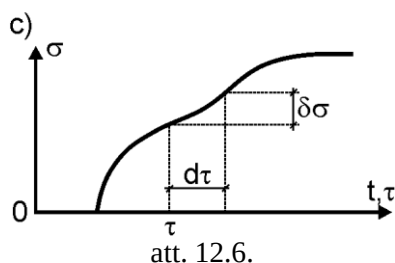
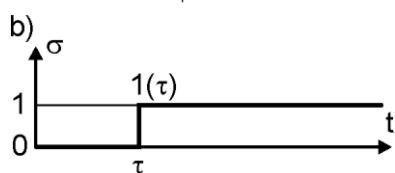
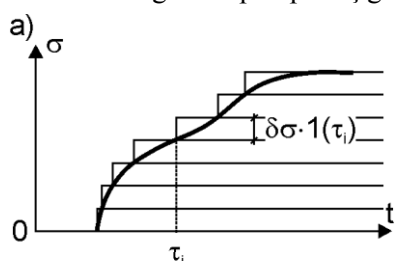
un līdz ar to

$$F(\tau, \tau) = \frac{1}{E} = \frac{1}{E(\tau)} \quad (12.4)$$

Tātad šai gadījumā momentānais elastības modulis E ir mainīgs lielums un ir atkarīgs no slodzes pielikšanas momenta τ .

12.3. Šļūde mainīgu slodžu gadījumā

Virknē gadījumu konstrukciju elementu slogojumi ir laikā mainīgi lielumi. Tātad rodas nepieciešamība noteikt deformācijas konstrukcijai, kura kopumā vai arī atsevišķi tās elementi slogoti ar pēc patvaļīga iepriekš uzdota likuma laikā mainīgu slodzi. Lineārās šļūdes gadījumā var tikt izmantots superpozīcijas princips, saskaņā ar kuru summārā deformācija no vairākām slodzēm ir vienāda ar atsevišķo deformāciju summu, kuras rodas no katras slodzes atsevišķi.



Vispārīgā gadījumā jebkuru patvaļīgu slodzes izmaiņas likumu $\sigma(\tau)$ var aizstāt ar neierobežota skaita elementārām konstantām slodzēm, kuras pieliktas dažādos laika momentos. Katru elementāro slodzi var noteikt ar sakarību

$$\sigma = 1(\tau) \delta \sigma$$

kur $1(\tau)$ pārrāvuma funkcija, kuras vērtības ir nulle, ja $t < \tau$ un viens, ja $t > \tau$.

Ar $\delta \sigma$ apzīmēts konstantās elementārslodzes lielums. Patvaļīgās slodzes $\sigma(\tau)$ aizstāšanas princips ar elementārslodzēm $\delta \sigma$ parādīts att. 12.6.

Slodzes izmaiņas likumu aizvietojo ar pakāpjveida līniju, iegūstam sakarību

$$\sigma = \sum_{i=1}^n 1(\tau_i) \cdot \delta\sigma_i,$$

kuras precizitāte pieaug neierobežoti samazinot slodzes izmaiņas pakāpju $\delta\sigma_i$ lielumu. Šāds process saistīts ar slodzes pakāpju skaita pieaugumu, kurš robežgadījumā apraksta sākotnēji uzdoto slodzes izmaiņas likumu.

Tātad atbilstošās deformācijas no katras elementārslodzes tiek noteiktas ar sakarībām

$$\varepsilon_i = \delta\sigma_i F(t, \tau_i), \quad (12.5)$$

bet summārā deformācija tādā gadījumā būs

$$\varepsilon(t) = \sum \delta\sigma_i F(t, \tau_i).$$

Elementārās slodzes pakāpes vērtība robežgadījumā (att. 12.6) tiecas uz

$$\delta\sigma = d\tau \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}.$$

Ievietojot šo izteiksmi sakarībā (12.5) un summēšanas vietā pārejot uz integrēšanu, iegūstam

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} F(t, \tau) d\tau.$$

Veicot integrēšanu pa daļām, varam atbrīvoties no sprieguma atvasinājuma zemintegrāļa izteiksmē. Tā rezultātā iegūstam

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot F(t, \tau) - \sigma(0) F(t, 0) - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

Pieņemot, ka sākuma momentā $t = 0$ slodze ir $\sigma(0) = 0$, t.i. paraugs līdz šim laika momentam nebija noslogots, un ņemot vērā, ka

$$F(t, t) = 1/E(t),$$

iegūstam

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Šo izteiksmi var pārrakstīt sekojošā veidā

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau \right] \quad (12.6)$$

Funkciju $K(t, \tau) = -\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} E(t)$ sauc par integrālās izteiksmes (12.6) **kodolu**. Sakarību (12.6) saīsināti var pierakstīt operatoru formā

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1+K)\sigma \quad (12.7)$$

kur

$$\frac{1}{E}K\sigma = \int_0^t K(t, \tau)\sigma(\tau)d\tau.$$

Lineārā sakarība starp spriegumiem un deformācijām formā (12.7) no analogas sakarības elastīgam materiālam atšķiras tikai ar to, ka Huka likumā vērtība $1/E$ aizvietota ar integrālooperatoru $(1+K)/E$. Tas dod iespēju vienkāršā veidā risināt lineārās šļūdes teorijas uzdevumus realizējot atbilstošu elastīgās konstantes $1/E$ aizvietošanu ar attiecīgo operatoru. Šādu pieeju sauc par **Volterra principu**, saskaņā ar kuru viskozi elastīgu stieņu vai stieņu sistēmu aprēķinu risinājumi iegūstami analogi elastīgiem risinājumiem, risinājuma gaitā ar integrālooperatoriem rīkojoties kā ar elastīgām konstantēm. Rezultātā iegūstam atrisinājumu funkciju reizinājuma veidā, no kurām pirmā satur elastīgas konstantes un telpiskās koordinātes, bet otrā – zināmu ārējās iedarbības raksturojumu laikā. Aizvietojot elastīgās konstantes ar attiecīgajām integrālooperatoriem un veicot nepieciešamās operācijas iegūstam nepieciešamo rezultātu.

Laikā invariantiem materiāliem

$$E = \frac{1}{F(t-t)} = \frac{1}{F(0)} = \text{const},$$

$$K(t, \tau) = EF'(t-\tau) = K(t-\tau)$$

un deformācijas laikā nosaka sakarība

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau)K(t-\tau)d\tau \right].$$

Laika sākuma momentu τ_0 vispārīgā gadījumā var reducēt uz $-\infty$ un tādā gadījumā iegūstam

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau)K(t-\tau)d\tau \right] \quad (12.8)$$

Attiecinot sākuma momentu uz $-\infty$ iegūstam virkni matemātiska rakstura priekšrocību un varam ievērtēt sākuma spriegumus paraugā, kurus nosacīti var uzskatīt par slogojuma sekām parauga izgatavošanas procesā.

Šļūdes teorija, kura raksturojas ar sakarību (12.8), sauc par pārmantojamības šļūdes teoriju.

Kā jau tika minēts, laikā invariantiem materiāliem, kodols K ir argumenta $(t-\tau)$ funkcija. Funkcija $K(t-\tau)$ raksturo materiāla atmiņu deformācijas veidā $d\varepsilon = K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$ par laika momentā τ pielikto spriegumu $\sigma(\tau)$, kurš darbojas laika sprīdī $d\tau$.

Konstantas slodzes gadījumā $\sigma = \text{const}$, kura pielikta laika momentā $t = 0$, deformāciju noteikšanai iegūstam sakarību

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \int_0^t K(t - \tau) d\tau \right]. \quad (12.9)$$

Izmantojot šo sakarību ilglaicīgā elastības moduļa noteikšanai, iegūstam izteiksmi

$$H = \frac{\sigma}{\varepsilon(\infty)} = \frac{E}{1 + \int_0^\infty K(\theta\tau) d(\theta)}$$

(šai sakarībā ir izmantota mainīgo substitūcija $\tau = t - \theta$).

Laikā neinvariantiem materiāliem ilglaicīgais elastības modulis ir konstantās slodzes pielikšanas brīža τ funkcija.

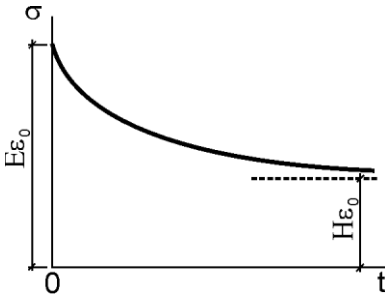
$$H = \frac{E}{1 + \int_0^\infty K(t, \tau) d(\tau)}.$$

12.4. Spriegumu relaksācija

Šļūdējošu materiālu konstantai deformācijai atbilst laikā dilstošs spriegums. Tas var mainīties sasniedzot vērtību nulle vai līdz noteiktai vērtībai, kuru nosaka ilglaicīgais elastības modulis:

$$\sigma(\infty) = \varepsilon H.$$

Spriegumu izmaiņas līkni pie konstantas deformācijas sauc par **relaksācijas līkni** (att. 12.7).



att. 12.7

Materiāla lineārajā deformēšanās diapazonā ir spēkā sakarība

$$\sigma(t) = \varepsilon G(t, \tau).$$

Ar τ apzīmēts moments, kurā momentāni tika realizēta turpmākajā laikā nemainīga deformācija ε .

Gadījumā, ja deformācija nav konstanta, bet mainās pēc uzdota likuma, tad līdzīgi kā šļūdes gadījumā, izmantojot superpozīcijas (uzklāšanās) principu, var iegūt formulu

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) R(t, \tau) d\tau \right], \quad (12.10)$$

kurā ir izmantoti apzīmējumi $G(t, t) = E(t)$; $\frac{1}{E(t)} = \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial \tau} = R(t, \tau)$.

Var pārliecināties, ka izteiksme (12.10) ir vienādojuma (12.6) atrisinājums attiecībā uz $\sigma(t)$ pie uzdotās $\varepsilon(t)$ funkcijas. Funkciju $R(t, \tau)$ sauc par integrālvienādojuma (12.7) ar kodolu $K(t, \tau)$ **rezolventi**.

Laikā invariantiem materiāliem relaksācijas funkcija G ir atkarīga tikai no argumenta $t - \tau$. Līdz ar to

$$\frac{\partial G(t - \tau)}{\partial \tau} = -G'(t - \tau) = ER(t - \tau)$$

un izteiksmes (12.10) vietā iegūstam

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) R(t - \tau) d\tau \right].$$

Rezolventi $R(t, \tau)$ un kodolu $K(t, \tau)$ saista sakarība, kuru var iegūt ievietojot izteiksmi (12.10) formulā (12.7):

$$K(t, \tau) - R(t, \tau) = \int_{\tau}^t R(\varphi, \tau) K(t, \varphi) d\varphi.$$

No šī integrālvienādojuma var noteikt rezolventi uzdotā kodola gadījumā vai arī kodolu, ja zināma rezolvente. Tas veicams izmantojot skaitliskās metodes.

