

RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Būvmehānikas katedra

F. BULAVS, I. RADIŅŠ

STATISKI NENOTEICAMU STIEŅU SISTĒMU

BŪVMEHĀNIKA

RTU izdevniecība

Rīga, 2008

Grāmata domāta būvniecības specialitātes studentiem un inženiertehniskajiem speciālistiem, kuri nodarbojas ar stieņveida konstrukciju pārvietojumu un piepūļu aprēķiniem. Grāmatā izklāstītas būvmehānikas tēmas, kuras attiecas uz statistiski nenoteicamu stieņu sistēmu aprēķinu metodēm statiskas un mainīgas slodzes gadījumos. Spēku, pārvietojumu un skaitliskās metodes izmantotas rāmju, nepārtrauktu siju, lokveida sistēmu un kopņu elementu piepūļu un pārvietojumu aprēķinos un šo darinājumu struktūru racionalitātes novērtējumos. Stieņu sistēmu skaitliskiem aprēķiniem tiek rekomendēta un izmantota galīgo elementu programma Analysis for Windows 1.9.

Recenzenti:

Dr.sc.ing., prof. A.Čate

Dr.sc.ing., doc. J.Auzukalns

Iespiests saskaņā ar Būvmehānikas katedras 2007. gada 17. maija sēdes lēmumu Nr. 05/07.

SATURS

1. IEVADS	5
1.1. Statiski nenoteicamas sistēmas un to īpašības.....	7
1.2. Statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodes.....	10
2. STATISKI NENOTEICAMU RĀMJU APRĒĶINS AR SPĒKU METODI	12
2.1. Statiskās nenoteicamības pakāpe.....	12
2.2. Spēku metodes pamatsistēmas izvēle	12
2.3. Spēku metodes kanoniskie vienādojumi	16
2.4. Statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina secība ar spēku metodi	18
2.5. Spēku metodes kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu pārbaude.....	20
2.6. Lieces momentu epīras kinemātiskā pārbaude	21
2.7. Racionālas pamatsistēmas izvēle.....	26
2.8. Nezināmo grupēšanas paņēmieni.....	38
2.9. Ārējās slodzes pārveidošanas paņēmieni	39
2.10. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles	44
2.12. Pārvietojumu noteikšana statiski nenoteicamā sistēmā.....	51
3. STATISKI NENOTEICAMU RĀMJU APRĒĶINS AR PĀRVIETOJUMU METODI.....	55
3.1. Kinemātiskās nenoteicamības pakāpe un pārvietojumu metodes pamatsistēma	60
3.2. Pārvietojumu metodes kanonisko vienādojumu sistēma.....	63
3.3. Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu noteikšana ar statisko paņēmieni	65
3.4. Koeficientu un brīvo locekļu noteikšana ar epīru sareizināšanas paņēmieni	68
3.3. Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu pārbaudes.....	69
3.4. M,Q un N epīru konstruēšana	70
3.6. Simetrijas izmantošana pārvietojumu metodē.....	87
3.7. Kombinētā rāmju aplēses metode.....	89
4. SKAITLISKO METOŽU PIELIETOJUMS BŪVMEHĀNIKAS PROBLĒMU RISINĀJUMOS.....	91
4.1. Būvmehānikas problēmu risinājumi ar tuvinātām metodēm	91

4.2. Galīgo elementu metode būvmehānikas uzdevumos.....	97
4.3. Stieņu sistēmu aprēķins ar programmu Analysis for Windows 1.9.....	99
4.4. Galīgo elementu metodes precizitātes problēmas	104
5. NEPĀRTRAUKTAS SIJAS.....	109
5.1. Spēku metodes pamatsistēmas	110
5.2. Trīsmomentu vienādojumi	111
5.3. Momentfokusu metode	120
5.4. Momentfokusu attiecību pielietojums epīru konstruēšanā	123
5.5. Elastīgi padevīgi balstītas nepārtrauktas sijas	127
5.6. Nepārtrauktas sijas ar mainīgu šķērsriezumu	128
5.7. Nepārtrauktas sijas aprēķins ar pārvietojumu metodi.....	131
5.8. Simetrijas izmantošana nepārtrauktu siju aprēķinā	138
5.9. Ietekmes līniju konstruēšana	139
5.10. Šķērsspēku un balstreakciju ietekmes līnijas	144
5.11. Nepārtrauktās sijas neizdevīgākais slogojums.....	145
5.12. Nepārtrauktās sijas aprēķins uz balstu sēšanas.....	149
5.13. Uz nepārtraukta elastīga pamata balstītas sijas.....	151
6. STATISKI NENOTEICAMU LOKU APRĒĶINS	158
6.1. Statiski slogotu divlocīklu loku aprēķins.....	161
6.2. Divbalstu loks ar savilci.....	163
6.3. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles lokos	171
6.4. Piepūles divlocīklu lokos no balstu pārvietojuma.....	172
6.5. Divlocīklu loka piepūļu ietekmes līnijas	173
6.6. Bezlocīklu (iespīlētu) loku aprēķins statiskas slodzes gadījumā.....	176
6.7. Bezlocīklu loka ietekmes līnijas.....	184
6.8. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles bezlocīklu lokos	187
6.9. Bezlocīklu loka aprēķins balstu sēšanās gadījumā.....	188
7. STATISKI NENOTEICAMU KOPŅU APRĒĶINS	189
7.1. Kopne ar vienu lieku saiti	191
7.2. Izlieču līnijas konstruēšana ar elastīgo slodžu metodi	197
7.3. Liekā nezināmā un kopnes stieņu piepūļu ietekmes līnijas	200
7.4. Daudzkārt statiski nenoteicamu kopņu aprēķins.....	202
Literatūra.....	203

1. IEVADS

Ilgu savas attīstības laika periodu cilvēces rīcībā nebija nekādu būvju aprēķinu metožu. Tomēr būvniecība notika un visai veiksmīgi. Plaši pazīstami arī mūsu dienās gigantiski un no konstruktīvā viedokļa nevainojami senatnes arhitektūras pieminekļi. Šīs celtnes liecina par to radītāju īpašu talantu intuitīvi izjust konstrukciju darbu un nekļūdīgi atrast pareizos būvelementu izmērus. Ne velti senos laikos arhitektūra, kas sevī iekļāva arī būvniecību, tika uzskatīta par vienu no mākslas veidiem. Liela loma tā laika celtniecībā bija pieredzes uzkrāšanai, bieži vien arī par neveiksmīgi veiktu būvju sabrukuma cenu. Līdz ar *G. Galileja* darbiem mehānikas jomā radās iespēja uzsākt stiprības aprēķinus. Pakāpeniski aprēķinu zinātniskās metodes aizvien precīzāk sāka apmierināt praktiskās būvniecības prasības konstrukciju izveides jomā un lielā mērā izskauda intuitīvās metodes projektēšanā.

Var apgalvot, ka visas mūsdienu būves uzceltas pamatojoties uz stingriem matemātiskiem aprēķiniem un bez šādiem aprēķiniem tās realizēt nebūtu iespējams.

Būvmehānika kā atsevišķa zinātnes nozare atdalījās no vispārējās mehānikas 19. gs. otrajā pusē. Galvenie tās izpētes objekti tai laikā bija stieņveida konstrukcijas, it īpaši kopnes. Tika radītas asprātīgas aprēķinu metodes, kā analītiskas, tā arī grafiskas. Tomēr attīstoties skaitļošanas tehnikai pēdējās aizvien vairāk zaudē savu nozīmi, kaut arī tās ir vienkāršas, ērtas un uzskatāmas.

Būvkonstrukciju dalījums statiski noteicamās un statiski nenoteicamās ir visai nosacīts un tā nozīme galvenokārt ir teorētiska. Paralēli statiski noteicamu sistēmu aprēķinu metožu pilnveidošanas procesam jau no būvmehānikas zinātnes pirmsākumiem attīstās un pilnveidojas arī statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodes. Jau 1857. gadā franču inženieris *B. Klapérons* piedāvāja nepārtrauktu siju aprēķinos izmantot trīsmomentu vienādojumus, bet *Dž. Maksvels* un *O. Mors* izstrādāja enerģētisku pārvietojumu aprēķina metodi. Tomēr tikai 20. gs. trīsdesmitajos gados statiski nenoteicamu elastīgu sistēmu aprēķini sasniedza universālu raksturu. Iezīmējās trīs galvenās aprēķinu metodes: spēku, pārvietojumu un jauktā. Radās liels skaits šo metožu modifikāciju. Lie-

lākā to daļa mūsu dienās zaudējusi savu nozīmi.

Elektronu skaitļojamo mašīnu ieviešana būvju aprēķinu praksē kļuva par pamatu jaunu aprēķinu metožu izstrādāšanai un ieviešanai. Statiski nenoteicamu sistēmu aprēķinos pirmajā vietā izvirzījās matricu metodes, kuru realizācijas pamatā ir galīgo elementu metode (GEM). Šai gadījumā sistēma tiek sadalīta atsevišķos elementos, kuru spriegumu – deformāciju stāvoklis tiek uzskatīts par noteicamu. GEM metode plašu pielietojumu ieguvusi sarežģītu konstrukciju aprēķinos, kurus iepriekš nebija iespējams veikt ar klasiskajām metodēm. GEM radniecīga nepārtrauktas vides stienveida aproksimācijas metodei.

Klasiskās būvmehānikas nodaļās risināmie uzdevumi balstīti uz pieņēmumu, ka tie var tikt aprakstīti ar lineāriem vienādojumiem. Sakarība starp deformācijām un spriegumiem tiek uzskatīta par lineāru, t.i. tā aprakstās ar Huka likumu. Diemžēl, šāds nosacījums lielākajai būvmateriālu daļai ir spēkā tikai to slogošanas sākumstadijā, t.i. pie maziem spriegumiem un deformācijām. Pētot konstrukciju sabrukuma cēloņus un veidus jāpāriet pie vispārīgākām nelineārām sakarībām starp spriegumiem un deformācijām. Šīs sakarības tiek noteiktas eksperimentāli. Izmantojot nelineāras sakarības starp spriegumiem un deformācijām tika radīta konstrukciju robežstāvokļa metode. Šī metode ar zināmu tuvinājumu ļauj noteikt patieso konstrukciju nestspēju. Ar robežstāvokļa metodi noteiktās pieļaujamās slodzes ir augstākas kā ar klasiskajām metodēm prognozētās. Tas ļauj ietaupīt materiālu. Sevišķi efektīva robežstāvokļa metode ir dzelzsbetona konstrukciju aprēķinos.

Liela nozīme konstrukciju ekspluatācijā ir materiāla šļūdei. Šļūdes teorija atšķirībā no plasticitātes teorijas, balstās nevis uz funkcionālām sakarībām starp deformācijām un spriegumiem, bet gan uz diferenciālām vai integrālām sakarībām attiecībā pret laiku. Šļūdes teorijas pielietošana būvkonstrukcijās sākās tikai 20. gs. vidū, bet par tās nepieciešamību, sevišķi dzelzsbetona konstrukcijās, šaubu nav.

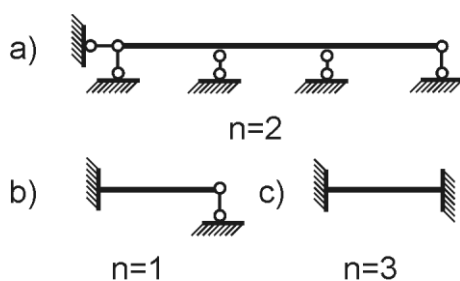
Mūsdienu būvēs aizvien būtiskāku vietu ieņem plātnes un čaulas, veicot nesošu konstrukcijas elementu lomu. Šādu elementu aprēķini ir visai sarežģīti, it īpaši tie, kuri attiecas uz čaulām. Kā izņēmumu var uzskatīt čaulu bezmomentu teoriju, kura, diemžēl, ne vienmēr pietiekami precīzi apraksta čaulu patieso izturēšanos slogotā stāvoklī.

Būvmehānika kā zinātnes nozare arī mūsdienās turpina attīstīties. Šī attīstība iezīmējas divos principiālos virzienos. Viens no tiem ir orientēts uz aprēķinu metožu pilnveidošanu izmantojot elektronu skaitļojamās mašīnas. Otrs virziens orientēts uz aprēķinu shēmu un izejas hipotēžu precizēšanu. Tiek precizēti konstrukciju materiālu deformēšanās modeļi, slogojuma nosacījumi, slodžu lielumi, iespējamās atšķirības starp aprēķināmajiem un uzdotajiem lielumiem. Tiek izstrādātas konstrukciju optimizācijas metodes. Arvien ciešāka kļūst saikne starp būvmehāniku un konstrukciju projektēšanu, to izgatavošanas tehnoloģiju, kā arī matemātiku, fiziku un ekonomiku.

1.1. Statiski nenoteicamas sistēmas un to īpašības

Par **statiski nenoteicamām** sauc ģeometriski nemainīgas sistēmas, kurām balstu reakciju vai piepūļu noteikšanai to elementos nepietiek ar statikas līdzsvara vienādojumiem, bet ir nepieciešami papildus vienādojumi. Praksē lieto arī formulējumu saskaņā ar kuru par statiski nenoteicamām sauc ģeometriski nemainīgas sistēmas, kurām ir **liekas saites**. Šīs saites nav nepieciešamas, lai sistēmu būtu ģeometriski nemainīga.

Lieko saišu skaits nosaka sistēmas **statiskās nenoteicamības pakāpi** un parāda cik iekšējās piepūles vai balstu reakcijas nevar tikt noteiktas ar statikas līdzsvara vienādojumu palīdzību. To noteikšanai ir nepieciešami papildus vienādojumi, kas ievēro sistēmas deformēšanās īpatnības ārējo slodžu iespaidā.



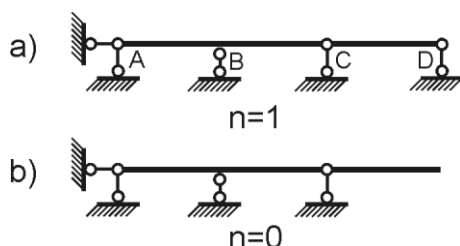
att. 1.1

Lielākā daļa celtniecībā lietojamo sistēmu ir statiski nenoteicamas. Plaši tiek pielietotas statiski nenoteicamas sijas (att. 1.1.). Sijas statiskās nenoteicamības pakāpi n varam noteikt, ņemot vērā, ka visas sija sastāv no viena stieņa (diska), kura nekustīgai nostiprināšanai plaknē ir nepieciešamas trīs pareizi izvietotas

saites. Pārējās saites ir liekas, un to skaits nosaka sijas statiskās nenoteicamības pakāpi.