12.5. Integrālvienādojumu kodoli

Integrālvienādojuma (12.8) funkcijas $K(t - \tau)$ uzdevums ir pietiekami precīzi atspoguļot konkrētā materiāla atmiņu par tā noslogotības procesu un ievērtēt sekas deformāciju veidā no patvaļīgā laika momentā pieliktā sprieguma. Dažādiem materiāliem funkcijas $K(t - \tau)$ var būt dažādas. Šai funkcijai jānodrošina pietiekami precīza materiāla eksperimentālās šķūdes līknes aproksimācija. Vieni no vienkāršākajiem kodoliem ir eksponentfunkcijas. Virknei materiālu varam aprobežoties ar divparametru funkciju:

$$K(t - \tau) = Ae^{-\alpha(t - \tau)}. \quad (12.12)$$

Šai gadījumā aproksimācijas parametri ir divas konstantes (A un α). Lai precīzāk ievērotu šķūdējoša materiāla īpašības, tiek izmantoti kodoli eksponentfunkciju summas veidā

$$K(t - \tau) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-\alpha_i(t - \tau)),$$

kur $\alpha_i > 0$.

Šai gadījumā aproksimācijas parametru skaitu var neierobežoti palielināt un tādā veidā maksimāli nodrošināt eksperimentālo līkņu aproksimācijas precizitāti visā slogojuma laika diapazonā.

Bieži sastopamas arī cita veida kodola funkcijas:

$$K(t - \tau) = A(t - \tau)^{-\beta} \quad \text{vai} \quad K(t - \tau) = A(t - \tau)^{-\beta} \exp(-\alpha(t - \tau)),$$

$$\text{kur} \quad 0 < \frac{1}{\beta} < 1.$$

Ievietojot eksponentkodolu vienādojumā (12.8) un pēc tam to diferencējot pēc t , iegūstam sekojošu vienādojumu sistēmu

$$\begin{aligned} E\varepsilon &= \sigma + Ae^{-\alpha t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau, \\ E\dot{\varepsilon} &= \dot{\sigma} - A\alpha e^{-\alpha t} \int_0^t \sigma(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau + A\sigma \end{aligned}$$

No šiem vienādojumiem izslēdzot $\int_0^t \sigma(\tau) e^{\alpha \tau} d\tau$, iegūstam

$$\alpha E\varepsilon + E\dot{\varepsilon} = \alpha\sigma + \dot{\sigma} + A\sigma. \quad (12.12)$$

Šo vienādojumu atrisinot kā pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, iegūstam

$$\sigma = Ce^{-(\alpha+A)t} + \int_0^t [\alpha E\varepsilon(\tau) + E\dot{\varepsilon}(\tau)] e^{-(\alpha+A)(t-\tau)} d\tau. \quad (12.13)$$

Patvaļīgā konstante C ir nosakāma no sākuma nosacījuma $\sigma(0) = \sigma_0$. No šī nosacījuma seko, ka $C = \sigma_0$. Gadījumā, ja sākuma momentā nav pielikti spriegumi ($\sigma_0 = 0$), sakarību (12.13) iegūstam sekojošā formā

$$\sigma = \int_0^t [\alpha E\varepsilon(\tau) + E\dot{\varepsilon}(\tau)] e^{-(\alpha+A)(t-\tau)} d\tau.$$

Veicot integrēšanu pa daļām, iegūstam sakarību:

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - A \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{-(\alpha+A)(t-\tau)} d\tau \right].$$

Tātad rezolvente eksponentkodola gadījumā arī ir eksponentfunkcija:

$$R(t - \tau) = Ae^{-(\alpha+A)(t-\tau)}$$

Diferenciālvienādojumu (12.12) var pārveidot formā

$$En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma, \quad (12.14)$$

kur H – ilglaicīgās elastības modulis, kas atbilst ļoti lēnam deformēšanās procesam, kurā deformācijas un sprieguma izmaiņas ātrumu var neņemt vērā salīdzinot ar pārējiem vienādojuma (12.14) locekļiem. Ļoti ātru procesu gadījumā gluži otrādi var atmet saskaitāmos, kuri satur ε un σ . Tā rezultātā iegūstam sakarību starp deformācijas un sprieguma izmaiņas ātrumiem Huka likuma formā.

Konstante n raksturo sprieguma dzišanas ātrumu pie nosacījuma $\varepsilon = 0$ un tiek saukta

par relaksācijas laiku. Salīdzinot vienādojumus (12.12) un (12.14) varam konstatēt, ka

$$H = \frac{\alpha E}{(\alpha + A)}; n = \frac{1}{(\alpha + A)}; \alpha = \frac{H}{nE}; A = \frac{(E + 1)}{nE}.$$

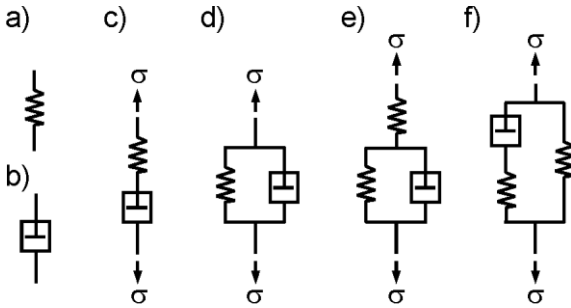
Izmantojot diferenālvienādojumu (12.14) ērti risināt virkni ar materiāla šļūdi saistītu uzdevumu. Šādi risinājumi ir daudz vienkāršāki par tiem, kuros tiek izmantoti integrālvienādojumi ar eksponentkodoliem.

12.6. Materiāla struktūras modeļi

Uzskatāmu priekšstatu par šļūdes un relaksācijas mehānismiem daudzkomponentu materiālos sniedz vienkāršoti šo materiālu modeļi, kuri veidoti no dažādos veidos savstarpēji savienotiem elementāriem elastīgiem un viskoziem elementiem. Uz elastīgo elementu (att. 12.8a) tiek attiecināts Huka likums, t.i. lineārs sakars starp deformācijām ε_e un spriegumiem σ_e :

$$\varepsilon_e = \sigma_e / E,$$

kur E –elementa elastības koeficients.



att. 12.8

Viskozajam elementam (att. 12.8b) tiek piekārtota spēja deformēties ar zināmu ātrumu $\dot{\varepsilon}_v$, kurš ir proporcionāls spriegumam šai elementā:

$$\dot{\varepsilon}_v = \sigma_v / K,$$

kur K – viskozā elementa viskozitātes koeficients.

Vienkāršākās kombinācijas no viena elastīgā un viskozā elementa veido tā saucamo **Maksvela modeli** (abi elementi savienoti virknē, sk. att. 12.8c) vai **Foigta modeli** (abi elementi savienoti paralēli, sk. att. 12.8d).

Maksvela modeļa gadījumā varam sastādīt šādu vienādojumu sistēmu:

$$\sigma = K\dot{\varepsilon}_v; \quad \sigma = E\varepsilon_e; \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v.$$

Izslēdzot no šiem vienādojumiem deformācijas ε_v un ε_e , iegūstam pirmās kārtas diferenciālvienādojumu, kurš saista uz modeli darbojošos spriegumu σ un tā radīto modeļa deformāciju ε :

$$\sigma + n\dot{\sigma} = K\dot{\varepsilon} \quad (12.15)$$

Koeficienta $n = K/E$ mērvienība ir laika mērvienība un Maksvels šo koeficientu nosauca par relaksācijas laiku.

Foigta modeļa gadījumā vienādojuma sistēma ir

$$\sigma_e = E\varepsilon; \quad \sigma_v = K\dot{\varepsilon}; \quad \sigma_e + \sigma_v = \sigma.$$

Izslēdzot mainīgos σ_e un σ_v , iegūstam diferenciālvienādojumu

$$\sigma = E\varepsilon + K\dot{\varepsilon}. \quad (12.16)$$

Veicot abu vienkāršāko modeļu deformēšanās nosacījumu analīzi, varam secināt, ka šo modeļu īpašības visai nepilnīgi atbilst reālu šķūdejošu materiālu īpašībām. Tā, piemēram, vienādojums (12.15) nosaka konstantu deformēšanās ātrumu konstanta sprieguma gadījumā. Tas ir iespējams tikai ļoti speciālā gadījumā. Savukārt vienādojums (12.16) neapraksta sprieguma relaksāciju konstantas deformācijas gadījumā.

Vispārinot Maksvela un Foigta modeļus, iespējams izveidot sarežģītākus struktūras modeļus. Pievērsīsimies att. 12.8 e,f parādītajiem modeļiem.

Shēmu kustības vienādojumu sistēmas ir sekojošas:

Shēma 12.8e

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \varepsilon_{e2} \\ \sigma_v + \sigma_{e2} &= \sigma_{e1} = \sigma \\ \varepsilon_{e1} + \varepsilon_{e2} &= \varepsilon \\ K\dot{\varepsilon}_v &= \sigma_v; E_1\varepsilon_{e1} = \sigma_{e1}; \\ E_2\varepsilon_{e2} &= \sigma_{e2} \end{aligned}$$

Shēma 12.8f

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_{e2} \\ \sigma &= \sigma_v + \sigma_{e1} \\ \varepsilon &= \varepsilon_{e1} = \varepsilon_v + \varepsilon_{e2} \\ K\dot{\varepsilon}_v &= \sigma_v; E_1\varepsilon_{e1} = \sigma_{e1}; \\ E_2\varepsilon_{e2} &= \sigma_{e2} \end{aligned}$$

Izslēdzot no šīm sistēmām lielumus ar indeksiem, abos gadījumos iegūstam diferenciālvienādojumus, kuri reducējami uz vienādojumu

$$En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma \quad (12.17)$$

Atšķirīgas vienīgi ir vienādojuma koeficienta vērtības. Shēmas (att. 12.8e) gadījumā

$$E = E_1; \quad H = E_1E_2/(E_1 + E_2); \quad n = K/(E_1 + E_2),$$

bet shēmas (att. 12.8f) gadījumā

$$E = E_1 + E_2; \quad H = E_1; \quad n = K/E_2.$$

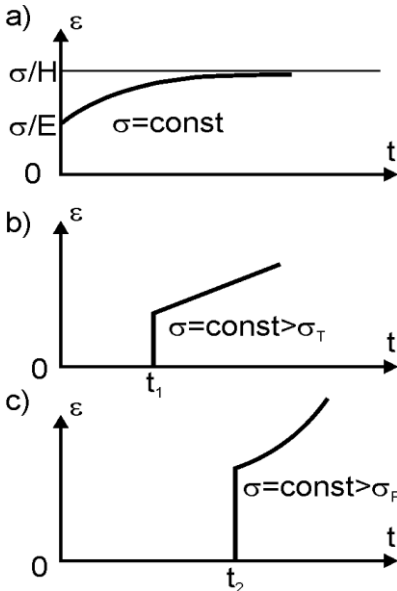
Vienādojums (12.17) daudzos gadījumos pietiekami precīzi apraksta šķūdes un relaksācijas procesus.

Vēloties paaugstināt materiāla īpašību apraksta precizitāti, varam izveidot aizvien komplikētākas struktūras modeļus ieslēdzot tajos papildus elastīgos un viskozos elementus. Visiem šādiem modeļiem atbilst diferenciālvienādojumu vispārīgā forma

$$\sum_{i=0}^n a_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j \sigma^{(j)},$$

kurā vienādojuma kārtu nosaka viskozo elementu skaits modelī. Atrisinot šos vienādojumus attiecībā pret deformācijām vai spriegumiem, iegūsim materiāla šķūdes vai relaksācijas integrālvienādojumu, kuru kodols un rezolvente ir eksponentfunkcija ar argumentu $(t - \tau)$ summa.

12.7. Nelineāra šļūde



att. 12.9

Eksistē vairāki paņēmieni nelineāro šļūdes teoriju izveidošanai. Šļūdes nelinearitāte raksturīga relatīvi lielu spriegumu gadījumos. Viena no vienkāršākajām metodikām ir **gabaliem lineāras aproksimācijas metode**. Kaut arī šī metode ir visai tuvināta, tā tomēr dod iespēju spriest par materiāla šļūdi dažādos deformēšanās diapazonos.

Dažādām deformēšanās stadijām tiek piekārtoti atšķirīgi diferenciālie vienādojumi. Laikā invariantiem materiāliem var tikt izmantoti vienādojumi:

pirmā deformēšanās stadija

$$nE\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = \sigma + n\dot{\sigma} \quad (12.18)$$

otrā deformēšanās stadija

$$nE\dot{\varepsilon} = \sigma + n\dot{\sigma} - \sigma_t \quad (12.19)$$

Parametrs σ_t nosaka sprieguma vērtību, kuru var nosaukt par tecēšanas robežu.

Pirmā deformēšanās stadija ir lineāra un atbilst vienādojumam (12.8). Konstanta sprieguma gadījumā $\sigma = \text{const}$ iegūstam šļūdes līkni eksponetfunkcijas veidā (12.9a):

$$\varepsilon(t) = \sigma \left[1/E + (1/H - 1/E) \exp(-Ht/(nE)) \right] \quad (12.20)$$

Otrajā deformēšanās stadijā slodzes, kuru rezultātā $\sigma \geq \sigma_t$, izraisa deformēšanos ar konstantu ātrumu

$$\dot{\varepsilon} = \sigma/(nE)$$

(att. 12.9.b).

Pārejas robeža starp pirmo un otro deformēšanās stadiju ir nosacījums

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \sigma_t / H = \text{const} \quad (12.21)$$

Divām iepriekšējām var pievienot arī trešo deformēšanās stadiju, kuru apraksta vienādojums:

$$nE\dot{\varepsilon} - B\varepsilon = \sigma + n\dot{\sigma} - \sigma_{st} \quad (12.22)$$

Robežu starp otro un trešo deformēšanās stadiju nosaka izteiksme

$$\varepsilon = \varepsilon_2 = (\sigma_{st} - \sigma_T / B) = \text{const}.$$

Parametrs B raksturo negatīvu elastības moduli trešajā nestabilajā deformēšanās stadijā, bet σ_{st} ir sprieguma vērtība, kura nosaka priekšsabrūkuma nestabilā procesa sākumu.

Jāatzīmē, ka pieminētā pārmantojamības šļūdes teorija visai precīzi atspoguļo sakarības

starp spriegumiem un deformācijām daudziem viskozi elastīgiem materiāliem ierobežotā spriegumu diapazonā. Ārpus šāda spriegumu diapazona vispārīgu sakarību, kuras pietiekami precīzi varētu aprakstīt dažādu materiālu deformēšanās procesus pie dažādām temperatūrām un dažādiem spriegumu izmaiņas nosacījumiem nav. Šādu situāciju var izskaidrot ar to, ka nelineārās šļūdes (un tieši ar tādu šai gadījumā mums ir darīšana) parādība ir ārkārtīgi sarežģīta un ir atkarīga no daudziem faktoriem. Inženieru aprēķinos tiek lietotas vienkāršotas uz papildus hipotēzēm balstītas teorijas. Pie tādām pieskaitāmas: vecošanās teorija, tecēšanas teorija, pastiprināšanās teorija.

Pievērsīsimies īsam to raksturojumam.

Vecošanās teorija. Saskaņā ar šo teoriju kopējās materiāla deformācijas jebkurā laika momentā sastāv no īslaicīgām, kas atbilst spriegumiem, kuri nepārsniedz proporcionālītātes robežu, un laikā mainīgām deformācijām, kuras nosaka sprieguma un laika divargumentu funkcija. Parasti šo funkciju sadala divās, no kurām viena ir tikai sprieguma funkcija, bet otra – tikai laika funkcija. Sprieguma funkciju bieži vien pieņem pakāpju funkcijas veidā: $f(\sigma) = \sigma^m$.

Tātad saskaņā ar vecošanās teoriju, deformācijas tiek noteiktas ar sakarību:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \sigma^m \cdot \psi(t), \quad (12.23)$$

tiek uzskatīts, ka šāda sakarība ir spēkā arī mainīgu spriegumu gadījumos.

Svarīgi ņemt vērā, ka jēdziens „vecosšanās teorija” nekādi nav saistīts ar materiāla novecosšanās procesu.

Tecēšanas teorija. Šī teorija balstīta uz sakarībām starp deformēšanās ātrumu $\dot{\varepsilon}$ un sprieguma izmaiņas ātrumu, pašu spriegumu un slogojuma laiku. Tātad tiek pieņemta sakarība

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \Phi(\sigma, t). \quad (12.24)$$

Šī sakarība ir spēkā pie ne pārāk maziem šļūdes ātrumiem un lēniem monotoni mainīgiem spriegumiem.

Gadījumos, kad šļūdes deformācija būtiski pārsniedz elastīgās deformācijas, sakarība (12.24) reducējas uz $\dot{\varepsilon} = \Phi(\sigma, t)$.

Tādā gadījumā, kad funkcija $\Phi(\sigma, t)$ nav atkarīga no laika, pēdējā sakarība nosaka stabilizējošās šļūdes procesu un šļūdējošo ķermeni var uzskatīt par nelineāri viskozu šķidrumu.

Savas vienkāršības dēļ vecošanās un tecēšanas teorijas plaši tiek izmantotas inženieraprēķinos.

Pastiprināšanās teorija. Ar pastiprināšanos tiek saprastas tādas šļūdes deformāciju uzkrāšanās rezultātā notiekošas materiāla izmaiņas, kuras izraisa šļūdes ātruma samazināšanos pie dotiem spriegumiem un temperatūras. Vienkāršākajā gadījumā par pastiprināšanās mēru tiek izmantota šļūdes deformācija ε_{sl} . Tiek izmantota sakarība

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \psi(\varepsilon_s, \sigma). \quad (12.25)$$

Funkciju $\psi(\varepsilon_s, \sigma)$ bieži izmanto sekojošā formā

$$\psi(\varepsilon_s, \sigma) = \varepsilon_s^{-p} f(\sigma).$$

Pastiprināšanās teorija ne pārāk sarežģītu ārējās slodzes izmaiņas likumsakarību gadījumos visai apmierinoši apraksta materiāla šļūdi.

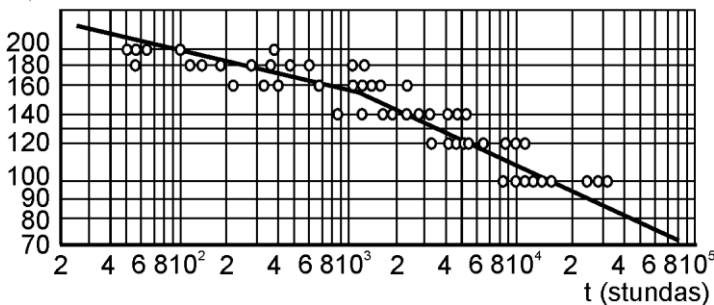
12.8. Materiāla ilglaicīgā stiprība

Ilglaicīgas ekspluatācijas apstākļos būvmateriāliem bīstams faktors ir ne tikai deformāciju pieaugums laikā, bet arī iespēja sabrukt pēc noteikta laika pie spriegumiem, kuri nav bīstami īslaicīga slogojuma apstākļos. Šāda situācija liek pētīt un ievērtēt šlūdējoša materiāla stiprību laikā. Ilglaicīgās stiprības raksturlielums ir **ilglaicīgas stiprības robeža** σ_{il} – minimālais nepārtraukti darbojošais konstantais spriegums, pie kura materiāls sabrūk noteiktā laika brīdī.

Materiāla sabrukumam laikā var būt divējāds raksturs – trausls vai viskozs. Trausla sabrukuma pamatā ir defektu uzkrāšanās un plaisu attīstība starp polikristālisku materiālu graudainās struktūras elementiem. Viskoza rakstura sabrukums veidojas šo struktūru elementu iekšienē. Iespējami arī jaukta veida sabrukuma gadījumi, kad sabrukumi veidojas kā pie struktūras elementu virsmām, tā arī pašos elementos. Vienam un tam pašam materiālam sabrukuma raksturs var mainīties atkarībā no slogojuma veida. Zemākiem sprieguma līmeņiem, tātad ilgākam materiāla noslogotības laikam, raksturīgas mazākas robeždeformācijas un trausls sabrukums.

Laiku no materiāla noslogošanas līdz tā sabrukumam sauc par **ilglaicību**. Katrai laikā nemainīgai sprieguma vērtībai atbilst sava ilglaicības vērtība. Augstākām sprieguma vērtībām atbilst īsāka ilglaicība.

Materiāla ilglaicīgās stiprības robežas un ilglaicības funkcionālo sakarību attēlo divi taisni nogriežņi logaritmiskās vai puslogaritmiskās koordinātu asīs. Kreisajam taisnes nogriežnim (augstākiem sprieguma līmeņiem) atbilst viskozs sabrukums, bet labajam taisnes nogriežnim – trausls sabrukums. Att. 12.10 redzami tērauda pie $T = 525^\circ\text{C}$ ilg-



att. 12.10

laicīgās stiprības eksperimentālie dati un tos aproksimējošie divi krustiski taisnes nogriežņi. Pārejas punkts dažādiem materiāliem var būt vairāk vai mazāk izteikts un tā rajonā vērojama līklīnijas veida pārejas zona. Atsevišķos gadījumos pārejas posma vispār nav.

Prakse rāda, ka ilglaicīgās stiprības līkni varam uzskatīt par rimstošu. Tas nozīmē, ka

eksistē spriegumi, pie kuriem materiāls nesabrūk nekad (precīzāk būtu teikt – reālās ekspluatācijas laikā). Betonu izstrādājumiem tiek pieņemts, ka pietiekami ilgam noslozdes laikam (50 .. 70 gadi) ilglaicīgās stiprības robeža sastāda 80 % no īslaicīgās betona (prizmatiskās) stiprības σ_B .

Polimēru bāzes kompozītie un kokmateriāli bieži tiek ekspluatēti istabas temperatūrām atbilstošos apstākļos un tiem raksturīgs visai plašs ilglaicīgās stiprības diapazons. Tā, piemēram, priedes ilglaicīgās stiprības robeža attiecībā pret īslaicīgo stiprību spiedē (44 MPa / 76 MPa) un stiepē (56 / 114,5) šķiedru virzienā attiecīgi sastāda 58 % un 50 %. Līdzīgi arī no plānām lobīta bērza kārtām veidotām slāņainām plātnēm DSP – V ilglaicīgās stiprības robeža ir 75 MPa, bet īslaicīgā stiprība – 148 MPa.