Jāatzīmē, ka visas sistēmai pieliktās saites iedala **obligātās** un **neobligātās**. Neobligātās saites var tikt atvestas, sistēmai paliekot ģeometriski nemainīgai, bet atmetot obligātās saites, sistēma zaudē ģeometrisku nemainību un kļūst mainīga vai acumirkļīgi

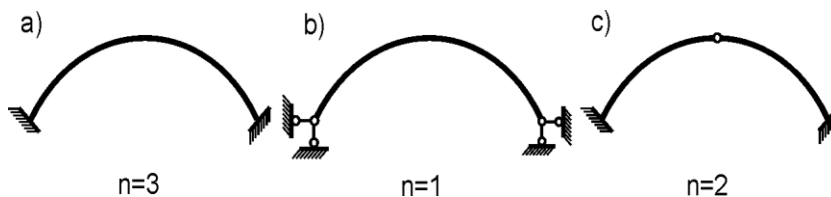
mainīga. Piemēram, nepārtrauktai sijai (att. 1.1.a.) horizontālā saite ir obligāta, jo to atmetot, sistēma kļūst ģeometriski mainīga, pārējās saites ir neobligātas, un jebkura no tām var tikt atņemta, saglabājot sistēmu ģeometriski nemainīgu (atņemamas ne vairāk kā divas saites).



att. 1.2

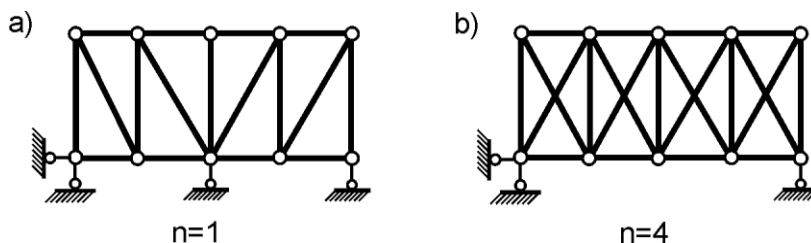
Jāņem vērā, ka, atmetot kādu saiti, pārējo saišu statuss var mainīties un saite no neobligātas var kļūt par obligātu. Piemēram, ja nepārtrauktai sijai (att. 1.1.a.) vispirms ievadam locīklu balstā C, samazinot statiskās nenoteicamības pakāpi par vienu vienību atmetot iekšējo saiti (att. 1.2a) un pēc tam

atmetam balstu D (att. 1.2b), iegūstam mainīgu sistēmu. Tātad saite D ir bijusi obligāta. Bez sijām celtniecībā plaši lieto statiski nenoteicamus lokus (att. 1.3.), kopnes (att. 1.4.) un rāmjus. Bezlocīklu loks (att. 1.3.a) ir trīs reizes, divlocīklu loks (att. 1.3.b) vienu un vienlocīklu loks (att. 1.3.c) divas reizes statiski nenoteicams.



att. 1.3

Kopnes var būt ar ārējo (att. 1.4.a) un iekšējo (att. 1.4.b) statisko nenoteicamību. Tas atkarīgs no tā, vai nenosakāmās piepūles ir ārējās vai iekšējās saitēs.

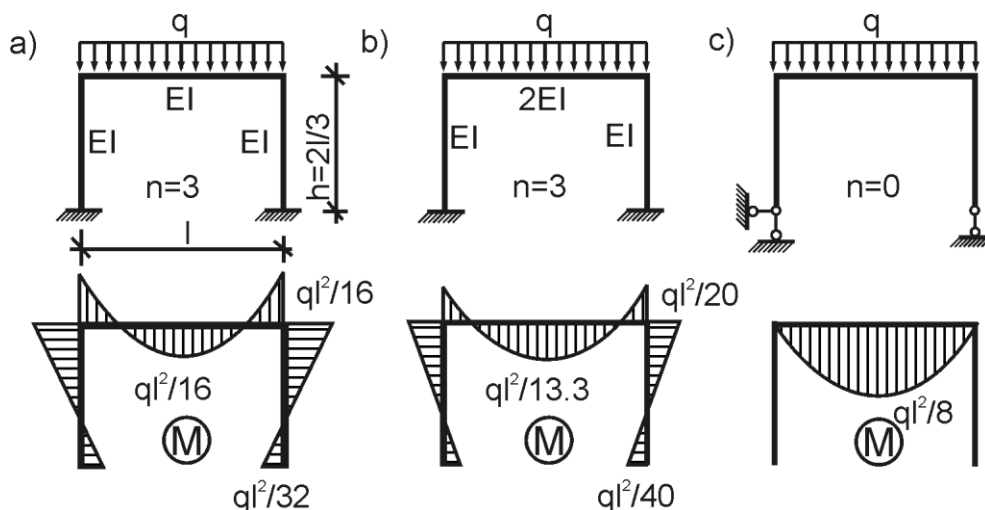


att. 1.4

Praksē statiski nenoteicamas sistēmas plaši tiek pielietotas tāpēc, ka tām ir virkne

priekšrocību salīdzinot ar statiski noteicamām sistēmām:

1. papildus saišu dēļ statiski nenoteicamās sistēmās rodas **mazāki pārvietojumi** kā atbilstošajās statiski noteicamajās sistēmās pie analogām slodzēm;
2. statiski nenoteicamu sistēmu elementos rodas **mazākas iekšējās piepūles**, pie kam, to vērtības ir atkarīgas no sistēmas elementu stingumu attiecībām (att. 1.5); Tā, piemēram, maksimālās lieces momenta vērtības trīs reizes statiski nenoteicama rāmja elementos (att. 1.5.a) ir divas reizes mazākas par maksimālajām vērtībām statiski noteicamā rāmī (att. 1.5.c). Izmainot kāda statiski nenoteicama rāmja elementa stingumu, izmainās arī iekšējo piepūļu sadalījums pa rāmja elementiem (att. 1.5.a. un 1.5.b). Palielinot horizontālā stieņa stingumu attiecībā pret citiem stieņiem, pieaug maksimālā lieces momenta vērtība šajā stienī, momentiem samazinoties pārējos stieņos. Robežgadījumā, pieņemot horizontālo stieni par absolūti stingu, iegūstam lieces momentu epīru vienādu ar epīru statiski noteicamā rāmī (att. 1.5.c).
3. zaudējot nestspēju kādam no statiski nenoteicamas sistēmas elementiem, šī sistēma var palikt ģeometriski nemainīga un turpināt uzņemt slodzi. Tātad šāda sistēma ir drošāka ekspluatācijā.



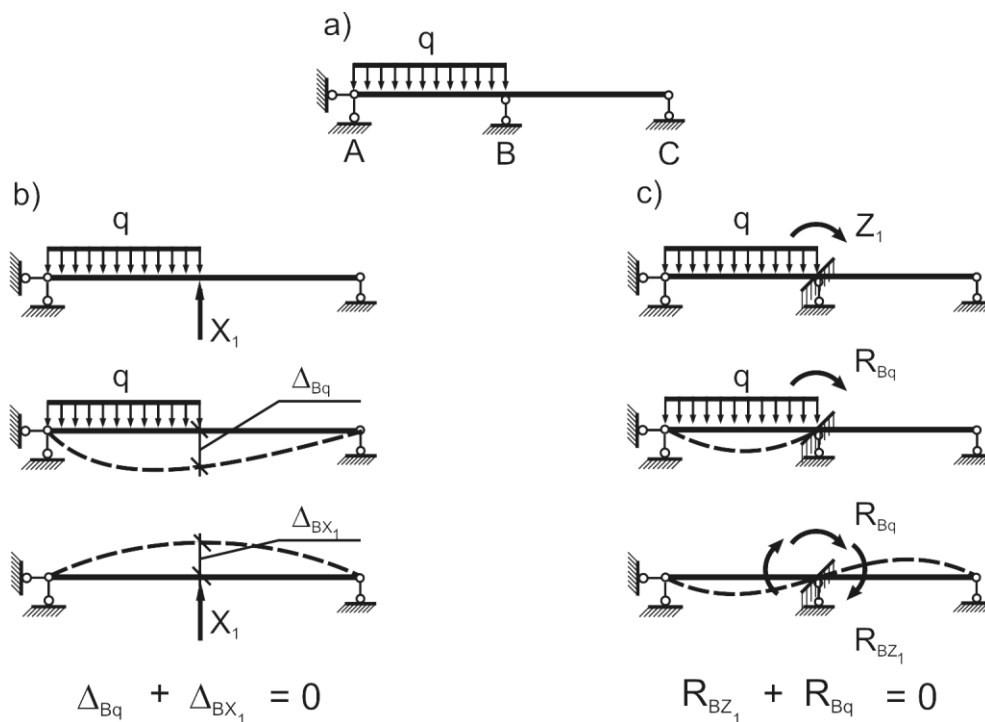
att. 1.5

Statiski nenoteicamu sistēmu elementos var rasties iekšējās piepūles arī bez ārējo slo-

džu iedarbības. Tās var rasties temperatūras izmaiņas, materiāla rukuma, balstu sēšanās, neprecīzi izgatavotu elementu nosprīgošanās un citu iemeslu dēļ. Tas ir galvenais statistiski nenosakāmo sistēmu **trūkums**.

1.2. Statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodes

Statiski nenoteicamās sistēmās visas ārējo un iekšējo saišu reakcijas (iekšējās piepūles) nevar tikt noteiktas tikai no statikas vienādojumiem. Nepieciešami papildus vienādojumi. Tos sastāda ievērojot sistēmas deformēšanās īpatnības. Atkarībā no nezināmo izvēles un iegūto papildus vienādojumu veida, izšķir dažādas statistiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodes, galvenās no kurām ir **spēku metode** un **pārvietojumu metode**. Par šo metožu būtību varam spriest no veida, kā tiek iegūts papildus vienādojums vienreiz statistiski un kinemātiski nenoteicamai sijai (att.1.6.a).



att. 1.6

Spēku metodes gadījumā statistiski nenoteicamu sistēmu pārveido par statistiski noteicamu, atmetot liekās iekšējās vai ārējās saites. **Par nezināmajiem pieņem „spēkus”** -

iekšējās piepūles atmetajos sistēmas elementos (var būt arī momenti) vai reakcijas atmetajās saitēs. Attēlā 1.6.b par nezināmo pieņemta atmetās saites **B** reakcija X_1 . Papildus vienādojumu iegūst izmantojot nosacījumu, ka summārajam pārvietojumam punktā **B** statiski noteicamajā sistēmā no ārējās slodzes Δ_{Bq} , un nezināmās balsta reakcijas Δ_{Bx1} atmetās saites vietā un virzienā jābūt vienādam ar nulli.

Pārvietojumu metodē tiek ievesti papildus iespīlējumi vai lineāras saites tā, lai atsevišķos sistēmas posmus atdalītu vienu no otra, padarītu neatkarīgus. Par **nezināmajiem pieņem pārvietojumus** - ievesto iespīlējumu pagriezienu leņķus vai lineāros pārvietojumus ievesto saišu virzienos. Dotajā gadījumā nezināmais ir iespīlējuma pagriezienu leņķis Z_1 šķēlumā B. Zinot Z_1 vērtību var noteikt iekšējās piepūles šķēlumos. Papildus vienādojumu Z_1 noteikšanai iegūst no nosacījuma, ka summārajam reaktīvajam momentam ievestajā iespīlējumā B no ārējās slodzes R_{bq} un iespīlējuma pagriezienu leņķa $Z_1 - R_{Bz1}$ ir jābūt vienādam ar nulli, atbilstoši momentu līdzsvara nosacījumam šķēlumā **B**.

Gadījumos, ja daļu no dotās sistēmas ir izdevīgāk risināt ar spēku, bet daļu ar pārvietojumu metodi, lieto tā saukto **jaukto** statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodi. Šais gadījumos kādā no sistēmas daļām saites tiek atmetas, bet pārējā tās daļā tiek ievestas papildus saites. Tātad nezināmie vienlaicīgi ir gan spēki, gan pārvietojumi. Izmantojot šo metodi ir iespējams samazināt nezināmo skaitu un līdz ar to izskaitļojumu apjomu.

Simetrisku rāmju aprēķinā bieži ir izdevīgi lietot tā saucamo **kombinēto** metodi. Šajā gadījumā ārējo slodzi sadala simetriskā un apgriezti simetriskā slodzē. Iekšējās piepūles no simetriskas slodzes iegūst, izmantojot pārvietojumu metodi, no apgriezti simetriskās, izmantojot spēku metodi.

2. STATISKI NENOTEICAMU RĀMJU APRĒĶINS AR SPĒKU METODI

2.1. Statiskās nenoteicamības pakāpe

Aprēķinot statiski nenoteicamu sistēmu ar spēku metodi, par nezināmajiem tiek pieņemtas piepūles atmestajās liekajās iekšējās vai ārējās saitēs. Lai noteiktu atmetamo saišu skaitu, jānosaka sistēmas statiskās nenoteicamības pakāpe – lieko saišu skaits. Vispārīgā gadījumā to nosaka sakarība (starpība starp ievesto un minimāli nepieciešamo saišu skaitu lai sistēma varētu būt ģeometriski nemainīga)

$$n = 2L + 3C + S_{\text{sist}} + S_{\text{atb}} - 3D, \quad (2.1)$$

kur

n - sistēmas statiskās nenoteicamības pakāpe;

L - vienkāršo un uz vienkāršām reducēto salikto locīklu skaits sistēmā (jāatceras, ka $L = 1L_2 + 2L_3 + 3L_4 + \dots$);

C - vienkāršo un uz vienkāršām reducēto salikto stingo saišu skaits sistēmā;

S_{sist}, S_{atb} - sistēmas iekšējo un ārējo stieņu skaits;

D - disku skaits sistēmā.

Vienstāvīgiem rāmjiem ērtāk lietot sakarību:

$$n = S_{\text{atb}} - 3 - L, \quad (2.2)$$

kur

S_{atb} - atbalststieņu (ārējo saišu) skaits sistēmā.

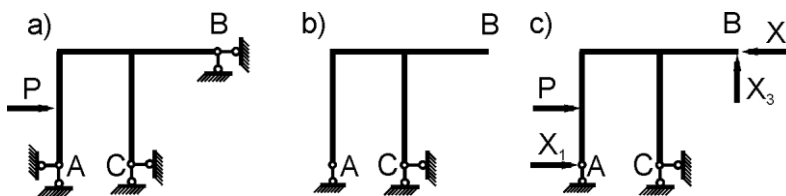
Zinot sistēmas statiskās nenoteicamības pakāpi, var izpildīt aprēķina nākamo etapu - izvēlēties spēku metodes pamatsistēmu.

2.2. Spēku metodes pamatsistēmas izvēle

Par *spēku metodes pamatsistēmu* sauc *statiski noteicamu, ģeometriski nemainīgu sistēmu, kuru iegūst no dotās sistēmas, atmetot liekās saites*. (Atsevišķos gadījumos spēku metodes pamatsistēma var būt arī statiski nenoteicama.)

Lai pamatsistēma būtu statiski noteicama, jāatmet tik iekšējās vai ārējās saites, cik reizes statiski nenoteicama dotā sistēma. Atmetot saites jāpārliecinās, vai izpildās ģeometriski nemainīgu sistēmu veidošanās noteikumi un tādad, vai iegūtā sistēma būs ģeometriski nemainīga (nedrīkst atņemt dotās sistēmas **obligātās saites**).

Izvēloties trīs reizes statiski nenoteicamam rāmim (att. 2.1.a) spēku metodes pamatsistēmu (att. 2.1.b) atmetam ārējo slodzi un trīs no rāmja ārējām saitēm. Iegūtā pamatsistēma ir statiski noteicama, ģeometriski nemainīga, bet nav ekvivalenta dotajai sistēmai tajā iespējamo pārvietojumu ziņā.



att. 2.1

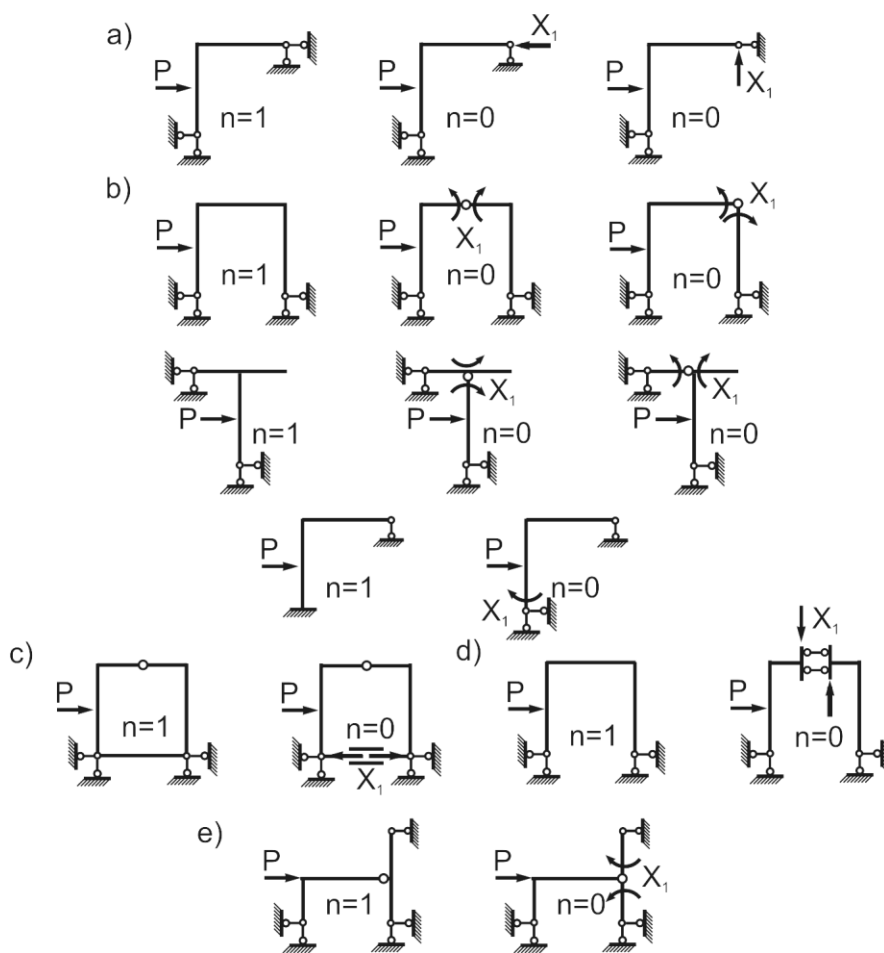
Pamatsistēmas punktā **A** ir iespējams horizontālais, bet punktā **B** horizontālais un vertikālais pārvietojumi, kuri nebija iespējami dotajā sistēmā. Lai novērstu šo atšķirību, pamatsistēma tiek slogota ar ārējo slodzi un nezināmiem spēkiem X_1 , X_2 un X_3 , t.i., atņemto saišu reakcijām. Tā kā sistēmas līdzsvars nemainās, ja tajā tiek atņemtas saites un aizstātas ar atņemto saišu reakcijām, tad slogotā spēku metodes **pamatsistēma** (att. 2.1.c) attiecībā pret pārvietojumiem un iekšējām piepūlēm ir **ekvivalenta dotajai statiski nenoteicamajai sistēmai**.