Par vienvirziena epoksīda stiklaplastu ilglaicīgās stiprības īpašībām liecina pie istabas temperatūras eksperimentāli iegūtie dati:

σ , MPa	t (h) pie T = 20°C	t (h) pie T = 80°C
780	0	-
624	1	-
546	27	0,3
468	4872	85

Prognozējot materiāla ilgizturību bieži tiek izmantotas pakāpes vai eksponentveida sakarības $t = a\sigma^{-\beta}$ vai $t = a \cdot \exp(-b\sigma)$.

Svarīgi ņemt vērā, ka materiālu ilgizturība strauji samazinās paaugstinoties ekspluatācijas temperatūrai. Sevišķi tas attiecas uz zemākajiem spriegumiem. Tā, piem., vienvirziena stiklaplastam izmainoties temperatūrai par 60° ilgizturība pie sprieguma $\sigma = 0,7\sigma_B$ samazinājusies 30 reizes, bet pie sprieguma $\sigma = 0,6\sigma_B$ pat 57 reizes.

13. MATERIĀLA NOGURUMS

Daļa no būvju elementiem ekspluatācijas gaitā tiek pakļauti laikā mainīgas slodzes iedarbībai. Gadījumos, kas šādu slodžu izraisītie spriegumi pārsniedz noteiktu robežu, materiālā realizējas neatgriezeniski procesi, kuru rezultātā veidojas plaisas. Savukārt spriegumu koncentrācija uz plaisu malām veicina to atvēršanos. Parasti plaisas sāk veidoties uz darinājuma ārējām virsām un izplatās tā dziļumā. Šāds process novājina konkrēto šķēlumu un laika gaitā plaisām sasniedzot kritisko garumu, detaļa vai būvelements sabrūk, pie kam sabrukums notiek bez izteiktām paliekošām deformācijām pat plastiska materiāla gadījumā. Jau 19. gs. tika novērots, ka mašīnu detaļas, kuras bija pakļautas mainīgas zīmes slodzēm, pēkšņi sabruka pie spriegumiem, kuri stipri mazāki par attiecīgā materiāla stiprības robežu. Šādu situāciju laikā daudzkārt mainīgu spriegumu iedarbības rezultātā var uzskatīt par tādu materiāla īpašību izmaiņu kura raksturojas ar jēdzienu „nogurums”.

Par materiāla nogurumu sauc pakāpenisku bojājumu uzkrāšanos procesu laikā mainīga sprieguma iedarbībā, kura rezultātā materiālā attīstās plaisas un iestājas sabrukums.

Materiāla spēju pretoties šim procesam (nogurumam) sauc par **izturību**. Pētot noguruma izraisītā materiāla sabrukuma fiziku tiek pieņemts, ka tā cēlonis ir materiāla strukturālā neviendabība. Šīs neviendabības raksturs dažādiem materiāliem vērojams kā mikro– tā arī makroskopiskā līmenī. Mikroskopiskās neviendabības pamatā ir materiālu kristāliskā struktūra. Tā tas ir metāliem, bet nemetāliskiem materiāliem neviendabība vērojama molekulārajā līmenī. Šķiedrveida un kompozītiem materiāliem ir raksturīga makroskopiskā neviendabība.

Noguruma veida sabrukuma mehānisms metāliem saistīts ar to atsevišķo graudu izmēru un formas gadījuma raksturu, to kristalogrāfisko orientāciju, kā arī gadījuma veida defektu un piejaukumu klātbūtni. Šādos apstākļos metālā pie mainīgiem spriegumiem, kuri makroskopiski pat nepārsniedz elastības robežu, atsevišķos nelabvēlīgi orientētos graudos rodas plastiskās deformācijas, kuras saistītas ar atsevišķu graudu nobīdi pa kristalogrāfiskajām plaknēm. Pie noteikta sprieguma līmeņa dažos no kristāliskajiem graudiem notiek sabrukums, kā rezultātā veidojas mikro plaisa pa kādu no grauda slīdamības plaknēm. Plaisu veidošanās saistīta ar bīdes spriegumiem, bet to attīstība ar normālsprriegumiem. Radušos mikro plaisu saplūšana veido makro plaisu attīstībai labvēlīgus apstākļus. Šādu procesu paātrina sākotnējo defektu klātbūtne.

Kaut arī ir veikti visai daudzveidīgi pētījumi par dažādu materiālu izturību, tomēr jāsecina, ka cietu deformējamu ķermeņu stiprības fizikālā teorija pagaidām vēl nav attīstījusies tik tālu, lai uz tās pamata radītu izturības aprēķinu metodes. Līdz ar to pagaidām noguruma stiprības teorija attīstās uzkrājot eksperimentālus datus, uz kuru pamata iespējams formulēt izturības aprēķina likumsakarības.

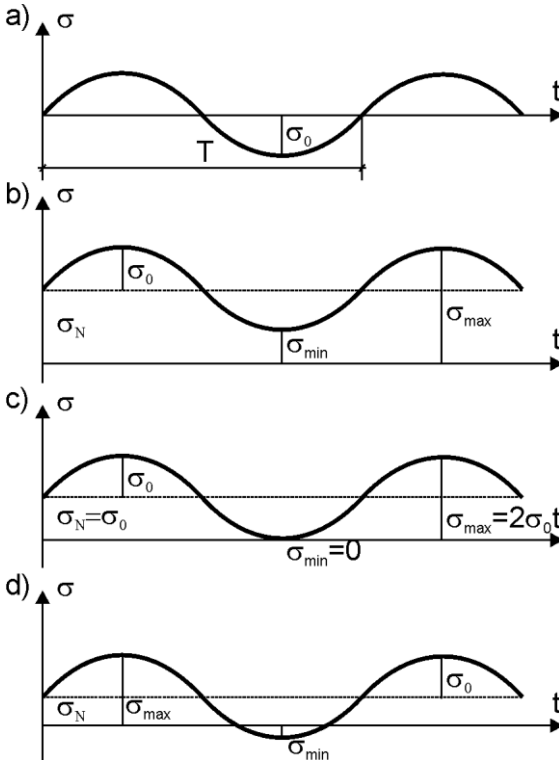
13.1. Cikliska sprieguma raksturlielumi

Materiāla noguruma stiprība mainīgu spriegumu gadījumā ir atkarīga no spriegumstāvokļa veida un no sprieguma izmaiņas laikā rakstura. Pievērsīsimies vienasīgam spriegumstāvoklim. Par sprieguma ciklu uzskatīsim vienreizēju to nomaiņu viena perioda

garumā. Regulāru un monotonu sprieguma izmaiņu laikā varam aprakstīt ar sakarību

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t \quad (13.1)$$

Sakarībai (13.1) atbilst att. 13.1a attēlotais grafiks.



att. 13.1

Tādad spriegumi laikā periodiski mainās, pēc laika sprīža T sasniedzot to pašu vērtību (T periods). Dažādiem spriegumu izmaiņas likumiem atbilst dažāda veida cikli. Iepriekšminētais cikls ir simetrisks. To raksturo pēc absolūtās vērtības vienādi ekstremālie (maksimālie un minimālie) spriegumi. Gadījumā, kad cikliskā slodze summējas ar konstantu ass spēku izraisītu spriegumu, maiņas likumu apraksta sakarība

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_0 \sin \omega t,$$

kur

$$\sigma_N = \frac{N}{A}.$$

Atkarībā no ass spēka N lieluma normālsprieguma izmaiņas grafiki laikā var būt att. 13.1b,c,d parādītās trīs atšķirīga rakstura periodiskas līknes. Šāda veida spriegumu izmaiņu likumsakarības sauc par asimetriskiem cikliem.

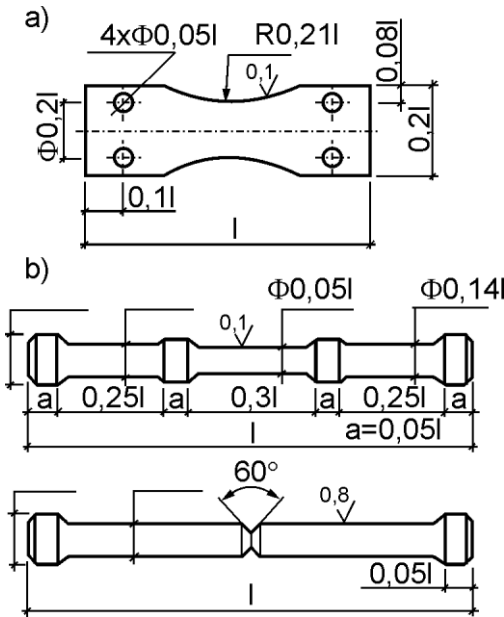
Šādiem cikliem ir tipisks nosacījums – maksimālo un minimālo spriegumu absolūtās vērtības nav vienādas. Gadījumā, ja $\sigma_{\max}$ un $\sigma_{\min}$ zīmes ir atšķirīgas, cikli ir maiņzīmju, bet ja to zīmes ir vienādas, lietojam apzīmējumu vienzīmju asimetriskais cikls. Gadījumos, kad vienā no ekstremālām sprieguma vērtībām ($\sigma_{\max}$ vai $\sigma_{\min}$) ir nulle, ciklu sauc par pulsējošu (piem., att. 13.1c).

Jebkuru spriegumu ciklu var raksturot ar diviem parametriem $\sigma_v = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ vai $\sigma_0 = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$, t.i. ar konstantu cikla vidējo spriegumu σ_v un cikla amplitūdu σ_0 .

Maksimālā un minimālā sprieguma starpību sauc par sprieguma atvērzienu, bet to attiecību $\sigma_{\min} / \sigma_{\max} = r$ par cikla asimetrijas koeficientu. Pulsējošiem cikliem $r = 0$, bet simetriskiem $r = -1$. Ciklus ar vienādām koeficienta r vērtībām sauc par līdzīgiem.

13.2. Materiālu noguruma un izturības robežas eksperimentāla pārbaude.

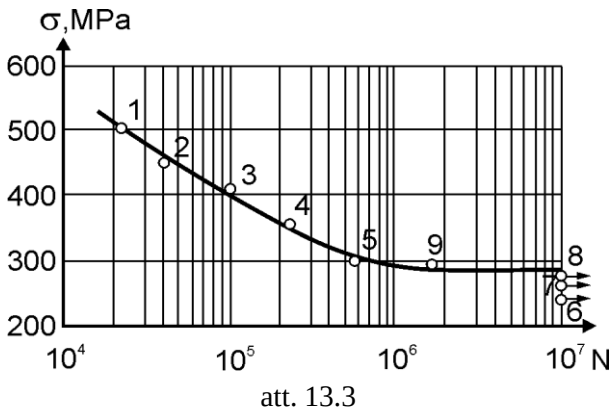
Materiāla izturības robežas noteikšanai tika pielietotas dažādas konstrukcijas pārbaudes mašīnas, kuras pieļauj dažāda veida deformāciju pārbaudes: lieci, vērpi, stiepi – spiedi. Pārbaudes mašīnu konstrukcijas atšķiras ar slodzes padeves principu uz paraugu. Šīs mašīnas var būt inerces, hidrauliskās vai ar mehānisko padevi.



att. 13.2

tiek veikti ar speciālām pārbaudes mašīnām, kuras piemērotas lieces, vērpes, stiepes – spiedes vai arī saliktajam spriegumstāvoklim.