Spēku metodes pamatsistēmu var izvēlēties bezgalīgi daudz veidos, atkarībā no tā, kādā veidā tiek samazināta statiskās nenoteicamības pakāpe dotajai sistēmai.

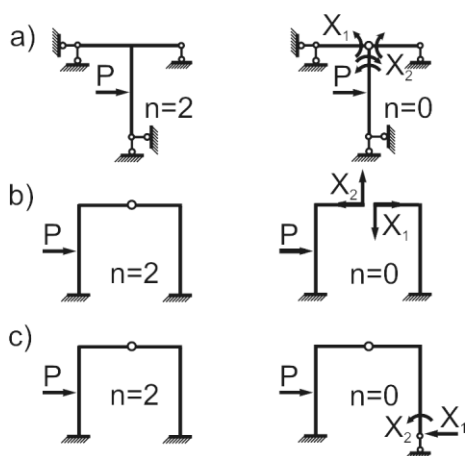
Statiskās nenoteicamības pakāpi var samazināt:

1) par vienu vienību - atmetot balstu (att. 2.2.a), ievēdot vienkāršu locīklu stienī, stingā mezglā vai iespīlējumā (att. 2.2.b), pārgriežot stieni tā, lai tas neuzņemtu aksiālspeku (att. 2.2.c) vai šķērsspēku (att. 2.2.d), aizvietojo ar vienkāršu locīklu ar divkāršu (att. 2.2.e);

2) par divām vienībām - ievēdot stingā mezglā divkāršo locīklu (att. 2.3.a), pārgriežot sistēmu pa locīklu (att. 2.3.b), atmetot iespīlējumā divas saites (att. 2.3c);

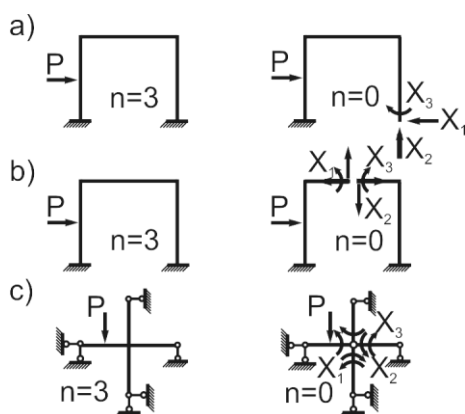


att. 2.2



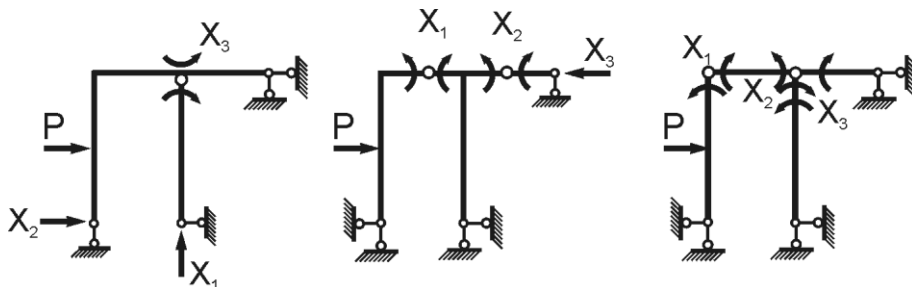
att. 2.3

3) par trīs vienībām - atmetot iespējējumu (att. 2.4.a), pārgriežot stieni (att. 2.4.b) vai ievēdot trīskāršu locīkļu (att. 2.4.c).

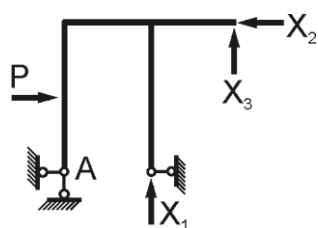


att. 2.4

Šie statiskās nenoteicamības pakāpes samazināšanas paņēmieni var tikt lietoti jebkurā kombinācijā, līdz ar to nodrošinot lielu iespējamo spēku metodes pamatsistēmu daudzveidību. Piemēram, att. 2.1.a dotajam rāmim var izvēlēties arī šādas spēku metodes pamatsistēmas (att. 2.5):



att. 2.5



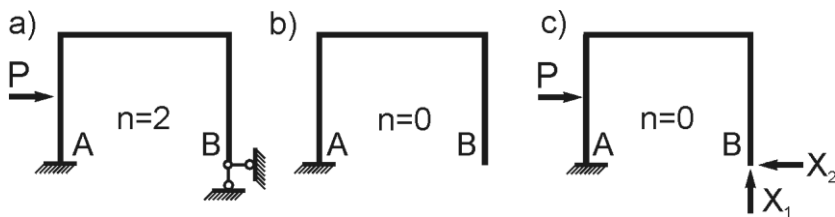
att. 2.6

Pamatsistēmas izvēle ir atbildīgs posms statiski nenoteicamas sistēmas aprēķinā. Racionālas pamatsistēmas gadījumā vienkāršojas piepūļu epīru konstruēšana un samazinās izskaitļošanas darba apjoms. Jāatceras, ka spēku metodes pamatsistēmai jābūt ģeometriski nemainīgai. Pamatsistēma, kura parādīta att. 2.6, izvēlēta nepareizi, jo tā ir acīmredzīgi mainīga (trīs saites krustojas vienā punktā A).

2.3. Spēku metodes kanoniskie vienādojumi

Pēc slogotās spēku metodes pamatsistēmas izvēles, jānosaka lieko nezināmo skaitliskās vērtības. To noteikšanai sastāda spēku metodes kanonisko vienādojumu sistēmu - vienādojumus, kas nodrošina dotās statiski nenoteicamās sistēmas un slogotās spēku metodes pamatsistēmas ekvivalenci attiecībā uz pārvietojumiem un iekšējām piepūlēm.

Sastādīsim kanonisko vienādojumu sistēmu divas reizes statiski nenoteicamam rāmim (att. 2.7.a).



att. 2.7

Izveidojam spēku metodes pamatsistēmu, atmetot saites punktā **B**. Iegūtā pamatsistēma (att. 2.7b) atšķiras no dotās ar to, ka tai punktā **B** ir iespējami vertikālais un horizontālais pārvietojumi. Lai novērstu šo atšķirību, slogojam pamatsistēmu ar ārējo slodzi un pagaidām nezināmiem spēkiem X_1 un X_2 . Dotā statiski nenoteicamā sistēma un slogotā spēku metodes pamatsistēma būs ekvivalentas attiecībā pret pārvietojumiem un iekšējām piepūlēm, ja pamatsistēmai punktā **B** pārvietojumi būs vienādi ar nulli, kā tas ir dotajai sistēmai. Lieko nezināmo X_1 un X_2 vērtības šajā gadījumā būs vienādas ar atmesto saišu reakcijām. Tātad atmesto saišu reakciju noteikšanai jāizmanto divi nosacījumi:

$$\begin{cases} \Delta_{X_1}(X_1; X_2; P) = 0 \\ \Delta_{X_2}(X_1; X_2; P) = 0, \end{cases}$$

kuri izsaka summāro pārvietojumu no ārējās slodzes un liekajiem nezināmajiem vienādbību ar nulli atmesto saišu pielikšanas vietās un virzienos slogotajā spēku metodes pamatsistēmā.

Izmantojot spēku darbības neatkarības principu, šos nosacījumus var uzrakstīt izvērstā spēku metodes kanonisko vienādojumu formā:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

kur pirmais vienādojums izsaka spēka X_1 pielikšanas punkta summārā pārvietojuma vienādību ar nulli spēka X_1 virzienā, bet otrais - spēka X_2 pielikšanas punkta summārā pārvietojuma vienādību ar nulli spēka X_2 virzienā.

Pirmajā vienādojumā:

δ_{11} - spēka X_1 pielikšanas punkta pārvietojums šā spēka darbības virzienā, ko izraisa vienības spēks $\bar{X}_1 = 1$;

$\delta_{11} \bar{X}_1$ - tā paša punkta pārvietojums tajā pašā virzienā, ko izraisa spēks X_1 ;

δ_{12} - tā paša punkta pārvietojums tajā pašā virzienā, ko izraisa vienības spēks $\bar{X}_2 = 1$;

$\delta_{12} \bar{X}_2$ - tā paša punkta pārvietojums tajā pašā virzienā, ko izraisa spēks X_2 ;

Δ_{1P} - tā paša punkta pārvietojums tajā pašā virzienā, ko izraisa ārējā slodze P .

Otrajā vienādojumā tiek summēti pārvietojumi spēka X_2 pielikšanas punktā šā spēka virzienā no tiem pašiem faktoriem kā pirmajā vienādojumā.

Divreiz statiski nenoteicamai sistēmai iegūti divi kanoniskie vienādojumi, vienreiz statiski nenoteicamai sistēmai nepieciešams viens kanoniskais vienādojums

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

bet n reizes statiski nenoteicamai sistēmai - n kanonisko vienādojumu sistēma:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ik}X_k + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{cases}$$

Tātad spēku metodes kanonisko vienādojumu skaits atbilst lieko saišu skaitam statiski nenoteicamajā sistēmā, un šie vienādojumi kopā ar statikas līdzsvara vienādojumiem dod iespēju noteikt reakcijas visās statiski nenoteicamās sistēmas saitēs kā arī iekšējās piepūles sistēmas elementos.

Pēc tam, kad, atrisinot kanonisko vienādojumu sistēmu, ir noteiktas lieko nezināmo skaitliskās vērtības $X_1 = A_1, X_2 = A_2, \dots, X_n = A_n$, uzdevumu par piepūļu epīru noteikšanu var risināt kā statistiski noteicamu, t.i., konstruēt iekšējo piepūļu epīras statistiski noteicamajai spēku metodes pamatsistēmai, kas slogota ar ārējo slodzi un atrastajiem liekajiem nezināmajiem.

2.4. Statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina secība ar spēku metodi

Nosakot piepūles statistiski nenoteicamas sistēmas elementus ar spēku metodi, aprēķinu ieteicams veikt noteiktā secībā. Galvenie aprēķina etapi ir:

1. Nosaka sistēmas statistiskās nenoteicamības pakāpi;
2. Izveido slogoto spēku metodes pamatsistēmu;
3. Sastāda kanonisko vienādojumu sistēmu, ņemot vērā, ka vienādojumu skaitam jāsašķrīt ar atmesto saišu skaitu;
4. Nosaka kanonisko vienādojumu sistēmas koeficientus - vienības δ_{ik} un slodzes Δ_{ip} pārvietojumus. Šai nolūkā pievēršamies pamatsistēmas vienības un slodzes stāvokļiem.

*Par **vienības stāvokli** sauc pamatsistēmas stāvokli, kad uz to darbojas tikai vienības spēks $\bar{X}_i = 1$, vērsts nezināmās reakcijas X_i virzienā.*

*Par **slodzes stāvokli** sauc pamatsistēmas stāvokli, kad uz to darbojas tikai ārējā slodze.*

Katrā no apskatāmajiem sistēmas stāvokļiem konstruē lieces momentu epīras - vienības epīras $\bar{M}_1, \bar{M}_2 \dots \bar{M}_n$ un slodzes epīru M_p , kā arī summāro vienības epīru $\bar{M}_s$, ko iegūst, slogojot pamatsistēmu vienlaikus ar visiem vienības spēkiem $\bar{X}_i = 1, i=1\dots n$, vai saskaitot atsevišķās vienības epīras: $\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n$.

Vienības δ_{ik} un slodzes Δ_{ip} pārvietojumus nosaka izmantojot statistiski noteicamu sistēmu pārvietojumu aprēķina metodiku. Pie tam jāizpildās sekojošiem nosacījumiem:

- a) vienības pārvietojumus ar vienādiem indeksiem - $\delta_{11}, \delta_{22} \dots \delta_{nn}$ sauc par galvenajiem, tie vienmēr ir pozitīvi, jo tiek iegūti, atbilstošās epīras reizinot pašas ar sevi;
- b) vienības pārvietojumi ar dažādiem indeksiem - $\delta_{i1}, \delta_{i2} \dots \delta_{in}$ - blakus pārvieto-

jumi, var būt pozitīvi, negatīvi vai nulle, jo tos iegūst, reizinot atšķirīgas epīras;

c) atbilstoši pārvietojumu savstarpīguma teorēmai, vienības pārvietojumiem ar savstarpēji apmainītiem indeksiem jābūt vienādiem: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$;

5. Pārbauda kanonisko vienādojumu sistēmas koeficientu δ_{ik} un brīvo locekļu Δ_{ip} noteikšanas pareizību¹.

6. Ievieto noteiktās δ_{ik} un Δ_{ip} vērtības kanoniskajos vienādojumos un, tos atrisinot, iegūst lieko nezināmo $X_1, X_2, \dots, X_n$ vērtības. Tās jāpārbauda ievietojot šīs vērtības kanoniskajos vienādojumos.

7. Konstruē galīgās lieces momentu M , šķērsspēku Q un aksiāls spēku N epīras, izmantojot vienu no iespējamajiem variantiem:

a) slogo pamatsistēmu ar ārējo slodzi un noteiktajiem liekajiem nezināmajiem $X_1 = A_1, X_2 = A_2, \dots, X_n = A_n$ un konstruē M, Q un N epīras kā statistiski noteicamai sistēmai;

b) galīgo lieces momentu epīru iegūst, summējot slodzes epīru M_p ar vienības epīrām, kas pareizinātas ar atbilstošajām lieko nezināmo vērtībām atbilstoši sakarībai

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n.$$

Šķērsspēku epīru iegūst no galīgās momentu epīras, sadalot sistēmu posmos, katru posmu pieņemot par vienkāršu brīvi balstītu siju, kura slogota ar ārējo slodzi un tās galos pieliktiem momentiem M^l un M^k un katram posmam pielietojot sakarību

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{(M^l - M^k)}{l},$$

kur

Q_x - šķērsspēka vērtība apskatāmajā šķēlumā;

Q_x^0 - šķērsspēka vērtība šajā šķēlumā brīvi balstītai sijai no ārējās slodzes, kas darbojas posma robežās;

M^l - lieces momenta vērtība posma labajā galā;

¹ skat. nākošo paragrāfu

M^k - lieces momenta vērtība posma kreisajā galā;

l - apskatāmā posma garums.

Aksiāls spēku epīru konstruēšanai izmantojam sistēmas mezglu vai atsevišķu sistēmas daļu līdzsvara nosacījumus.