Pirmo noguruma pārbaudē mašīnu XIX gs. vidū konstruēja vācu zinātnieks A. Vēlers. Par godu šim zinātniekam materiāla noguruma līknes (att. 13.3) tiek sauktas par Vēlera līknēm. Šo līkņu iegūšana ir ļoti darbietilpīgs process. Tiek pārbaudīti ne mazāk kā desmit materiāla paraugi pie vienas konstantas spriegumu amplitūdas σ_0 . Katrs paraugs tiek pārbaudīts pie vienas sprieguma amplitūdas līdz sabrukumam vai ciklu bāzes skaitlim (iepriekš uzdots ciklu skaits). Pirmā paraugu grupa tiek pārbaudīta pie sprieguma $\sigma_0 \approx 0,7\sigma_B$. Pakāpeniska sprieguma amplitūdas σ_0 samazināšana noved pie materiāla ilgizturības (ciklu skaita līdz sabrukumam) pieauguma. Tā kā ciklu skaits samazinot σ_0 aug



att. 13.3

Parasti izturības pārbaudēs izmanto rūpīgi apstrādātus, pilnīgi vienādus paraugus, kuru skaits nav mazāks par 30. Paraugu forma atkarīga no deformācijas veida.

Plakana parauga forma, kurus izmanto pārbaudei uz lieci parādīta att. 13.2a, bet parauga forma, kuri tiek pārbaudīti stiepē – spiedē, att. 13.2b.

Svarīgi ņemt vērā, ka palielinot paraugu diametru no $d = 6 - 7$ mm līdz $d = 160 - 200$ mm konstruktīvo tēraudu izturības robeža pazeminās par 30 – 40 %.

Materiāla izturības galvenais raksturlielums ir eksperimentāli noteikta noguruma līkne. Tā ir līkne, kura saista ciklu maksimālo sprieguma vērtību $\sigma_{\max}$ ar ciklu skaitu N , kuru izturējies materiāls pirms sabrukšanas. Tādas līknes piemērs parādīts att. 13.3. Noguruma pētījumi

tiek pārbaudīts pie vienas sprieguma amplitūdas līdz sabrukumam vai ciklu bāzes skaitlim (iepriekš uzdots ciklu skaits). Pirmā paraugu grupa tiek pārbaudīta pie sprieguma $\sigma_0 \approx 0,7\sigma_B$. Pakāpeniska sprieguma amplitūdas σ_0 samazināšana noved pie materiāla ilgizturības (ciklu skaita līdz sabrukumam) pieauguma. Tā kā ciklu skaits samazinot σ_0 aug

strauji, tad konstruējot Vēlera līkni tiek lietota puslogaritmiskā koordinātu sistēma.

Spriegumu σ_r , pie kura Vēlera līknē iegūst horizontālu raksturu sauc par izturības robežu. Simetriskos ciklos šo robežu apzīmē ar σ_{-1} .

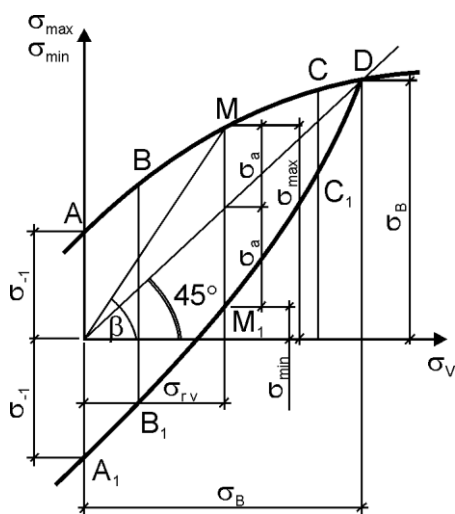
Dažiem materiāliem (piem. oglekli saturošiem tēraudiem) noguruma liknē parādās horizontālā daļa, bet leģētiem tēraudiem un krāsainiem metāliem šāda posma nav. Tas nozīmē, ka otrajā gadījumā nav iespējams noteikt to ciklu skaitu, pēc kura materiāls vairs nesabrūk. Tādos gadījumos par cikla bāzes skaitli tiek pieņemts $N = 10^8$ un par materiāla izturības robežu tiek pieņemts tas mazākais cikla maksimālais spriegums pie kura notiek sabrukums. To apzīmē ar σ_{-1N} .

Svarīgi ņemt vērā, ka noguruma pārbaužu rezultātiem ir liela izkliede un rezultātu ticamības nodrošināšanai ir nepieciešams pārbaudīt daudz paraugu. Eksperimentāli konstatēts, ka metāliem ir spēkā sakarība $\sigma_{-1} = (0,4 \dots 0,5) \sigma_B$, bet krāsaino metālu izturības robeža mainās diapazonā $(0,25 - 0,5) \sigma_R$, kur σ_R - materiāla stiprības robeža.

Dažādiem slogojuma veidiem izturības robežas ir atšķirīgas.

13.3. Robežspriegumu diagramma.

Lai raksturotu materiāla pretestību mainīgu spriegumu iedarbībai dažādos cikla asimetrijas gadījumos, tiek konstruēta robežsprieguma diagramma (Smita diagramma). Konstruējot šo diagrammu uz vertikālās ass tiek atliekti cikla maksimālais $\sigma_{\max}$ un minimālais $\sigma_{\min}$ spriegumi, bet uz horizontālās ass – cikla vidējais spriegums σ_V . Robežlielumi $\sigma_r, \sigma_{r\min}$ un σ_{rV} fiksētu ciklu parametru gadījumā tiek noteikti eksperimentāli konstruējot noguruma līknes.



att. 13.4

Parasti robežspriegumu diagrammas konstruēšanu uzsāk veicot materiāla pārbaudes simetriskā ciklā ($\rho = -1$). Šai gadījumā robežspriegums būs izturības robeža σ_{-1} un

$$\sigma_{-1\max} = \sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1\min} = -\sigma_{-1}, \quad \sigma_{-1y} = 0.$$

Šādam ciklam diagrammā (att. 13.4) atbilst punkti A_1 un B_2 uz ordinātu ass.

Pārbaudot dotā materiāla partiju pie uzdota simetrijas koeficienta $\rho = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$, nosakām

lielāko un mazāko sprieguma vērtības, pie kurām materiāls strādā uz izturības robežas σ_r , t.i., $\sigma_{r\max} = \sigma_r$,

$$\sigma_{r \min} = r \cdot \sigma_r$$

un

$$\sigma_{rv} = (\sigma_{r\max} + \sigma_{r\min})/2.$$

Diagrammā iegūstam punktus A_2 un B_2 , kuru abscisa ir σ_{rv} , bet ordinātas atbilstoši $\sigma_{r\max}$ un $\sigma_{r\min}$. Rīkojoties analogi citu r vērtību gadījumā iegūstam punktus A_3B_3 , A_4B_4 , u.t.t. Savienojam iegūtos punktus ar gludu līkni. Diagrammas galējais punkts D atbilst ciklam, kad $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_v$ un $r = 1$. Tas ir konstantas slodzes gadījums. Robežsprieguma vērtība šai gadījumā ir materiāla robežstiprība σ_{st} . Līdz ar to punkta D abscisa un ordināta ir vienāda ar materiāla robežstiprību.

Tātad līnijas A_1D ordinātas atbilst materiāla izturības robežai dažādām asimetrijas koeficienta r vērtībām.

Stari, kuri savieno diagrammas koordinātu sākumpunktu ar kādu no līknes punktiem ir to punktu ģeometriskā vieta, kuri raksturo ciklus ar vienādu asimetrijas koeficientu r , jo

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_v} = \frac{2\sigma_{\max}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{2}{1+r}.$$

Lai aprēķinātu materiāla izturības robežu, fiksēta asimetrijas koeficienta gadījumā, ar iepriekš minēto sakarību nosakām leņķi β un novelkam attiecīgu staru līdz tā krustpunktam ar līniju A_1D . Krustpunkta ordināta ir izturības robeža σ_r konkrētā slogojuma gadījumā.

13.4. Materiāla izturību iespaidojošie faktori

Materiālu izturība atkarīga no tādiem faktoriem kā: spriegumu koncentrācija, detaļas izmēri, virsmas stāvoklis, temperatūra, materiāla ķīmiskais sastāvs, apkārtējā vide, kristālu orientācija u.c.

Ņemot vērā, ka visvairāk izpētītie ir simetriska slogojuma tipa cikli ($r = -1$), par izturības robežas etalonu pieņemts uzskatīt gludi pulētu paraugu ar diametru 7 – 10 mm stiprības robežu σ_{-1} .

Dažādu faktoru iedarbības radīto novirzi no šīs vērtības uzskata par šī faktora iedarbības mēru uz materiāla izturības robežu.

Spriegumu koncentrācijas vietās parādās noguruma plaisas. Spriegumu koncentrācijas cēlonis var būt caurums, vītnes, noapaļojums, gropes, u.c.

Tiek lietoti teorētiskie α_σ un efektīvie k_σ koncentrācijas koeficienti stiep – spiedē, vai atbilstoši α_τ un k_τ bīdē.

Izotropu un elastīgu materiālu gadījumā teorētisko koncentrācijas koeficientu nosaka sakarība

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n},$$

kur $\sigma_n = \frac{N}{A}$ - nominālais spriegums, kurš noteikts izmantojot šķēluma bruto laukumu

A (t.i. laukumu, kurš nav samazināts cauruma vai cita veidojuma dēļ).

Sprieguma efektīvo koncentrācijas koeficientu nosaka parauga bez sprieguma koncentrācijas izturības robežas un analoga parauga vai detaļas ar koncentratoru izturības robežas attiecība.

Tātad normālspriegumu gadījumā $k_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k}$, bet bīdes spriegumu gadījumā $k_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1k}$ (σ_{-1} un τ_{-1} - gludu paraugu izturības robežas, bet σ_{-1k} un τ_{-1k} - izturības robežas paraugiem ar spriegumu koncentratoriem).

Efektīvie koncentrācijas koeficienti ir mazāki par teorētiskajiem un šī atšķirība tiek raksturota ar jutības koeficientu:

$$q = \frac{k_{\sigma} - 1}{\alpha_{\sigma} - 1}.$$

Jo augstākas materiāla mehāniskās īpašības, jo jutības koeficienta vērtība tuvāka vienam. Tā augstas stiprības tēraudiem $q \approx 1$.

Zinot materiāla jutības koeficientu, varam noteikt sakarību starp teorētisko un efektīvo spriegumu koncentrācijas koeficientu:

$$k_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1).$$

Eksperimentālie pētījumi pierāda, ka palielinot paraugu izmērus, samazinās to izturības robeža. Pieņemot paraugu ar diametru 10 mm par etalonu un šī parauga mēroga koeficientu par vienu, sakarību starp parauga diametru un mēroga koeficientu raksturo tabulā apkopotie dati.