8. Izpilda iegūto epīru **kinemātisko** un **statisko** pārbaudi.

2.5. Spēku metodes kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu pārbaude

Spēku metodes kanonisko vienādojumu sistēmas koeficienti un brīvie locekļi ir pārvietojumi spēku metodes pamatsistēmā no vienības spēkiem $\bar{X}_i = 1$ un ārējās slodzes. Šo pārvietojumu vērtības iegūst, sareizinot atbilstošās lieces momentu epīras. Ja sareizinot epīras, ir ieviesusies kļūda, kanonisko vienādojumu sistēmas atrisinājums dos nepareizas lieko nezināmo vērtības. Tāpēc jāpārbauda vai koeficienti δ_{ik} un brīvie locekļi Δ_{ip} noteikti pareizi.

Sastādām n reiz statiski nenoteicamas sistēmas pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientu pie liekajiem nezināmajiem summu

$$\begin{aligned} \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \delta_{1k} + \dots + \delta_{1n} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1^2}{EI_i} dx + \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_i} dx + \dots \\ &+ \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_k}{EI_i} dx + \dots + \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n}{EI_i} dx = \\ &= \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_k + \dots + \bar{M}_n)}{EI_i} dx = \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI_i} dx = \delta_{1s}, \end{aligned}$$

kur $\bar{M}_s$ - summārā vienības epīra.

Tātad pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientu summa pie liekajiem nezināmajiem ir vienāda ar lielumu δ_{1s} , ko iegūst, sareizinot lieces momenta epīru no pirmās vienības slodzes $\bar{X}_i=1$ ar summāro vienības epīru.

Analogas sakarības ir spēkā arī pārējiem kanoniskajiem vienādojumiem. Tātad patvaļīga k -tā vienādojuma koeficientu pie liekajiem nezināmajiem summa ir vienāda ar lie-

lumu δ_{ks} :

$$\sum_{m=1}^n \delta_{km} = \delta_{ks}; \quad \delta_{ks} = \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_k \bar{M}_s}{EI_i} dx.$$

Šī ir tā saucamā pārbaude pa rindiņām - katra kanoniskā vienādojuma koeficienti tiek pārbaudīti neatkarīgi.

Summējot koeficientus pie liekajiem nezināmajiem visiem kanoniskajiem vienādojumiem, iegūst sakarību universālajai pārbaudei:

$$\begin{aligned} \delta_{1s} + \delta_{2s} + \dots + \delta_{ks} + \dots + \delta_{ns} &= \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI_i} dx + \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_s}{EI_i} dx + \dots \\ &+ \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_k \bar{M}_s}{EI_i} dx + \dots + \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_s}{EI_i} dx = \\ &= \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_k + \dots + \bar{M}_n)}{EI_i} dx = \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI_i} dx = \delta_{ss}. \end{aligned}$$

Tātad koeficientu summai pie liekajiem nezināmajiem visos kanoniskajos vienādojumos jābūt vienāda ar lielumu δ_{ss} , ko iegūst sareizinot summāro vienības epīru M_s pašu ar sevi. Vispirms izpilda universālo pārbaudi. Ja tā neizpildās, tad meklē kļūdu, veicot pārbaudi pa rindiņām.

Analogi var parādīt, ka attiecībā uz kanonisko vienādojumu brīvajiem locekļiem ir spēkā sakarība

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{kP} + \dots + \Delta_{nP} = \Delta_{sP},$$

kur

$$\Delta_{sP} = \sum_i \int_{l_i} \bar{M}_s M_P \frac{dx}{EI_i}.$$

Aprēķinu gaitā veicot šādas pārbaudes nodrošināties pret gadījuma rakstura kļūdām.

2.6. Lieces momentu epīras kinemātiskā pārbaude

Lai dotā statiski nenoteicamā un spēku metodes pamatsistēma būtu ekvivalentas attiecībā pret pārvietojumiem un iekšējām piepūlēm, jāizpildās nosacījumam, ka pārvietojumiem ar ārējo slodzi un lieko saišu reakcijām slogotajā spēku metodes pamatsistēmā

atmesto saišu vietās un virzienos jābūt vienādiem ar nulli. Šos pārvietojumus varam noteikt, sareizinot atbilstošās vienības epīras ar galīgo momentu epīru:

$$\sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_1 M}{EI_i} dx = 0 \quad \text{pārvietojums } X_1 \text{ pielikšanas punktā un virzienā;}$$

.....

$$\sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_k M}{EI_i} dx = 0 \quad \text{pārvietojums } X_k \text{ pielikšanas punktā un virzienā;}$$

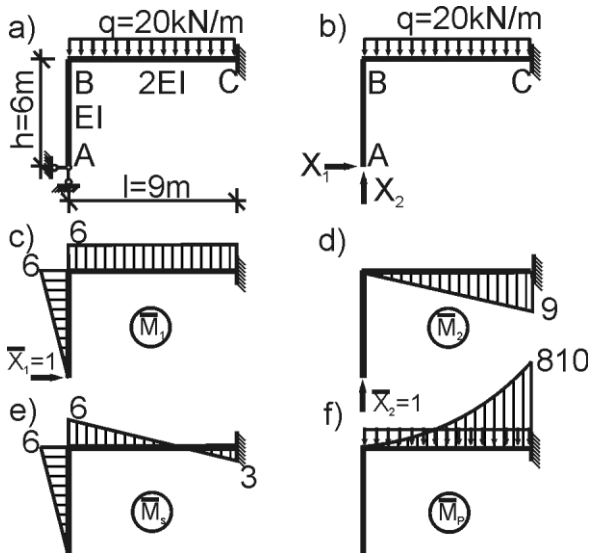
.....

$$\sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_n M}{EI_i} dx = 0 \quad \text{pārvietojums } X_n \text{ pielikšanas punktā un virzienā.}$$

Summējot šos n nosacījumus, nonākam pie izteiksmes:

$$\sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s M}{EI_i} dx = 0,$$

saskaņā ar kuru galīgās momentu epīras reizinājumam ar summāro vienības epīru ir jābūt vienādam ar nulli. Tā arī ir dotā statiski nenoteicamā rāmja lieces momentu epīras kinemātiskā pārbaude.



att. 2.8

Piemērs 2.1. Uzkonstruēt iekšējo piepūļu epīras att. 2.8a parādītajam rāimim.

Atrisinājums. Aprēķinu pēc spēku metodes sāk, nosakot sistēmas statiskās nenoteicamības pakāpi:

$$n = S_{\text{atb}} - 3 - L = 5 - 3 - 0 = 2.$$

Pamatsistēmu izvēlamies atmetot divas saites balstā A (att. 2.8.b).

Apskatām pamatsistēmu vienības un slodzes stāvokļos un konstru-

ējam lieces momentu epīras: $\bar{M}_1$ - no $\bar{X}_1 = 1$ (att. 2.8.c); $\bar{M}_2$ - no $\bar{X}_2 = 1$ (att. 2.8.d.), $\bar{M}_s$ - no vienlaicīgi pieliktajiem $\bar{X}_1 = 1$ un $\bar{X}_2 = 1$ (att. 2.8.e) un M_p - no ārējās slodzes (att. 2.8.f).

Divreiz statiski nenoteicamai sistēmai jā sastāda divi kanoniskie vienādojumi

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0, \end{cases}$$

kuru koeficientus un brīvos locekļus iegūstam, sareizinot atbilstošās lieces momentu epīras pēc Vereščagina paņēmiena (vai Simpsona formulas):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{234}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EI} 9 \cdot 6 \cdot 4,5 = -\frac{121,5}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 810 \cdot 6 = \frac{7290}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{2EI} \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 810 \cdot \frac{3}{4} \cdot 9 = -\frac{8201}{EI}.$$

Pārbaudot atrastās koeficientu un brīvo locekļu vērtības konstatējam:

$$\delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} \stackrel{?}{=} \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s^2}{EI_i} dx;$$

$$\frac{1}{EI} (234 - 2 \cdot 121,5 + 121,5) \stackrel{?}{=} \frac{1}{EI} \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 2;$$

$$\frac{112,5}{EI} = \frac{112,5}{EI};$$

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} \stackrel{?}{=} \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s M_p}{EI_i} dx;$$

$$\frac{1}{EI} (7290 - 8201) \stackrel{?}{=} \frac{9}{6 \cdot 2EI} (4 \cdot 1,5 \cdot 202,5 - 810 \cdot 3);$$

$$-\frac{911}{EI} = -\frac{911}{EI}.$$

Izmantojot noteiktās pārvietojumu vērtības iegūstam sekojošus kanoniskos vienādojumus:

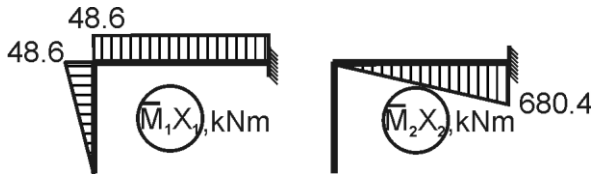
$$234X_1 - 121,5X_2 + 7290 = 0,$$

$$-121,5X_1 + 121,5X_2 - 8201 = 0,$$

kurus atrisinot, iegūstam:

$$X_1 = 8,1 \text{ kN}; \quad X_2 = 75,6 \text{ kN}.$$

Pārbaude parāda, ka vienādojumu sistēma atrisināta pareizi.



att. 2.9

Konstruējam galīgās piepūļu epīras. To var izdarīt slogojot pamatsistēmu ar ārējo slodzi un noteiktajām X_1 un X_2 vērtībām.

Tā tiek iegūtas epīras statiski noteicamajai pamatsistēmai, kuras ir derīgas arī dotajai statiski nenoteicamajai sistēmai. Tomēr bieži, sevišķi sarežģītu sistēmu gadījumā, ērtāks ir cits paņēmieni – galīgo lieces momentu epīru atrast saskaņā ar sakarību

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p,$$

kur epīras $\bar{M}_1 X_1$ un $\bar{M}_2 X_2$ (att. 2.9) iegūtas, pareizinot vienības epīras $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_2$ ar atbilstošajām X_1 un X_2 vērtībām.

Galīgā lieces momentu epīra M parādīta att. 2.10.a.

Atliek veikt kinemātisko pārbaudi, lai pārlicinātos, ka liekie nezināmie un rāmja lieces momentu epīra M noteikta pareizi:

$$\sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_s M}{EI_i} dx = 0 \quad (\text{precīzāk būtu veikt pārbaudi katrai vienības epīrai}$$

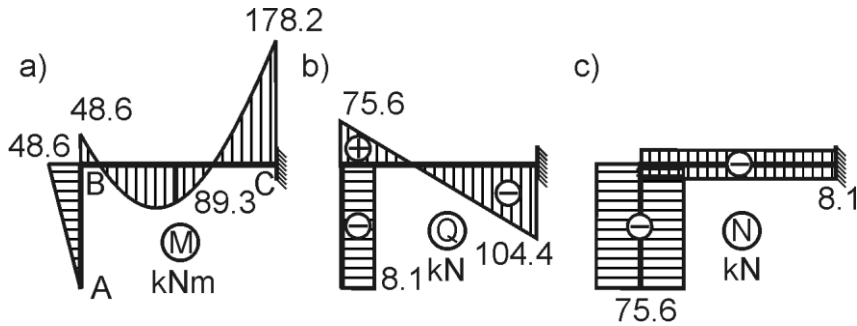
neatkarīgi);

$$\frac{6}{6EI} (4 \cdot 24,3 \cdot 3 + 6 \cdot 48,66) + \frac{9}{6 \cdot 2EI} (6 \cdot 48,6 - 4 \cdot 89,3 \cdot 1,5 - 178,8 \cdot 3) = 0;$$

$$\frac{583,2 - 585,45}{EI} = -\frac{2,25}{EI} \approx 0.$$

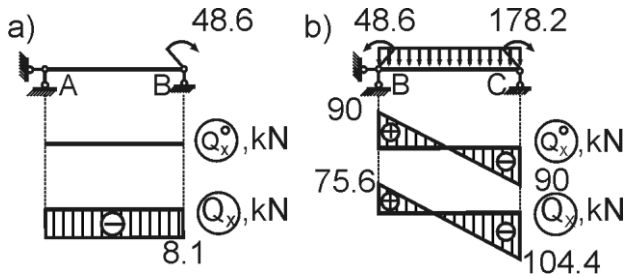
Pārbaude rāda, ka starpība starp pozitīvo un negatīvo saskaitāmo summām sastāda 0,4% un pārvietojumi atmesto saišu vietās un virzienos praktiski ir vienādi ar nulli.

Tātad lieko nezināmo vērtības noteiktas pareizi un arī iegūtā M epīra ir pareiza.



att. 2.10

Nosakot šķērsspēku Q , katru rāmja posmu uzskatām par vienkāršu divbalstu siju, uz kuru darbojas ārējā slodze un momenti tās balstos. Izmantojam sakarību:



att. 2.11

$$Q_x = Q_{0x} + \frac{M^{lab} - M^{kr}}{l}.$$

Posmā AB (att. 2.11.a) nav ārējās slodzes un šķērsspēka vērtību nosaka vienīgi momenta vērtība labajā balstā.

Posmā BC (att. 2.11.b) galīgo šķērsspēka epīru iegūstam, summējot epīru no ārējās slodzes Q_{0x} un šķērsspēku no momentiem posma galos.

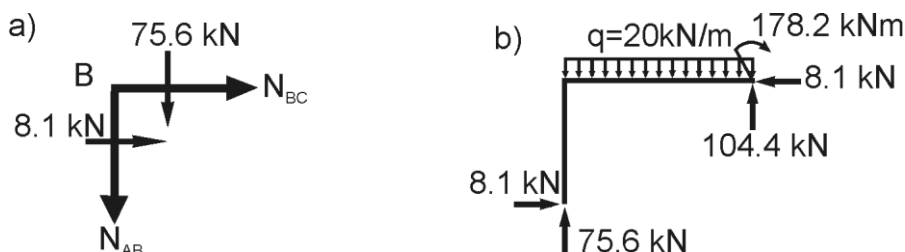
Aksiāls spēka N epīru iegūstam, izgriežot mezglu B un analizējot tā līdzsvaru (att. 2.12a). Aksiāls spēku N_{AB} un N_{BC} darbības virziens zīmējumā sākotnēji pieņemts no mezgla B, tātad šie stieņi ir pieņemti par stieptiem. Sastādot projekciju summas uz vertikālo un horizontālo asi, iegūstam vienādojumus:

$$\sum X = N_{BC} + 8,1 = 0,$$

$$\sum Y = N_{AB} + 75,6 = 0.$$

No šiem vienādojumiem iegūstam aksiāls spēku vērtības $N_{BC} = -8,1 \text{ kN}$ un $N_{AB} = -75,6 \text{ kN}$. Iegūtās aksiāls spēka vērtības ir negatīvas, tātad abi stieņi patiesībā ir spiesti.

Aprēķina nobeigumā jāizpilda galīgo epīru **statiskā** pārbaude.

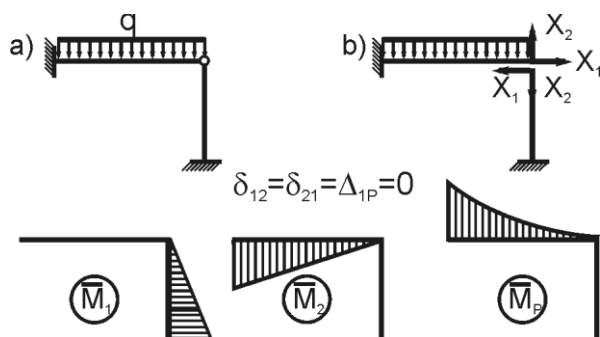


att. 2.12

Statisko epīru pārbaudi izpilda tāpat kā statiski noteicamām sistēmām - pārbauda atbilstību starp slodzēm un epīrām, mezglu un visas sistēmas, kas atšķelta pa balstiem, līdzsvaru (att. 2.12b). Balstu reakciju vērtības balstos, kas orientēti perpendikulāri stieņiem, tiek iegūtas no šķērsspēku epīrām, bet balstos, kuru virzieni sakrīt ar stieņu virzieniem, no aksiāls spēku epīrām.