Paraugu diametrs, mm	10	20	30	40	50	100	150	200
Mēroga koeficients	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,65	0,58	0,55

Atkarībā no paraugu virsmas apstrādes mainās parauga izturības robeža, pie kam jo izteiktāk, jo augstāka ir materiāla stiprības robeža. Caurmērā pulētu (augstas kvalitātes apstrādātu) parauga izturības robeža ir par 20 – 30 % augstāka kā neapstrādātiem paraugiem.

Visai būtiski materiāla izturības robežu iespaido slogojuma režīms. Reālos ekspluatācijas apstākļos atsevišķi elementi tiek pakļauti nepārtrauktām slogojuma izmaiņām. Slodzes frekvenču diapazons var mainīties no dažām svārstībām mēnesī līdz vairākiem tūkstošiem ciklu sekundē. Augstas frekvences slodžu gadījumos (virs 10^3 cikli sekundē) izstrādājumu izturība paaugstinās. Zemas frekvences slodžu gadījumā paspēj attīstīties cikla paliekošās deformācijas un sagatavot nākamā cikla plaisu attīstību. Šāds slogojuma veids ir vairāk bīstams. Vēl bīstamāki ir gadījumi, kad zemas frekvences cikliem ($n = 10$ cikli/min) tiek uzklāti augstfrekvences cikli ($n > 2000$ cikli/min). Šādos gadījumos materiāla ilglaicība samazinās vairāk kā 2 reizes.

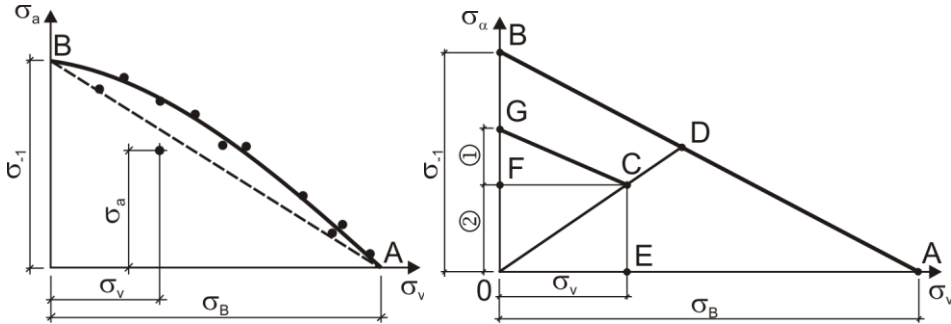
Ir konstatēts, ka paaugstinoties ekspluatācijas temperatūrai, izturības robeža samazinās un otrādi. Paaugstinātu temperatūras apstākļos, izturības līknēs nav novērojami horizontālie posmi.

Eksperimentālo pētījumu rezultātā konstatēts, ka katrs no tērauda piemaisījumiem (ogleklis, niķelis, hroms, varš, vanādijs, bors, fosfors) paaugstina tā noguruma stiprību, pie

kam tas notiek proporcionāli tam, kā pieaug materiāla stiprības robeža.

13.5. Noguruma stiprības diagramma

Ar mērķi noteikt noguruma režīmā strādājoša materiāla stiprības rezerves koeficientu n_r , tiek konstruēta noguruma stiprības diagramma.



att. 13.5

To veic sekojošā veidā. Tiek eksperimentāli pārbaudīta vienādas kvalitātes paraugu grupa dažādu cikla simetrijas gadījumos. Uz abscisu ass (σ_v) atliekam materiāla stiprības robežu σ_B , uz ordinātu ass (σ_a) atliekam izturības robežu σ_{-1} , kura atbilst visbīstamākajam ciklu veidam – simetriskam. Pārbaūžu rezultātā iegūstam punktus, kurus aproksimējošā līkne AB veido noguruma stiprības diagrammu.

Iegūtā diagramma ļauj spriest par konstrukcijas, kura atrodas cikliskas slodzes iedarbības apstākļos, stiprību. Gadījumos, kad punkts atrodas zemāk par līkni AB, varam secināt, ka attiecīgā detaļa dotajā režīmā saglabās izturību pie neierobežota ciklu skaita. Ērtības labā līkni AB aizstāj ar taisni, tādā veidā radot zināmu stiprības rezervi. Līdz ar to noguruma stiprības diagrammu iespējams uzkonstruēt neveicot plašus eksperimentālus pētījumus, bet aprobežojoties tikai ar materiāla stiprības robežu σ_B un izturības robežu simetriska cikla gadījumā σ_{-1} .

Noguruma stiprības rezerves noteikšanai izmanto attiecību, kura veido nogriežņu garumi (att. 13.5) OC un OD.

Rezerves koeficientu $n_r = \frac{OD}{OC}$ nosaka vai nu grafiski vai arī analizējot aprēķinu sakarības, kuras iegūtas analizējot noguruma stiprības diagrammu.

Novelkot taisnei AB paralēlo caur punktu C, un izmantojot trīsstūru OAB un FCL līdzību, varam konstatēt, ka $FL = FC \cdot OB / OA$.

Tā kā $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OL}$, tad rezerves koeficientu n_r normālsprieguma gadījumā nosaka sakarība

$$n_{r\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \frac{\sigma_v \sigma_{-1}}{\sigma_B}}.$$

Analoga sakarība iegūstama arī bīdes sprieguma gadījumā

$$n_{r\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a + \frac{\tau_v \tau_{-1}}{\tau_B}}.$$

Stiprības rezerves noteikšana materiālam, kurš vienlaicīgi pakļauts cikliskai normālo un bīdes spriegumu iedarbībai, vēl nav pietiekami izpētīta un tādēļ praktiskos aprēķinos izmanto sekojošu sakarību:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_{r\sigma}^2} + \frac{1}{n_{r\tau}^2}.$$

Līdz ar to varam pieņemt, ka plakana spriegumstāvokļa gadījumos rezerves koeficients nosakāms ar vienasīgā un bīdes sloojuma rezerves koeficientiem atbilstoši sakarībai

$$n_r = \frac{n_{r\sigma} n_{r\tau}}{\sqrt{n_{r\sigma}^2 + n_{r\tau}^2}}.$$

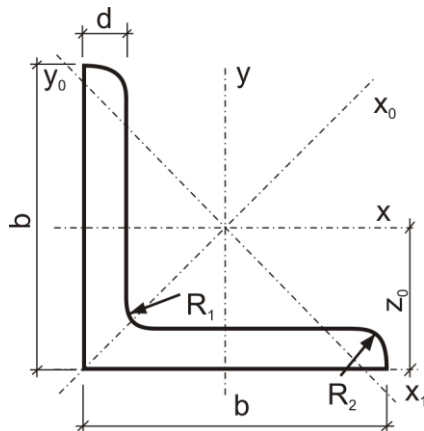
Tomēr ticamākus rezultātus varam iegūt veicot atbilstošas eksperimentālas pārbaudes.

PIELIKUMI

NVS valstu tērauda profilu ģeometriskie raksturotāji

Vienādmalu leņķi

Tikai mācību nolūkiem!



Apzīmējumi:

b – plauktiņa platums;

d – plauktiņa biezums;

R_1, R_2 – noapaļojuma rādiusi;

I – inerces momenti pret dažādām asīm;

r – inerces rādiusi pret dažādām asīm;

z_0 – attālums no smaguma centra līdz plauktiņa ārējai malai.

Profila Nr.	Izmēri				Lau- kums	1 m svars	Šķērsriezuma ģeometriskie raksturotāji								z ₀
	b	d	R ₁	R ₂			x - x		x ₀ - x ₀		y ₀ - y ₀		x ₁ - x ₁		
							I _x	r _x	I _{x0}	r _{x0}	I _{y0}	r _{y0}	I _{x1}		
							mm				cm ²	kG	cm ⁴	cm	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	

PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2,5	25	3 4	3,5	1,2	1,43 1,86	1,12 1,46	0,81 1,03	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,49 0,48	1,57 2,11	0,73 0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,2	0,80
3,2	32	3 4	4,5	1,5	1,86 2,43	1,46 1,91	1,77 2,26	0,97 0,96	2,8 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,63 0,62	3,26 4,39	0,89 0,94
3,6	36	3 4	4,5	1,5	2,10 2,75	1,65 2,16	2,56 3,29	1,10 1,09	4,06 5,21	1,39 1,38	1,06 1,36	0,71 0,70	4,64 6,24	0,99 1,04
4	40	3 4 5	5	1,7	2,35 3,08 3,79	1,85 2,42 2,97	3,55 4,58 5,53	1,23 1,22 1,20	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,54	1,47 1,90 2,30	0,79 0,78 0,79	6,35 8,53 10,73	1,09 1,13 1,17
4,5	45	3 4 5	5	1,7	2,65 3,48 4,29	2,08 2,73 3,37	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,5 12,7	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,1 15,3	1,21 1,26 1,30
5	50	3 4 5	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	2,32 3,05 3,77	7,11 9,21 11,2	1,55 1,54 1,53	11,3 14,6 17,8	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1 0,99 0,98	12,4 16,6 20,9	1,33 1,38 1,42
5,6	56	4 5	6	2	4,38 5,41	3,44 4,25	13,1 16,0	1,73 1,72	20,8 25,4	2,18 2,16	5,41 6,59	1,11 1,10	23,3 29,2	1,52 1,57
6,3	63	4 5 6	7	2,3	4,96 6,13 7,28	3,90 4,81 5,72	18,9 23,1 27,1	1,95 1,94 1,93	29,9 36,6 42,9	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,2	1,25 1,25 1,24	33,1 41,5 50,0	1,69 1,74 1,78

PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	70	4,5	8	2,7	6,2	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,8	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55

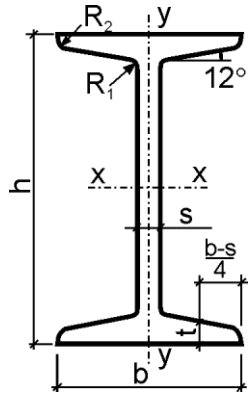
PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90

PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	10	5,3	33,8	30,5	1216	5,60	1933	7,00	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22			106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,0	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

Dubult-T profils



Apzīmējumi:

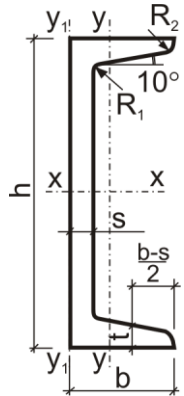
h – sijas augstums; b – plauktiņa platums;
 s – sieniņas biezums; t – vidējais plauktiņa biezums;
 R_1, R_2 – noapaļojuma rādiusi;
 I_x, I_y – inerces momenti pret x un y asīm;
 W_x, W_y – pretestības momenti pret x un y asīm;
 S_x – pusšķēluma statiskais moments;
 r_x, r_y – inerces rādiusi pret x un y asīm.