2.7. Racionālas pamatsistēmas izvēle

Aprēķinu darba apjoms, kas veicams, risinot statiski nenoteicamu sistēmu ar spēku metodi, ir būtiski atkarīgs no pamatsistēmas izvēles. Pamatsistēmu jācenšas izvēlēties tā, lai pēc iespējas lielāks skaits pārvietojumu δ_{ik} un Δ_{ip} būtu vienāds ar nulli. Optimālais gadījums ir tad, ja visi blakus koeficienti δ_{ik} ir vienādi ar nulli, un kanonisko vienādojumu sistēma pieņem sekojošu veidu:



att. 2.13

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{kk}X_k + \Delta_{kp} = 0$$

$$\delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0$$

Visus kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus iegūst, reizinot atbilstošās vienības un slodzes epīras.

Divu epīru reizinājums ir vienāds ar nulli sekojošos gadījumos:

1. vismaz vienai no reizināmajām epīrām, katrā posmā ordinātas ir vienādas ar nulli (att. 2.13);

2. viena no epīrām ir simetriska, bet otra apgriezti simetriska (att. 2.14);

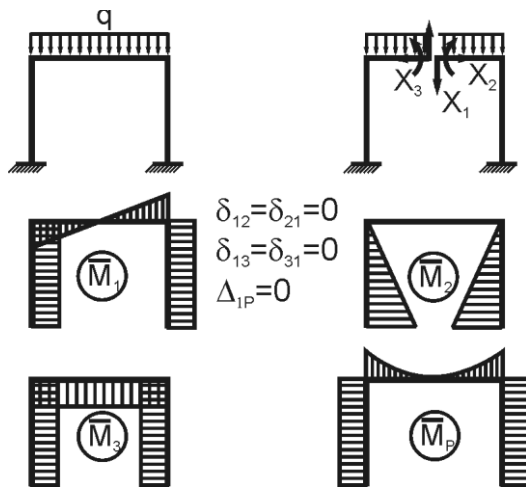
Par **simetriskām** sauc epīras, kuru ordinātas simetriskos rāmja elementos ir vienādas un izvietotas simetriski pret sistēmas simetrijas asi.

Par **apgriezti simetriskām** sauc epīras, kuru ordinātas simetriskos sistēmas elementos ir vienādas pēc absolūtās vērtības, bet izvietotas nesimetriski pret simetrijas asi.

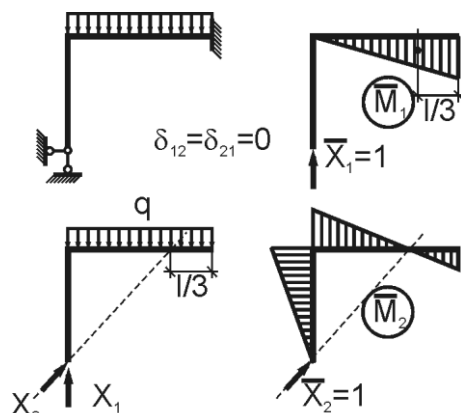
Apskatāmajai sistēmai jābūt simetriskai ne tikai attiecībā pret elementu asu un balstu izvietojumu, bet arī attiecībā pret elementu stingumiem.

3. katra posma robežās vismaz viena no epīrām ir ierobežota ar taisni, un tai ordināta pret otras epīras laukuma smaguma centru ir vienāda ar nulli (att. 2.15).

No iepriekš teiktā varam secināt, ka spēku metodes pamatsistēmu ir izdevīgi izvēlēties tā, lai pēc iespējas lielākā skaitā posmu epīru ordinātas būtu vienādas ar nulli. To var panākt, sadalot doto sistēmu atsevišķās izolētās sistēmās ar šķēlumu un locīklu palīdzību.



att. 2.14

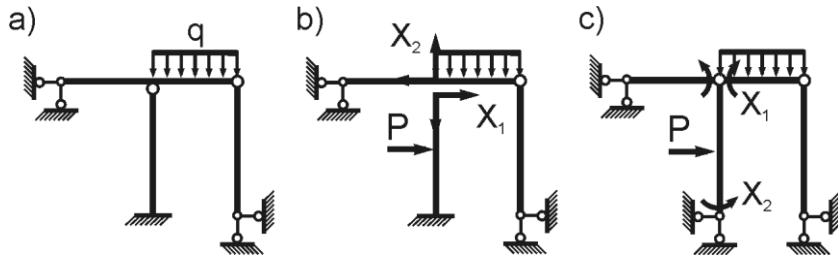


att. 2.15

Piemēram, izvēloties att. 2.16a dotajam rāmim pamatsistēmu tā, kā tas parādīts att. 2.16b vai att. 2.16c, lieces momentu epīru katram rāmja posmam var konstruēt neatkarīgi kā vienkāršai brīvi balstītai vai iespīlētai sijai.

Ja dotā sistēma ir simetriska, tad pamatsistēmu arī ir izdevīgi izvēlēties simetrisku (att. 2.14). Tādā gadījumā iegūstam simetriskas un apgriezti simetriskas vienības epīras, bet

simetriskas un apgriezti simetriskas epīras reizinājums ir vienāds ar nulli.

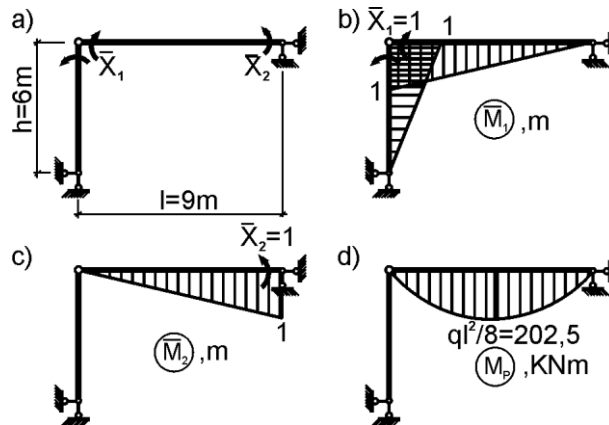


att. 2.16

Pamatsistēmu vēlams izveidot tā, lai vienas epīras, kas ierobežota ar taisni, ordināta pret otras epīras laukuma smaguma centru, pēc iespējas lielākā skaitā posmu būtu vienādas ar nulli (att. 2.15).

Piemērs 2.2. Noteikt lieces momentu epīru iepriekšējā piemērā dotajam rāmim izmantojot atšķirīgu (racionālāku) pamatsistēmu.

Atrisinājums. Izvēlamies att. 2.17a doto pamatsistēmu. Vienības un slodzes epīras parādītas att. 2.17b, c, d.



att. 2.17

Nosakot vienības spēku (šai gadījumā momentu) un slodzes izraisītos pārvietojumus, t.i., kanonisko vienādojumu koeficientus, izmantojam Simpsona formulu

$$\int_0^l f_1(x)f_2(x)dx = \frac{l}{6} \left[f_1(0) \cdot f_2(0) + 4f_1\left(\frac{l}{2}\right) \cdot f_2\left(\frac{l}{2}\right) + f_1(l) \cdot f_2(l) \right].$$

Pielietojot šo formulu, piemēram, ārējās slodzes izraisītajiem pārvietojumiem, iegūstam sakarību (summēts tiek pa sistēmas posmiem – sistēmas daļām, kurās abām iekšējām piepūlēm ir nemainīgs maiņas likums)

$$\begin{aligned}\Delta_{kp} &= \sum_i \frac{1}{EI_i} \int_0^{l_i} \bar{M}_k(x) M_p(x) dx = \\ &= \sum_i \frac{l_i}{6EI_i} \left[\bar{M}_k(0) M_p(0) + 4\bar{M}_k\left(\frac{l_i}{2}\right) M_p\left(\frac{l_i}{2}\right) + \bar{M}_k(l_i) M_p(l_i) \right].\end{aligned}$$

Tādā gadījumā saskaņā ar Mora integrāli

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EI} \int_0^6 \bar{M}_1^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^9 \bar{M}_1^2 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1] + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{9}{6} [1 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0] = \frac{2}{EI} + \frac{1,5}{EI} = \frac{3,5}{EI}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{2EI} \int_0^9 \bar{M}_2^2 dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{9}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1] = \frac{1,5}{EI}; \\ \delta_{12} &= \frac{1}{2EI} \int_0^9 \bar{M}_1 \bar{M}_2 dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{9}{6} [1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1] = \frac{0,75}{EI}; \\ \Delta_{1p} &= \frac{1}{2EI} \int_0^9 \bar{M}_1 M_p dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{9}{6} [1 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 202,5 + 0 \cdot 0] = \frac{303,75}{EI}; \\ \Delta_{2p} &= \frac{1}{2EI} \int_0^9 \bar{M}_2 M_p dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{9}{6} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 202,5 + 1 \cdot 0] = \frac{303,75}{EI}.\end{aligned}$$

Atrisinot kanonisko vienādojumu sistēmu

$$3,5X_1 + 0,75X_2 + 303,75 = 0$$

$$0,75X_1 + 1,5X_2 + 303,75 = 0$$

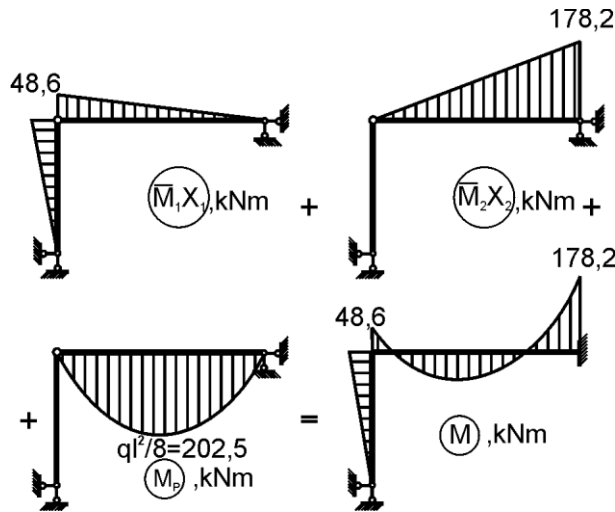
iegūstam: $X_1 = -48,6 \text{ (kNm)}$; $X_2 = -178,2 \text{ (kNm)}$.

Saskaņā ar superpozīcijas principu statiski nenoteicamā rāmja lieces momentu epīru iegūstam atbilstoši sakarībai

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p$$

Attiecīgās epīras konstruēšanas gaita parādīta att. 2.18. Tas, ka iegūtās lieko nezināmo

vērtības ir negatīvas, norāda, ka sākotnēji pieņemtie nezināmo virzieni ir izvēlēti nepareizi. Līdz ar to konstruējot epīras $\bar{M}_1 X_1$ un $\bar{M}_2 X_2$ jāmaina stieptā puse un visas epīru $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_2$ ordinātes jāpareizina ar X_1 un X_2 absolūtajām vērtībām.



att. 2.18

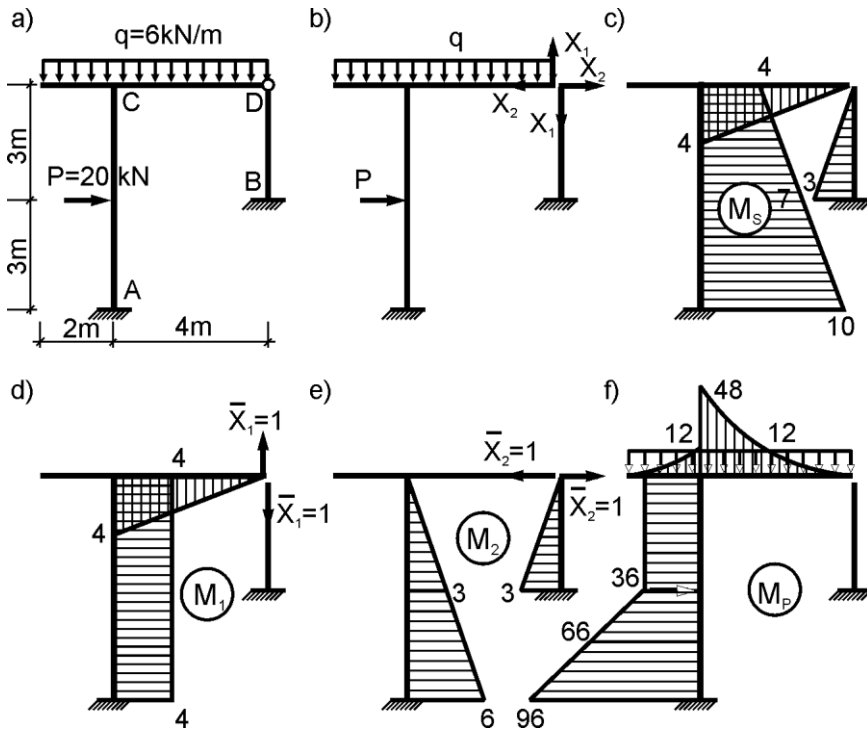
Varam secināt, ka iegūtā lieces momentu epīra ir identiska iepriekšējā paragrāfā noteiktajai epīrai. Analogi rezultāti jāiegūst pielietojot jebkuru citu pamatsistēmu, jo piepūles rāmja šķēlumos atkarīgas no ārējās slodzes lieluma un izvietojuma, rāmja elementu ģeometrijas un pielietotā materiāla, bet nevar būt atkarīgas no aprēķinu metodes.

Piemērs 2.3. Noteikt iešējo piepūļu epīras att. 2. 19a dotajam rāmim.

Atrisinājums. Lai noteiktu rāmja statiskās nenoteicamības pakāpi izmantojam sakarību:

$$n = S_{atb} - 3 - L = 6 - 3 - 1 = 2.$$

Statiskās nenoteicamības pakāpi par divām vienībām samazinām pārgriežot rāmi pa locīklu, iegūstot att. 2.19b doto pamatsistēmu. Tā ir ģeometriski nemainīga, jo sastāv no divām neatkarīgām iespīlētām daļām. Liekie nezināmie X_1 un X_2 parādīti att. 2.19b. Tie pēc savas būtības ir šķērsspēki un asspēki locīklai D pieguļošajos stieņos. Veicot aprēķinu pēc spēku metodes, sistēma jāapskata divos vienībās un slodzes stāvoklī. Atbilstošās vienības un slodzes epīras dotas att. 2.19d,e,f.



att. 2.19

Lai noteiktu kanonisko vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases}$$

koeficientus, sareizinām atbilstošās epīras izmantojot Simpsona formulu:

$$\delta_{11} = \frac{4}{6 \cdot 2EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0) + \frac{6}{6EI} (4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4) = \frac{320}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{6}{6EI} (0 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6) = \frac{72}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{6}{6EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 3 \cdot 3) = \frac{81}{EI};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} = & -\frac{4}{6 \cdot 2EI} (4 \cdot 48 + 4 \cdot 12 \cdot 2 + 0) - \frac{3}{6EI} (4 \cdot 36 + 4 \cdot 4 \cdot 36 + 4 \cdot 36) - \\ & - \frac{3}{6EI} (4 \cdot 36 + 4 \cdot 4 \cdot 66 + 4 \cdot 96) = -\frac{1320}{EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{3}{6EI}(0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 36 + 3 \cdot 36) - \frac{3}{6EI}(3 \cdot 36 + 4 \cdot 4,5 \cdot 66 + 6 \cdot 96) = -\frac{1098}{EI}.$$

Ievietojam atrastās kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu vērtības kanoniskajos vienādojumos