Profi- la Nr.	1 m svars	Izmēri						Lau- kums	Šķēsgriezuma ģeometriskie raksturotāji						
		h	b	s	t	R ₁	R ₂		I _x	W _x	r _x	S _x	I _y	W _y	r _y
	kG	mm						cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³	cm ⁴	cm ³	cm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,6	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,50	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,70	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	15,90	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	18,40	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	19,90	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12

PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20	21,00	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	22,70	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	24,00	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	25,80	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	27,30	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	29,40	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	31,50	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	33,90	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	36,50	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	39,20	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	42,20	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	48,60	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	57,00	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	66,50	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27695	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	78,50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	92,60	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	55992	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

U profils


Apzīmējumi:

h – sijas augstums; b – plauktiņa platums;

s – sienu biezums; t – vidējais plauktiņa biezums;

R_1, R_2 – noapaļojuma rādiusi;

I_x, I_y – inerces momenti pret x un y asīm;

W_x, W_y – pretestības momenti pret x un y asīm;

S_x – pusšķēluma statiskais moments;

r_x, r_y – inerces rādiusi pret x un y asīm;

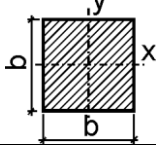
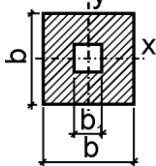
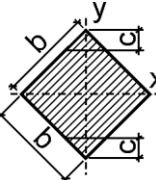
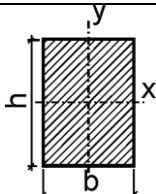
z_0 – attālums no ass $y-y$ līdz sienu ārējai malai.

Profi- la Nr.	1 m	Izmēri						Lau- kums	Šķēsgriezuma ģeometriskie raksturotāji							z ₀
	svars	h	b	s	t	R ₁	R ₂		I _x	W _x	r _x	S _x	I _y	W _y	r _y	
	kG	mm							cm ²	cm ⁴	cm ³	cm	cm ³	cm ⁴	cm ³	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	174	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	10,40	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	304	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	12,30	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	491	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67

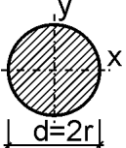
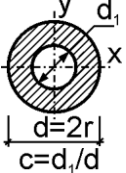
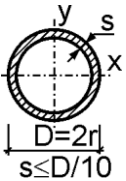
PIELIKUMI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14a	13,30	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	545	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,84	1,87
16	14,20	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	747	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	15,30	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	823	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	16,30	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	1090	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	17,40	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	1190	132,0	7,32	76,10	105,0	20,00	2,18	2,13
20	18,40	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	1520	152,0	8,07	87,80	113,0	20,50	2,20	2,07
20a	19,80	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	1670	167,0	8,15	95,90	139,0	24,20	2,35	2,28
22	21,00	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	2110	192,0	8,89	110,0	151,0	25,10	2,37	2,21
22a	22,60	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	2330	212,0	8,99	121,0	187,0	30,00	2,55	2,46
24	24,00	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	2900	242,0	9,73	139,0	208,0	31,60	2,60	2,42
24a	25,80	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	3180	265,0	9,84	151,0	254,0	37,20	2,78	2,67
27	27,70	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	4160	308,0	10,90	178,0	262,0	37,30	2,73	2,47
30	31,80	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	5810	387,0	12,00	224,0	327,0	43,60	2,84	2,52
33	36,50	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	7980	484,0	13,10	281,0	410,0	51,80	2,97	2,59
36	41,90	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	10820	601,0	14,20	350,0	513,0	61,70	3,10	2,68
40	48,30	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	15220	761,0	15,70	444,0	642,0	73,40	3,23	2,75

Šķēsgriezuma laukumu ģeometriskie raksturotāji

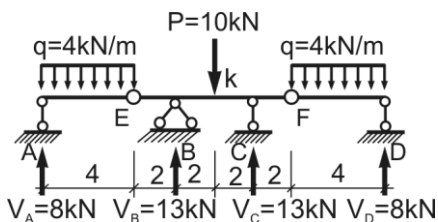
Šķēsgriezuma laukuma forma	Aksiālais inerces moments I, cm^4	Pretestības moments W, cm^3	Inerces rādiuss i, cm
	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289b$
	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{12}} = 0,289\sqrt{b^2 + b_1^2}$
	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6\sqrt{2}} = 0,118b^3$ Nogriežot augšējo un apakšējo trīsstūri par $c = b\sqrt{2}/12$ pretestības moments palielinās līdz $W_x = 0,124b^3$	$i_x = i_y = 0,289b$
	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0,289h$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = 0,289b$

	$I_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12}$	$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}$ $W_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12(hb - h_1b_1)}}$
	$I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{u1} = \frac{bh^3}{4}$ $I_u = \frac{bh^3}{12}$	Aprēķinot spriegumu augšējā malā $W_x = \frac{bh^2}{24}$ apakšējā malā $W_x = \frac{bh^2}{12}$	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,236h$
	$I_x = \frac{hb^3}{48}$	$W_x = \frac{hb^2}{24}$	$i_x = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,204b$
	$I_x = \frac{h^3(b^2 + 4ba + a^2)}{36(b+a)}$ $v_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{b+2a}{b+a}$	Aprēķinot spriegumu augšējā malā $W_x = \frac{h^2(b^2 + 4ba + a^2)}{12(2b+a)},$ apakšējā malā $W_x = \frac{h^2(b^2 + 4ba + a^2)}{12(b+2a)}$	$i_x = \frac{h}{6(b+a)} \sqrt{2(b^2 + 4ba + a^2)}$

 $d=2r$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_x = I_y = 0,05d^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $W_x = W_y = 0,1d^3$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
 $d=2r$ $c=d_1/d_2$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} (1 - c^4)$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4)$ $W_x = W_y = 0,1d^3 (1 - c^4)$	$i_x = i_y = \frac{\sqrt{d^2 + d_1^2}}{4}$
 $D=2r$ $s \leq D/10$	$I_x = I_y = \frac{\pi D^3 s}{8}$ $I_x = I_y = \pi r^3 s$	$W_x = W_y = \frac{\pi D^2 s}{4};$ $W_x = W_y = \pi r^2 s$	$i_x = i_y = \frac{D}{2\sqrt{2}} = 0,353D$
 $v_0 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424r$	$I_x = 0,00686d^4 \approx 0,11r^4$ $I_y = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025d^4$	$W_x = 0,0239d^3$ $W_y = \frac{\pi d^3}{64} \approx 0,05d^3$	$i_x = i_{\min} \approx 0,132d$ $i_y = \frac{d}{4}$

Uzdevumu atrisinājumi un atbildes

Uzdevums 2.1



$$\sum M_E^{\text{pakreisi}} = q \cdot 4 \cdot 2 - V_A \cdot 4 = 0; V_A = 8\text{kN};$$

Tā kā sistēma ir simetriska

$$V_D = V_A = 8\text{kN}; \quad V_B = V_C = V;$$

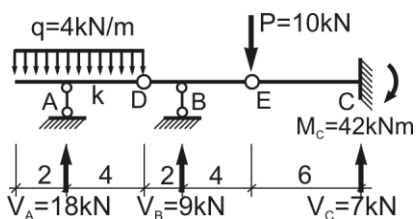
$$\sum Y = q \cdot 4 + P + q \cdot 4 - 2V = 0;$$

$$V_B = V_C = 13\text{kN};$$

Pārbaude:

$$\sum M_k = q \cdot 4 \cdot 6 + V_C \cdot 2 + V_D \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 6 - V_B \cdot 2 - V_A \cdot 8 = 0.$$

Uzdevums 2.2



$$\sum M_D^{\text{pakreisi}} = q \cdot 6 \cdot 3 - V_A \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_E^{\text{pakreisi}} = q \cdot 6 \cdot 9 - V_A \cdot 10 - V_B \cdot 4 = 0;$$

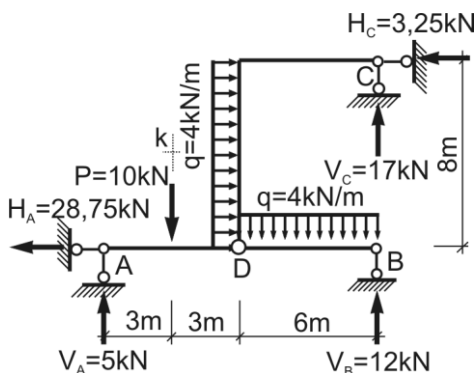
$$\sum Y = q \cdot 6 + P - V_A - V_B - V_C = 0;$$

$$\sum M_E^{\text{palabi}} = V_C \cdot 6 - M_C = 0.$$

Pārbaude (pret izkļiedētās slodzes kopspēka darbības punktu k):

$$\sum M_k = P \cdot 9 + M_C + V_A \cdot 3 - V_B \cdot 5 - V_C \cdot 15 = 0.$$

Uzdevums 2.3



$$\sum M_D^{\text{pakreisi}} = P \cdot 3 - V_A \cdot 6 = 0;$$

$$\sum M_D^{\text{palabi}} = q \cdot 6 \cdot 3 - V_B \cdot 6 = 0;$$

$$\sum Y = P + q \cdot 6 - V_A - V_B - V_C = 0;$$

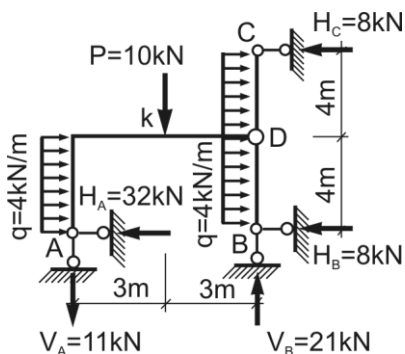
$$\sum M_D^{\text{uzaugšu}} = q \cdot 8 \cdot 4 - V_C \cdot 6 - H_C \cdot 8 = 0;$$

$$\sum X = q \cdot 8 - H_C - H_A = 0.$$

Pārbaude (pret spēka P un izkļiedētās slodzes kopspēka darbības līniju krustpunktu):

$$\sum M_k = q \cdot 6 \cdot 6 + V_A \cdot 3 + H_A \cdot 4 - V_B \cdot 9 - V_C \cdot 9 - H_C \cdot 4 = 0.$$

Uzdevums 2.4



$$\sum M_D^{uzaugšu} = q \cdot 4 \cdot 2 - H_C \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_D^{uzleju} = q \cdot 4 \cdot 2 - H_B \cdot 4 = 0;$$

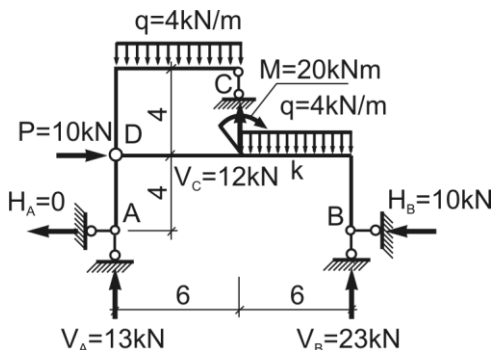
$$\sum X = q \cdot 4 + q \cdot 4 + q \cdot 4 - H_C - H_B - H_A = 0;$$

$$\sum M_D^{pakreisi} = P \cdot 3 + q \cdot 4 \cdot 2 + V_A \cdot 6 - H_A \cdot 4 = 0;$$

Pārbaude (pret slodzi P pielikšanas punktu k – varam atņemt slodzi P un izkļaidēto slodzi posmā BC):

$$\sum M_k = H_B \cdot 4 + H_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - V_A \cdot 3 - V_B \cdot 3 - H_C \cdot 4 = 0.$$

Uzdevums 2.5



$$\sum M_D^{uzleju} = H_A \cdot 4 = 0;$$

$$\sum M_D^{uzaugšu} = q \cdot 6 \cdot 3 - V_C \cdot 6 = 0;$$

$$\sum X = P - H_B = 0;$$

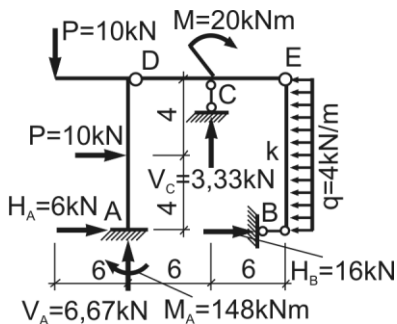
$$\sum M_D^{palabi} = M + q \cdot 6 \cdot 9 + H_B \cdot 4 - V_B \cdot 12 = 0;$$

$$\sum Y = q \cdot 12 - V_C - V_B - V_A = 0.$$

Pārbaude:

$$\sum M_k = M + H_B \cdot 4 + V_A \cdot 9 + V_C \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 6 - V_B \cdot 3 = 0.$$

Uzdevums 2.6



$$\sum M_E^{uzleju} = q \cdot 8 \cdot 4 - H_B \cdot 8 = 0;$$

$$\sum X = q \cdot 8 - P - H_B - H_A = 0;$$

$$\sum M_D^{palabi} = M + q \cdot 8 \cdot 4 - H_B \cdot 8 - V_C \cdot 6 = 0;$$

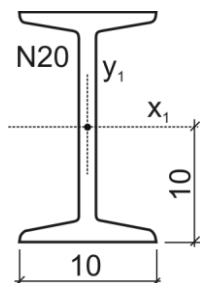
$$\sum Y = P - V_C - V_A = 0;$$

$$\sum M_D^{pakreisi} = P \cdot 6 + P \cdot 4 + H_A \cdot 8 - M_A = 0.$$

Pārbaude:

$$\sum M_k = M_A + M + V_A \cdot 12 + V_C \cdot 6 - P \cdot 18 - H_A \cdot 4 - H_B \cdot 4 = 0.$$

Uzdevums 6.1



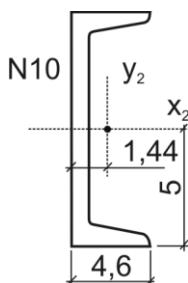
$$I_{x1} = 1840 \text{ cm}^4$$

$$I_{y1} = 115 \text{ cm}^4$$

$$A_1 = 26,8 \text{ cm}^2$$

$$W_{x1} = 184 \text{ cm}^3$$

$$W_{y1} = 23,1 \text{ cm}^3$$



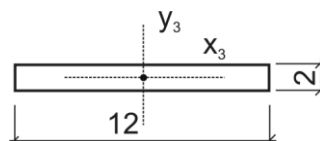
$$I_{x2} = 174 \text{ cm}^4$$

$$I_{y2} = 20,4 \text{ cm}^4$$

$$A_2 = 10,9 \text{ cm}^2$$

$$W_{x2} = 22,4 \text{ cm}^3$$

$$W_{y2} = 4,75 \text{ cm}^3$$



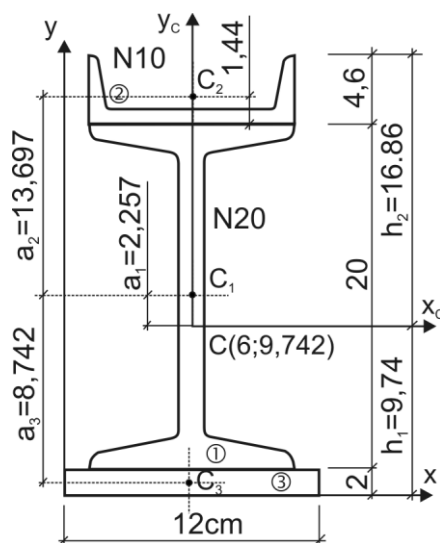
$$I_{x3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8 \text{ cm}^4$$

$$I_{y3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288 \text{ cm}^4$$

$$A_3 = 24 \text{ cm}^2$$

$$W_{x3} = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \cdot 2^2}{6} = 8 \text{ cm}^3$$

$$W_{y3} = \frac{hb^2}{6} = \frac{2 \cdot 12^2}{6} = 48 \text{ cm}^3$$



Lai atrastu kopējās figūras smaguma centra novietojumu ievadam asis x_y . Šajās asīs atsevišķo figūru smaguma centri ir ar koordinātēm

$$C_1 = (6; 12);$$

$$C_2 = (6; 23,44);$$

$$C_3 = (6; 1).$$

Tā kā kopējai figūrai ir simetrijas ass, tad smaguma centram jāatrodas uz šīs ass un

$$X_C = 6 \text{ cm}.$$

Y_C koordināti atrodam atbilstoši sakarībai

$$Y_C = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A} = \frac{26,8 \cdot 12 + 10,9 \cdot 23,44 + 24 \cdot 1}{26,8 + 10,9 + 24} = 9,742 \text{ cm}.$$

Figūras smaguma centrā ievadam galvenās centrālās asis $X_C Y_C$, pret kurām jāreķina kopējās figūras ģeometriskie raksturotāji. Aprēķinām atsevišķo figūru inerces momen-

tus pret X_C asi:

$$I_{X_{C1}} = a_1^2 + I_{x1} = 2,257^2 + 1840 = 1976,61 \text{ cm}^4;$$

$$I_{X_{C2}} = a_2^2 + I_{y2} = 13,697^2 + 20,4 = 2065,55 \text{ cm}^4;$$

$$I_{X_{C3}} = a_3^2 + I_{x3} = 8,742^2 + 8 = 1842,24 \text{ cm}^4.$$

Saliktās figūras inerces moments pret X_C asi:

$$I_{X_C} = I_{X_{C1}} + I_{X_{C2}} + I_{X_{C3}} = 5884,41 \text{ cm}^4,$$

pret Y_C asi:

$$I_{Y_C} = I_{y1} + I_{x2} + I_{y3} = 115 + 174 + 288 = 577 \text{ cm}^4.$$

Aprēķinām pretestības momentus pret galvenajām asīm:

$$W_{X_{C1}} = \frac{I_{X_C}}{h_1} = \frac{5884,41}{9,74} = 604,14 \text{ cm}^3;$$

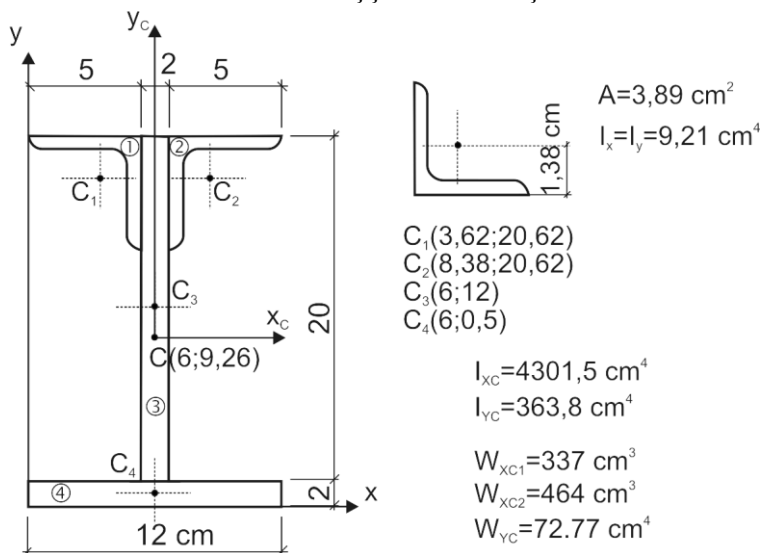
$$W_{X_{C2}} = \frac{I_{X_C}}{h_2} = \frac{5884,41}{16,86} = 349,02 \text{ cm}^3;$$

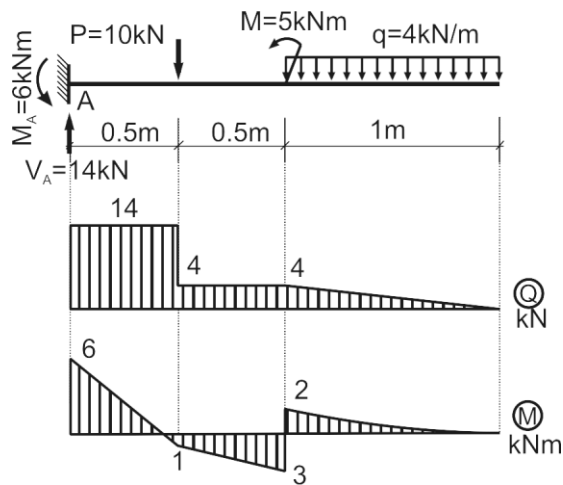
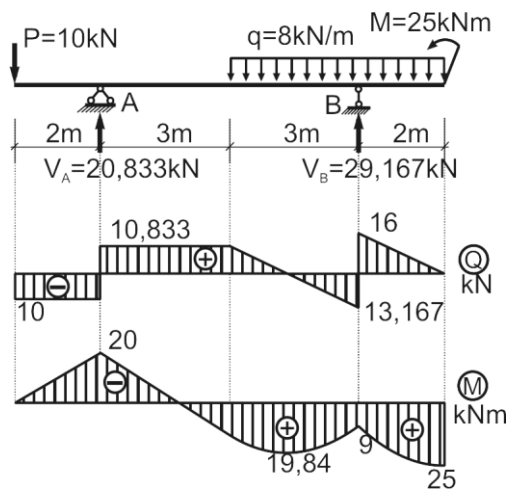
$$W_{Y_C} = \frac{I_{Y_C}}{6} = \frac{577}{7} = 82,42 \text{ cm}^3.$$

Salīdzinām pretestības momentus pastiprinātam un nepastiprinātam dubult-T profilam:

$$\frac{W_{X_{C2}}}{W_{x1}} = \frac{349,02}{184} = 1,89.$$

Uzdevums 6.2 Izvēlamies vienādmalu leņķi N5 ar sienas biezumu $d=4$ mm.



Uzdevums 8.1

Uzdevums 8.2

Uzdevums 8.5

Atbilde: $y|_{x=l} = \frac{ml^2}{2EI}$; $\frac{dy}{dx}|_{x=l} = \frac{ml}{EI}$.

Literatūra

O. Kepe, J. Vība. Teorētiskā mehānika. Zvaigzne, Rīga, 1982, 577 lpp.

E. Lavendelis. Materiālu pretestība. Zvaigzne, Rīga, 1986, 343 lpp.

M. Movņins, A. Izraelits. Tehniskā mehānika. Pirmā daļa „Teorētiskā mehānika”. Zvaigzne, Rīga, 1971, 365 lpp.

A. Mitinskis, M. Movņins, A. Izraelits. Tehniskā mehānika. Otrā daļa „Materiālu pretestība”. Zvaigzne, Rīga, 1971, 330 lpp.

E. Lavendelis. Mehānika. Rīga, 2001, 232 lpp.