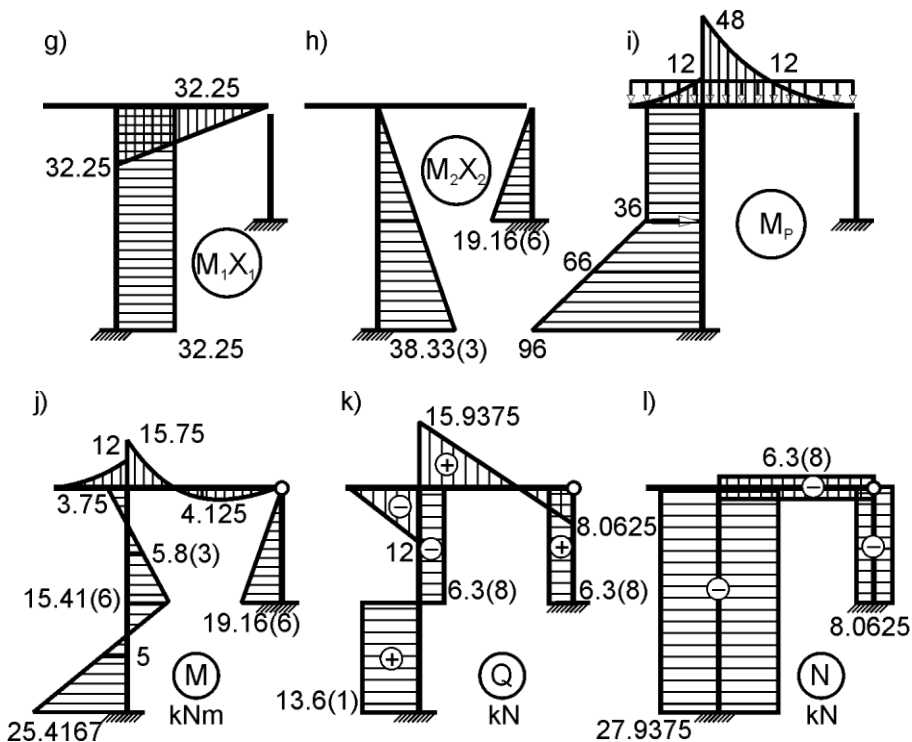
$$\begin{cases} \frac{320}{3} X_1 + 72 X_2 - 1320 = 0 \\ 72 X_1 + 81 X_2 - 1098 = 0 \end{cases}$$

un iegūstam lieko nezināmo skaitliskās vērtības

$$X_1 = 8,0625 \text{ kN}; \quad X_2 = 6,38(8) \text{ kN}.$$

Pēc iegūto lieko nezināmo vērtību pārbaudes, lieces momentu epīru statiski nenotecamajai sistēmai (att. 2.19j) iegūstam summējot vienības epīras, kas pareizinātas ar atrastajām X_1 un X_2 vērtībām (att. 2.19g,h) un slodzes epīru (att. 2.19i), atbilstoši sakarībai

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p.$$



att. 2.19g-l

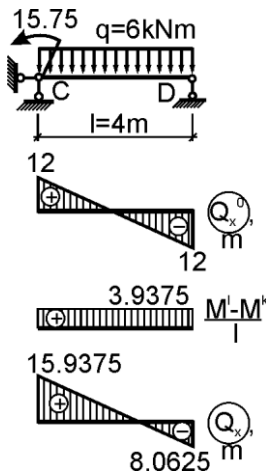
Pirmais kanoniskais vienādojums pieprasa, lai abu sistēmas daļu savstarpējais vertikālais pārvietojums punktā D būtu vienāds ar nulli, otrais pieprasa to pašu attiecībā uz horizontālo virzienu. Veicot kinemātisko pārbaudi atbilstoši sakarībai

$$M_S \cdot M = 0$$

pārlicināmies, ka abas šīs prasības ir izpildītas un līdz ar to iegūtā lieces momentu epūra ir pareiza:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{6EI} (-10 \cdot 25,4167 - 4 \cdot 8,5 \cdot 5 + 7 \cdot 15,41(6)) + \\ & + \frac{3}{6EI} (7 \cdot 15,41(6) + 4 \cdot 5,5 \cdot 5,8(3) - 4 \cdot 3,75) + \frac{4}{6 \cdot 2EI} (-4 \cdot 15,75 + \\ & + 4 \cdot 2 \cdot 4,125) + \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 9,58(3) + 3 \cdot 19,1(6)) = 0; \\ & \frac{240,5831}{EI} - \frac{240,5835}{EI} = 0; \\ & \frac{-0,0004}{EI} = 0; \end{aligned}$$

Objektīvāku aprēķina precizitātes novērtējumu iegūstam aprēķinot procentuālo atšķirību starp summārajām pozitīvo un negatīvo lielumu vērtībām



att. 2.20

$$\left| \frac{240,5831 - 240,5835}{240,5831} \right| \cdot 100 = 0,00016 \%$$

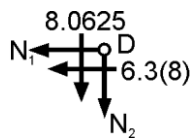
Šoreiz aprēķins ir veikts ļoti precīzi un varam konstruēt šķērsspēku Q epūru, izmantojot sakarību

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M^l - M^k}{l},$$

kur katrs sistēmas posms tiek apskatīts kā brīvi balstīta sija uz kuru darbojas ārējā slodze (dod epūru Q_x^0) un momenti posma galos M^k un M^l , kuru zīmes jāņem atbilstoši sijas zīmju likumam (stiepta apakšpuse – moments pozitīvs, stiepta

augšpuse - moments negatīvs. Kā piemērs apskatīts posms CD (att. 2.20). Q_x^0 ir epīra brīvi balstītai sijai no izkliedētās slodzes q . Pārbīde šoreiz ir pozitīvā virzienā par lielumu $(M^l - M^k)/l = (0 - (-15,75))/4 = 3,9375$. Izvēloties posmu robežas tā, ka tās sakrīt ar koncentrēto spēku pielikšanas punktiem, varam panākt, ka epīra Q_x^0 jākonstruē tikai posmiem kuros darbojas izkliedētā slodze. Piemēram, lai posmam AC nebūtu jākonstruē epīra Q_x^0 , sadalam to divās daļās. Abas daļas pagriežot pulksteņa rādītāja virzienā apakšējai daļai iegūstam $Q = (15,416 - (-25,416))/3 = 13,611$, analogi augšējai daļai $Q = (-3,75 - 15,416)/3 = -6,388$. Kopējā šķērsspēku epīra parādīta att. 2.19k.

Asspēku epīru konstruējam izgriežot sistēmas mezglus un apskatot to līdzsvaru. Katrā mezglā nedrīkst būt vairāk par diviem nezināmiem asspēkiem, jo katram mezglam mēs varam sastādīt tikai divus neatkarīgus projekciju vienādojumus. Izgriežot mezglus netiek ņemta vērā izkliedētā slodze, jo tiek pieņemts, ka griezumš tiek veikts bezgalīgi tuvu mezglam.

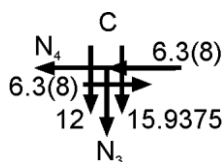


Kā pirmo izgriežam mezglu D. Nezināmos asspēkus atliekam virzienā no mezgla, pieņemot stieņus par stieptiem. Šķērsspēkus atliekam perpendikulāri stieņiem: pozitīvus šķērsspēkus pulksteņa rādītāja virzienā, negatīvus - pretēji pulksteņa rādītāja virzienam attiecībā pret mezglu. Sastādot projekciju vienādojumus

$$\sum X = N_1 + 6.3(8) = 0,$$

$$\sum Y = N_2 + 8.0625 = 0$$

iegūstam: $N_1 = -6.3(8)$ un $N_2 = -8.0625$. Tātad abi stieņi ir spiesti.

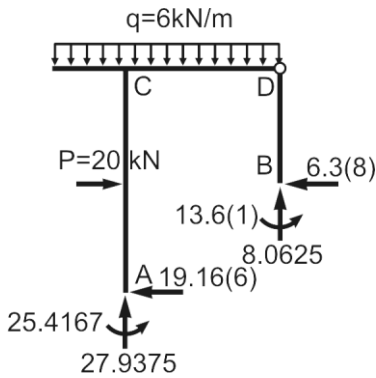


Mezglam C līdzīgā veidā no vienādojumiem

$$\sum X = N_4 + 6.3(8) - 6.3(8) = 0,$$

$$\sum Y = N_3 + 12 + 15.9375 = 0$$

iegūstam: $N_4 = 0$ un $N_3 = 27.9375$. Atbilstošā asspēku epīra parādīta att. 2.19l.



att. 2.21

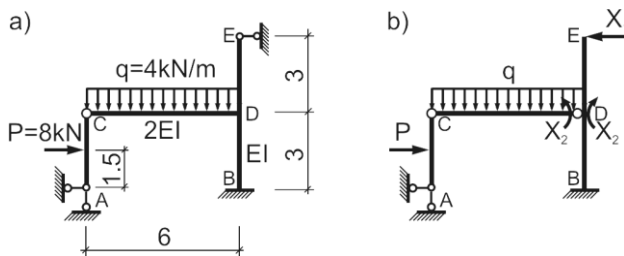
Lieces momentu epīrai ir veikta kinemātiskā pārbaude un varam uzskatīt, ka tā ir pareiza. Lai pārbaudītu šķērsspēku un asspēku epīru pareizību, veicam statisko pārbaudi: nošķēlam sistēmu pa balstiem un balstus aizstājam ar to reakcijām, kuru lielumus iegūstam no Q un M epīrām (att. 2.21). Reakcijas, kuru virzieni sakrīt ar stieņu virzieniem iegūstam no asspēku, bet reakcijas, kuru virzieni ir perpendikulāri stieņu virzieniem, no šķērsspēku epīras. Reakciju virzienus izvēlamies ņemot vērā iekšējo

piepūļu zīmes: pozitīvu šķērsspēku izsauc reakcija, kas darbojas pulksteņa rādītāja virzienā pret apskatāmo šķēlumu, asspēks ir pozitīvs, ja stienis ir stiepts.

Pārbaudei sastādām projekciju vienādojumus uz X un Y asīm:

$$\sum X = P - 6,3(8) - 19,1(6) = 0; \quad \sum Y = q \cdot 6 - 27.9375 - 8.0625 = 0.$$

Ja apskatāmajai sistēmai balstos pieliekam momentus, pārbaudei var tikt izmantoti arī momentu līdzsvara vienādojumi.



att. 2.22

Piemērs 2.4 Noteikt lieces momentu, šķērsspēku un asspēku epīras rāmim (att. 2.22a), kura rīģeļu lieces stingumi ir divas reizes lielāki kā statiem.

Atrisinājums. Veicot

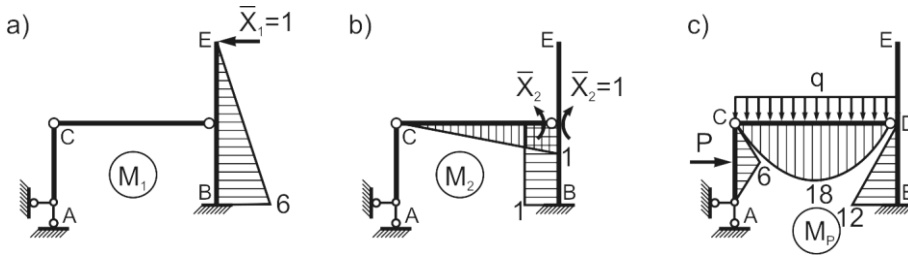
rāmja aprēķinu ņemam vērā, ka rāmis ir divas reizes statiski nenoteicams atbilstoši sakarībai

$$n = S_{atb} - 3 - L = 6 - 3 - 1 = 2.$$

Pamatsistēmu izvēlamies atmetot horizontālo saiti balstā E un ievēdot vienkāršu locīklu stingajā mezglā starp stieņiem CD un BE (att. 2.22b). Kanonisko vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

pirmais vienādojums novērš pārvietojumu punktam E horizontālā virzienā, otrais - stieņu CD un BE savstarpējo pagriezienu, līdz ar to nodrošinot dotās statiski nenoteicamās (att. 2.22a) un spēku metodes pamatsistēmas (att. 2.22b) identitāti attiecībā uz pārvietojumiem un iekšējām piepūlēm. Kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus iegūstam „sareizinot” att. 2.23 dotās vienības un slodzes epīras:



att. 2.23

$$\delta_{11} = \frac{6}{6EI} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{72}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{3}{6EI} (3 \cdot 1 + 4 \cdot 4.5 \cdot 1 + 6 \cdot 1) = -\frac{13.5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1) + \frac{3}{6EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{4}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{3}{6EI} (3 \cdot 0 + 4 \cdot 4.5 \cdot 6 + 6 \cdot 12) = -\frac{90}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 + 0) + \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 12) = \frac{36}{EI}.$$

Ievietojot koeficientu un brīvo locekļu vērtības kanonisko vienādojumu sistēmā

$$72X_1 - 13.5X_2 - 90 = 0,$$

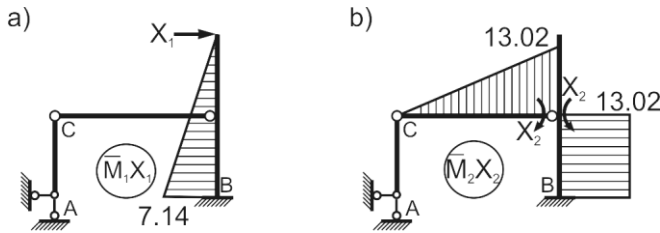
$$-13.5X_1 + 4X_2 + 36 = 0$$

un to atrisinot, iegūstam:

$$X_1 = -1.19 \text{ kN};$$

$$X_2 = -13.02 \text{ kNm}.$$

Tā kā iegūtās lieko nezināmo vērtības ir negatīvas, konstruējot epīras $\bar{M}_1 X_1$ un $\bar{M}_2 X_2$ ir jāmaina stieptā puse, tas ir, epīras jāveido stieņiem pretējā pusē visas vienī-

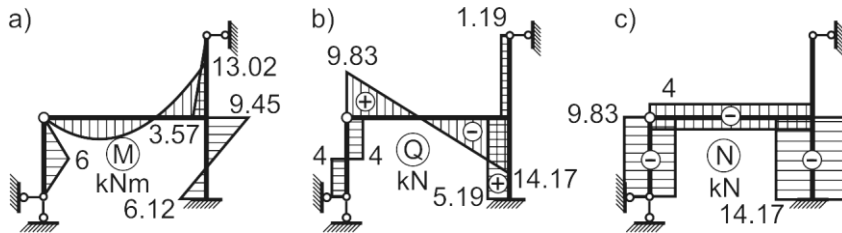


att. 2.24

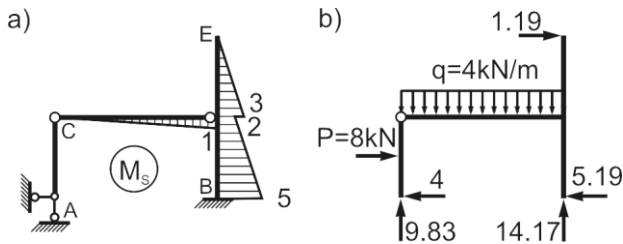
bas epīru ordinātes pareizi-
not ar iegūtajām X_1 un X_2
vērtībām (att. 2.24).

Lieces momentu epīru sta-
tiski nenoteicamajai sistē-
mai iegūstam saskaitot epī-
ras $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_2 X_2$ un M_p

(att. 2.23c) atbilstoši sakarībai $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p$ (att. 2.25a).



att. 2.25



att. 2.26

Lieces momentu epīrai M atbil-
stošās šķērsspēku Q un asspēku
N epīras dotas att. 2.25b,c.
Šķērsspēku Q epīra iegūta sa-
dalot rāmi posmos, katru pos-
mu pieņemot par brīvi balstītu
siju un tai pielietojot sakarību

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M^l - M^k}{l}. \text{ Asspēku epīra iegūta izgriežot mezglus un sastādot tiem līdz-}$$

svara nosacījumus. Aprēķinu pareizības pārbaudei izmantojam kinemātisko (lieces momentu epīru „sareizinām” ar summāro vienības epīru M_s (att. 2.26a))

$$\frac{6}{6 \cdot 2EI} (0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11,49 - 1 \cdot 13,02) - \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3,57}{2} + 3 \cdot 3,57) + \frac{3}{6EI} (2 \cdot 9,45 + 4 \cdot 3,5 \cdot 1,665 - 5 \cdot 6,12) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{32,595}{EI} - \frac{32,52}{EI} \stackrel{?}{=} 0 \quad (\text{kļūda } 0,23\%)$$

un statisko pārbaudi (atšķēlam sistēmu pa balstiem, balstu reakciju vērtības iegūstam no Q un N epīrām (att. 2.26b) un sastādam projekciju līdzsvara vienādojumus):

$$\sum X = P + 1,19 - 5,19 - 4 \stackrel{?}{=} 0;$$

$$\sum Y = q \cdot 6 - 9,83 - 14,17 \stackrel{?}{=} 0.$$

2.8. Nezināmo grupēšanas paņēmieni

Gadījumā, kad simetriskai sistēmai nav iespējams izvēlēties visus liekos nezināmos uz simetrijas ass, vai pa simetrijas asi iet stats, ir izdevīgi izmantot tā saucamo nezināmo grupēšanas paņēmieni, kas ļauj iegūt simetriskas un apgrieztas simetriskas vienības epīras.

Četras reizes statiski nenoteicamai sistēmai (att. 2.27.a) izvēloties simetrisku pamatsistēmu (att. 2.27.b), neviena no vienības epīrām nav ne simetriska ne arī apgrieztas simetriska un tādēļ neviens no koeficientiem un brīvajiem locekļiem nav vienāds ar nulli.

Izvēloties nezināmos tā, kā tas parādīts 2.27.c.att., pie nosacījumiem:

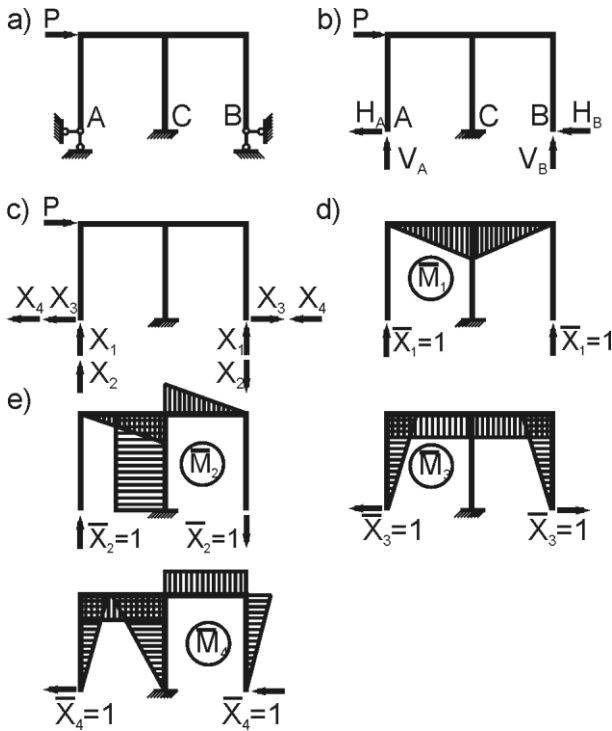
$$\mathbf{V}_A = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2; \quad \mathbf{V}_B = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2;$$

$$\mathbf{H}_A = \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4; \quad \mathbf{H}_B = \mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_4;$$

iegūstam simetrisku nezināmo grupu ($X_1; X_3$), kas dod simetriskas epīras ($\bar{M}_1, \bar{M}_3$) un apgrieztas simetrisku nezināmo grupu ($X_2; X_4$), kas dod apgrieztas simetriskas epīras ($\bar{M}_2, \bar{M}_4$). Tā kā simetrisku un apgrieztas simetrisku epīru reizinājumi ir nulle, tad

daudzi no kanonisko vienādojumu koeficientiem ir vienādi ar nulli:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{14} = \delta_{41} = \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{43} = 0.$$



att. 2.27

Četrus kanoniskos vienādojumus vietā iegūstam divas neatkarīgas divu vienādojumu sistēmas, no kurām pirmā satur simetriskos nezināmos X_1 un X_3 , bet otra apgriezti simetriskos nezināmos X_2 un X_4 :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{42}X_2 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases}$$

Darba apjoms pie šādas nezināmo izvēles ievērojami samazinājies.

2.9. Ārējās slodzes pārveidošanas paņēmieni

Lai pilnīgāk izmantotu simetrisku un apgriezti simetrisku epīru īpašības, bieži ir izdevīgi nesimetrisku slodzi, kas darbojas uz simetrisku sistēmu sadalīt divās slodzēs - simetriskā un apgriezti simetriskā. Šo slodžu kopiedarbībai uz sistēmu ir jābūt ekvivalentai ar doto slodzi.

Sistēmu rēķina neatkarīgi uz simetrisko un apgriezti simetrisko slodzi un iegūtos rezultātus summē (atbilstoši spēku darbības neatkarības principiem).

Simetriskam rāimim, kas dots att. 2.28.a, izvēlamies simetrisku pamatsistēmu (att. 2.28.b.). Tā kā pieliktā slodze nav ne simetriska, ne apgriezti simetriska, tad neviens no brīvajiem locekļiem Δ_{ip} nav vienāds ar nulli. Ar nulli vienādi koeficienti δ_{12} , δ_{21} , δ_{13} ,

δ_{31} , ko iegūst, sareizinot epīras no simetriskajiem (X_2, X_3) un apgriezti simetriskajiem (X_1) nezināmajiem. Kanonisko vienādojumu sistēma šajā gadījumā ir sekojoša:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

att. 2.28

Sadalām ārējo slodzi simetriskā (att. 2.28.c) un apgriezti simetriskā (att. 2.28.d) un rēķinām sistēmu neatkarīgi katrai no slodzēm. Tā kā simetriskā slodze dod simetrisku, bet apgriezti simetriskā slodze apgriezti simetrisku epīru, tad brīvie locekļi, ko iegūst, sareizinot simetriskas un apgriezti simetriskas epīras Δ'_{1p} , Δ''_{2p} un Δ''_{3p} ir vienādi ar nulli. Iegūstam divas kanonisko vienādojumu sistēmas:

simetriskai slodzei

$$\begin{cases} \delta_{11}X'_1 = 0 \\ \delta_{22}X'_2 + \delta_{23}X'_3 + \Delta'_{2P} = 0 \\ \delta_{32}X'_2 + \delta_{33}X'_3 + \Delta'_{3P} = 0, \end{cases}$$

apgriezti simetriskai slodzei

$$\begin{cases} \delta_{11}X''_1 + \Delta'_{1P} = 0 \\ \delta_{22}X''_2 + \delta_{23}X''_3 = 0 \\ \delta_{32}X''_2 + \delta_{33}X''_3 = 0, \end{cases}$$

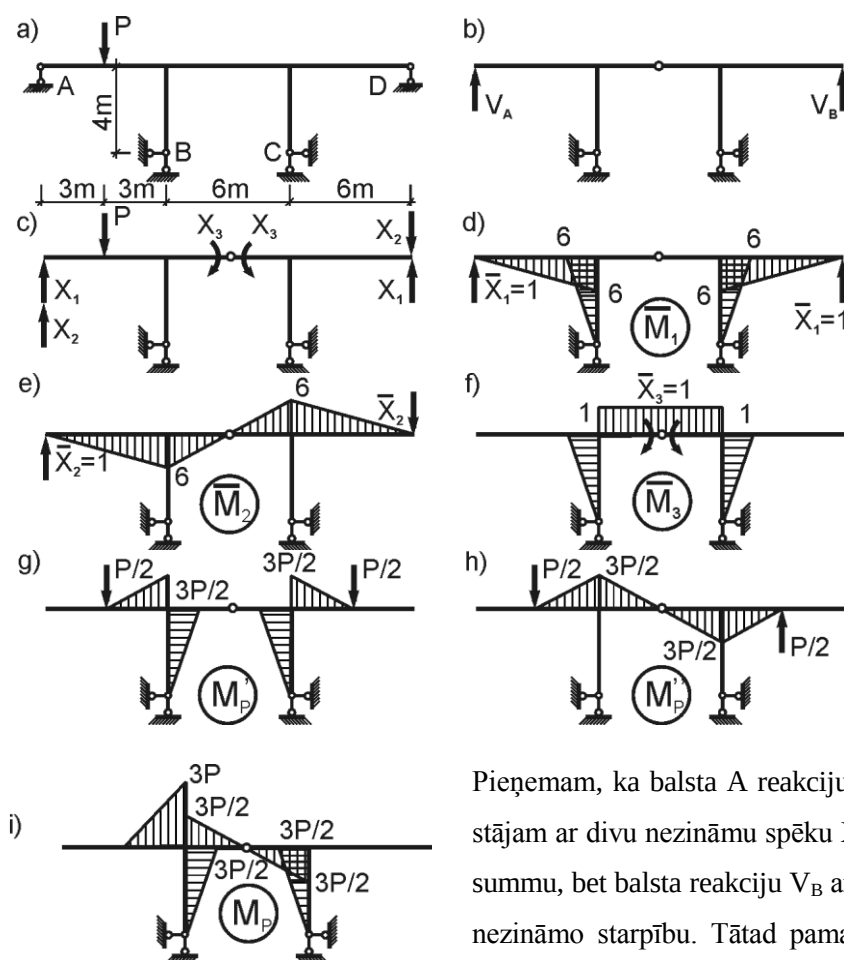
no kurām seko: $X'_1 = 0$, $X''_2 = 0$ un $X''_3 = 0$.

Tātad rēķinot simetrisku sistēmu uz simetrisku slodzi, apgriezti simetriskie nezināmie ir vienādi ar nulli, bet rēķinot simetrisku sistēmu uz apgriezti simetrisku slodzi, simetriskie nezināmie ir vienādi ar nulli.

Galīgās piepūļu vērtības iegūst summējot rezultātus no simetriskās un apgriezti simetriskās slodzes.

Piemērs 2.5 Noteikt lieces momentu, šķērsspēku un ass spēku epīras rāmim (att. 2.29a), kura rīģeļu lieces stingumi ir divas reizes lielāki kā statiem.

Atrisinājums. Veicot rāmja aprēķinu ņemam vērā, ka rāmis ir simetrisks kā ģeometriski, tā arī no stieņu lieces stingumu viedokļa. Tā kā rāmis ir trīs reizes statiski nenoteicams, tad lietderīgi izvēlēties simetrisku pamatsistēmu (att. 2.29b) trīslocīklu rāmja veidā. Lai iegūtu aprēķiniem ērtas vienības epīras (simetriskas un apgriezti simetriskas) izdevīgi izmantot nezināmo grupēšanas paņēmieni.



att. 2.29

Pieņemam, ka balsta A reakciju V_A aizstājam ar divu nezināmu spēku X_1 un X_2 summu, bet balsta reakciju V_B ar šo pašu nezināmo starpību. Tātad pamatsistēma tiek slogota att. 2.29c parādītā veidā, pie kam X_1 un X_3 veido simetriskus slogojumus, bet X_2 apgriezti simetrisku slogojumu. Tā rezultātā iegūstam simetriskas vienības epīras $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_3$ un apgriezti simetrisku vienības epīru $\bar{M}_2$ (att. 2.29d, e, f).

Tā rezultātā iegūstam simetriskas vienības epīras $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_3$ un apgriezti simetrisku vienības epīru $\bar{M}_2$ (att. 2.29d, e, f).

Attiecībā uz ārējo slodzi P , konstatējam, ka tā ir nesimetriska un tārad rada pamatsistēmā nesimetrisku lieces momentu epīru. Lai to novērstu, var izmantot ārējās slodzes sadalīšanas paņēmieni divās slodzēs, no kurām viena būtu simetriska, bet otra apgriezti simetriska.

Šāds slodzes sadalījums un tam atbilstošās lieces momentu epīras parādītas att. 2.29g, h. Līdz ar to piemēra nosacījumos izvirzītais uzdevums sadalās divos neatkarīgos uzdevumos - simetriskam un apgriezti simetriskam slogojumam. Abu šo uzdevumu atrisinājumu rezultātu summa arī ir sākotnējā uzdevuma atrisinājums.

Izmantojot slodzes sadalījuma paņēmieni esam divas reizes palielinājuši darba apjomu, jo jāatrisina divas neatkarīgas kanonisko vienādojumu sistēmas (vispārīgā gadījumā 3 vienādojumi). Tomēr ņemot vērā, ka simetriskas un nesimetriskas epīras reizinājums ir vienāds ar nulli, varam secināt, ka šīs vienādojumu sistēmas deģenerējas vienkāršākās sistēmās, jo vairāki sākotnējās sistēmas koeficienti ir vienādi ar nulli.

Izmantojot Simpsona formulu, iegūstam sekojošas vienības un slodzes pārvietojumu vērtības:

$$\delta_{11} = 2 \left[\frac{1}{2EI} \frac{6}{6} (4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{1}{EI} \frac{4}{6} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 3) \right] = \frac{168}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left[2 \frac{6}{6} (4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) + \frac{6}{6} (6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) \right] = \frac{108}{EI};$$

$$\delta_{33} = 2 \cdot \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1) + \frac{1}{2EI} \frac{6}{6} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \right] = \frac{17}{3EI}$$

$$\delta_{12} = 0; \quad \delta_{13} = 2 \frac{1}{EI} \frac{4}{6} (6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 0,5) = \frac{16}{EI}; \quad \delta_{23} = 0;$$

$$\Delta'_{1P} = -2 \left[\frac{1}{2EI} \cdot \frac{3}{6} (6 \cdot 1,5P + 4 \cdot 0,75 \cdot 3P) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4}{6} (6 \cdot 1,5P + 4 \cdot 3 \cdot 0,75P) \right] = -\frac{35,25P}{EI};$$

$$\Delta'_{2P} = 0; \quad \Delta'_{3P} = -2 \left[\frac{1}{EI} \cdot \frac{4}{6} (1,5 \cdot 1P + 4 \cdot 0,75 \cdot 0,5P) \right] = -\frac{4P}{EI}; \quad \Delta''_{1P} = 0;$$

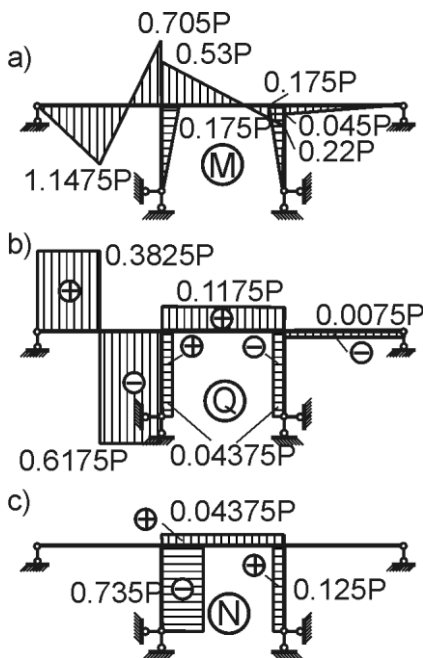
$$\Delta_{2P}'' = -\frac{1}{2EI} \left[2 \cdot \frac{3}{6} (4 \cdot 4,5 \cdot 0,75P + 6 \cdot 1,5P) + \frac{6}{6} (1,5 \cdot 6P + 1,5 \cdot 6P) \right] = -\frac{20,25P}{EI};$$

$$\Delta_{3P}'' = 0.$$

Tātad jāatrisina sekojošas kanonisko vienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} 168X_1 + 16X_3 = 35,25P \\ 16X_1 + 5,67X_3 = 4P \\ 108X_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 168X_1 + 16X_3 = 0 \\ 108X_2 = 20,25P \\ 16X_1 + 5,67X_3 = 0 \end{cases}$$

No pirmās vienādojumu sistēmas nosakām nezināmo X_1 un X_3 vērtības. Tās ir $X_1 = 0,195P$ un $X_3 = 0,155P$. No otrās vienādojumu sistēmas nosakām $X_2 = 0,1875P$.



att. 2.30

Izmantojot sakarību

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + X_3 \bar{M}_3,$$

kur

$$M_P = M'_P + M''_P,$$

konstruējam lieces momentu epīru dotajam rā-
mim (att. 2.30a).

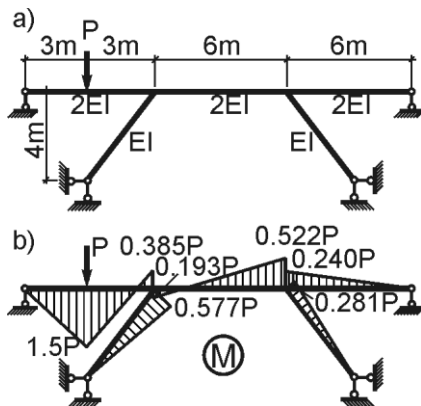
Atbilstoši sakarībai

$$Q = Q_0 - \frac{M_l - M_{kr}}{l},$$

iegūstam šķērsspēku epīru, kura parādīta att.
2.30b.

Ass spēku epīras konstruēšanai izmantojam
mezglu izgriešanas paņēmieni, sastādot piepūļu

līdzsvara vienādojumus izgrieztajā mezglā. Tā rezultātā iegūstam epīru (att. 2.30c). Par epīru pareizību varam pārliecināties veicot iegūtās lieces momentu M epīras reizināšanu ar vienības epīrām (vai to summu) un sastādot līdzsvara vienādojumus pa balstiem atšķeltā rāmja šķērsspēku un asspēku epīrām (ieteicams veikt studentam).



att. 2.31

Studentam tiek ieteikts veikt analoģu aprēķinu dotajam rāim citu (brīvi izvēlētu) slodžu gadījumos, kā arī rāim ar izmainītiem ģeometriskiem parametriem.

Interesi izraisa rāmj, kuru statī ir slīpi orientēti pret horizontu (att. 2.31a). Studenta uzdevums ir izvērtēt, kā statu slīpums un attālums no centra iespaido lieces momentu maksimālo vērtību. Viena konkrēta rāmja varianta gadījumā lieces momenta epīra M parādīta att. 2.31b.

2.10. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles

Izmainoties temperatūrai, statiski nenoteicamu stieņu sistēmu elementos rodas piepūles. Pielietojot spēku metodi doto sistēmu reducējam uz citu – parasti statiski noteicamu sistēmu uz kuru iedarbojas dotās sistēmas slogojums un atmesto saišu reakcijas. Dotajā gadījumā par sistēmas slogojumu jāuzskata temperatūras izmaiņa. Tātad kanonisko vienādojumu brīvie locekļi Δ_{it} ir temperatūras izmaiņas izraisītie pārvietojumi pamatsistēmā.

Vienmērīgas sasilšanas (atdzišanas) gadījumā pamatsistēmas stieņos rodas relatīvs pagarinājums (saīsinājums)

$$\varepsilon_t = (t - t_0) \alpha,$$

kur t_0 stieņa sākotnējā temperatūra konstrukcijas izgatavošanas brīdī; α - materiāla lineārās termiskās izplešanās koeficients.

Atšķirīgas temperatūras gadījumā stieņu ārējā un iekšējā pusē notiek stieņa ass termiskā izliekšanās. Tās lielumu nosaka sakarība

$$\varepsilon_t = \left(\frac{t_{iek} - t_{ār}}{h} \right) \alpha,$$

kur h – stieņa šķērsriezuma augstums, t_{iek} , $t_{ār}$ – temperatūras atbilstoši stieņa iekšpusē un ārpusē.

Lineārās izplešanās koeficienti tradicionāliem būvmateriāliem praktiski maz atšķiras. Tā metāliem $\alpha_{\text{met}} = 11,8 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$, bet betonam uz cementa bāzes un dzelzsbetonam $\alpha_{\text{bet}} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$.

Stieņa ass temperatūru nosaka lineāra sakarība

$$t = t_{\bar{a}r} + \left(\frac{t_{iek} - t_{\bar{a}r}}{h} \right) y,$$

kur y – attālums no stieņa ass līdz stieņa ārmalai.

Šī temperatūras vērtība nosaka stieņa lineāro izmēru izmaiņu.

Termiskais pagarinājums un izliece pilnībā realizējas tikai statiski noteicamās sistēmās. Statiski nenoteicamās sistēmās tos daļēji dzēš termisko spriegumu radītās elastīgās deformācijas.

Termiskie spriegumi veido sistēmas pašuzspriegtu stāvokli. Šos spriegumus ērti noteikt veicot sistēmas aprēķinu ar spēku metodi.

Zinot temperatūras izraisītās atsevišķu stieņu aksiālās deformācijas ε_i un liekumus α_i statiski noteicamā pamatsistēmā, pārvietojumus atmesto saišu virzienos nosaka Mora formula:

$$\Delta_{it} = \sum_0^{l_i} \overline{M}_i \alpha_i dx + \sum_0^{l_i} \overline{N}_i \varepsilon_i dx, \quad (2.3)$$

kur $\overline{M}_i, \overline{N}_i$ - i -tās atmestās saites virzienā pieliktās vienības slodzes izraisītie lieces momenti un ass spēki pamatsistēmas stieņos.

Bieži vien izteiksmes (2.3) otro saskaitāmo var atmest kā relatīvi mazu lielumu salīdzinot ar pirmo saskaitāmo.

Ar sakarībām (2.3) noteiktie pārvietojumi ir spēku metodes kanonisko vienādojumu brīvie locekļi. Atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\sum_j \delta_{ij} X_j + \Delta_{it} = 0$$

(i, j mainās no 1 līdz n ; n – lieko saišu skaits), nosakām piepūles X_i atmestajās saitēs.

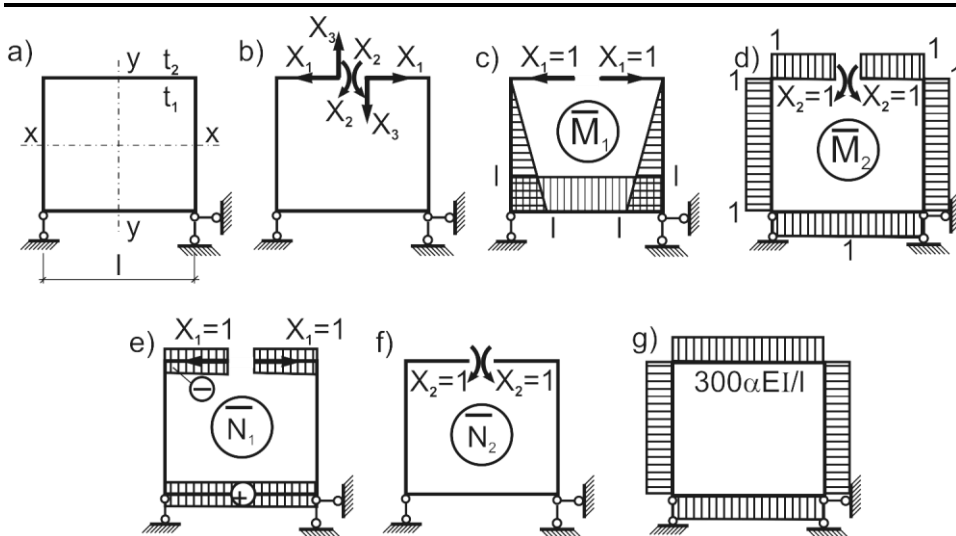
Šīs piepūles arī izraisa temperatūras spriegumus stieņu sistēmā.

Temperatūru izmaiņas radīto lieces momentu epīru nosaka sakarība

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n. \quad (2.4)$$

Analogi temperatūras aprēķiniem var veikt aprēķinus betona rukuma gadījumā. Šai gadījumā kanonisko vienādojumu brīvie locekļi Δ_{ir} ir pārvietojumi pamatsistēmā nevis no temperatūras izmaiņas, bet gan no betona rukuma. No ģeometriskā viedokļa rukums līdzīgi kā temperatūra izmaina stieņu izmērus.

Piemērs 2.6. Noteikt lieces momentu epīru, četrstūrī (att. 2.32), kura iekšējā temperatūra izmainījusies par $+20^\circ\text{C}$, bet ārējā par -10°C . Visu stieņu lieces stingumi vienādi. Stieņa šķērsgriezuma augstums $0,1l$.



att. 2.32

Atrisinājums. Stieņu sistēmai ir divas simetrijas asis, tā ir trīs reizes statiski nenoteicama sistēma. Pamatsistēmu izvēlamies atbilstoši att. 2.32b. Divi no nezināmajiem X_1 un X_2 ir *simetriski* attiecībā pret y asi, bet trešais nezināmais X_3 – *antisimetrisk*s. Temperatūras iedarbība kopumā ir simetriska pret abām simetrijas asīm. Līdz ar to antisimetriskais nezināmais X_3 ir vienāds ar nulli un atliek noteikt vairs tikai abus pārējos nezināmos X_1 un X_2 .

Vienības epīras $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_2$, kā arī $\bar{N}_1$ un $\bar{N}_2$ parādītas att. 2.32c, d, e, f.

Izmantojot šīs vienības epīras, nosakām kanonisko vienādojumu koeficientus

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[2 \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right] = \frac{5l^3}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} [4 \cdot (l \cdot 1 \cdot 1)] = \frac{4l}{EI};$$

$$\delta_{12} = \frac{-1}{EI} \left[2 \left(\frac{l \cdot l}{2} \cdot 1 \right) + l \cdot l \cdot 1 \right] = -\frac{2l^2}{EI}.$$

Temperatūru starpība katram stienim ir $\Delta t = 20 - (-10) = 30^\circ\text{C}$, bet vidējā temperatūra $t_v = (20 - 10) / 2 = 5^\circ\text{C}$. Stieņu biezumi $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0,1l$.

Atbilstoši formulai (2.3)

$$\Delta_{1t} = 2 \frac{\alpha \cdot 30}{0,1l} \cdot \frac{l \cdot l}{2} + \frac{\alpha \cdot 30}{0,1l} \cdot l \cdot l = 300\alpha l + 300\alpha l = 600\alpha \cdot l,$$

$$\Delta_{2t} = -4 \frac{\alpha \cdot 30}{0,1l} \cdot l \cdot 1 = -1200\alpha.$$

Pārvietojumu Δ_{1t} un Δ_{2t} zīmes noteiktas salīdzinot deformācijas, kuras rodas no nezināmo vienības slodzēm un no temperatūras.

Kanoniskie vienādojumi ir:

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \frac{l^3}{EI} X_1 - 2 \frac{l^2}{EI} X_2 + 600\alpha l &= 0, \\ -2 \frac{l^2}{EI} X_1 + 4 \frac{l}{EI} X_2 - 1200\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Tos atrisinot iegūstam

$$X_1 = 0, \quad X_2 = \frac{300\alpha EI}{l}.$$

Lieces momentu epīra $M_t = \bar{M}_2 X_2$ parādīta att. 2.32g.

Iegūtās lieces momentu epīras pārbaudei nevar tikt izmantots agrāk pielietotais paņēmiens sareizinot galīgo epīru ar kādu no vienības epīrām, jo šī sakarība nav vienāda ar nulli:

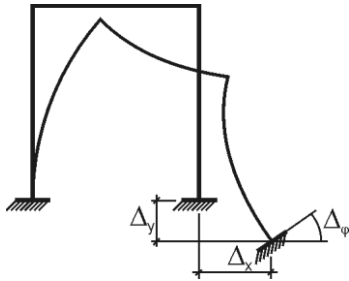
$$\sum \int \frac{M_i \cdot M_i}{EI} dx \neq 0.$$

Šādas sareizināšanas rezultāts attiecas tikai uz kanonisko vienādojumu daļu, kura satur nezināmos $X_1, X_2 \dots X_n$. Kanoniskie vienādojumi satur arī pārvietojumus Δ_{it} , tādēļ

$$\sum \int \frac{M_i \cdot \bar{M}_i}{EI} dx = -\Delta_{it}.$$

Šī sakarība tad arī var tikt izmantota temperatūru izmaiņas radītās lieces momentu epīras M_t pārbaudei.

2.11. Balstu pārvietojumu radītās piepūles



att. 2.33

Iepriekšējos aprēķinos tika izmantots pieņēmums, ka būvdarīnājuma balstu nostiprinājums sistēmas deformēšanās procesā paliek nemainīgs. Patiesībā projektētājam jāaprēķinās ar iespēju balstiem nosēsties vai pārvietoties kādā no virzieniem. Tādu pārvietojumu piemērs parādīts att. 2.33. Rāmja labais balsts ir nosēdies par lielumu Δ_y , pārbīdījies pa labi par lielumu Δ_x un pagriezies par lielumu Δ_φ . Šo pārvietojumu rezultātā

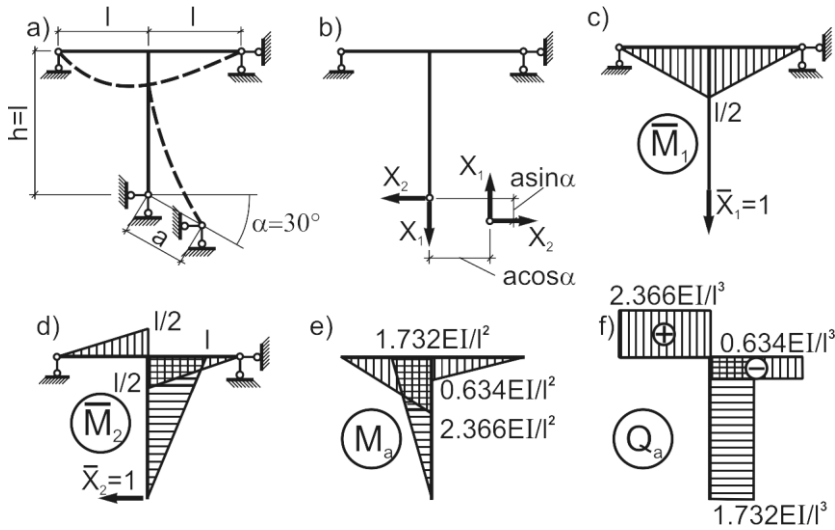
rāmis deformējas un tādēļ jāveic rāmja piepūļu aprēķins attiecībā pret balstu pārvietojumu.

Šādā gadījumā kanoniskiem vienādojumiem ir sekojošs veids:

$$\sum_j \delta_{ij} X_j + \Delta_{i\Delta} = 0,$$

kur brīvie locekļi Δ_{ib} ir pārvietojumi lieko nezināmo virzienos no visas balstu pārvietojumu grupas ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_\varphi$).

Piemērs 2.7. Veiksim lieces momentu un šķērsspēku epīru konstruēšanu att. 2.34a dotajai sistēmai. Vidējā stata balsts pārvietojies par lielumu a līnijas virzienā, kura orientēta 30° leņķī pret horizontu.



att. 2.34

Atrisinājums. Pamatsistēma parādīta att. 2.34b, bet vienības epīras att. 2.34c,d. Izmantotjot Vereščagina principu no epīrām $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ nosakām, ka (pieņemot, ka visu stieņu stingumi vienādi)

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) \right] = \frac{l^3}{6EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) + \frac{l \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{l^3}{2EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0.$$

Pārvietojumi nezināmo X_1 un X_2 virzienos no pārvietojuma **a** ir

$$\Delta_{1a} = -a \sin \alpha = -\frac{a}{2}; \quad \Delta_{2a} = -a \cos \alpha = 0,866 \cdot a.$$

Kanonisko vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} \frac{l^3}{6EI} X_1 - \frac{a}{2} = 0, \\ \frac{l^3}{2EI} X_2 + 0,866a = 0 \end{cases}$$

atrisinājums ir

$$X_1 = \frac{3EIa}{l^3};$$

$$X_2 = \frac{-1,732EIa}{l^3}.$$

Balsta pārvietojuma rezultātā rāmī rodas lieces momenti atbilstoši sakarībai

$$M_a = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2,$$

kuru epīra parādīta att. 2.34e. Atbilstošā šķērsspēku epīra parādīta att. 2.34f.

Lieces momenta M_a epīras reizinājums ar vienības epīrām $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_2$ atbilstoši būs Δ_{1a} un Δ_{2a} . Tiešām

$$\sum \int \frac{M_a \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{2,366EI \cdot a \cdot l}{2EI \cdot l^2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) + \frac{0,634EI \cdot a \cdot l}{2EI \cdot l^2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = \frac{a}{2} = -\Delta_{1a};$$

$$\sum \int \frac{M_a \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = -0,866 \cdot a = -\Delta_{2a}.$$

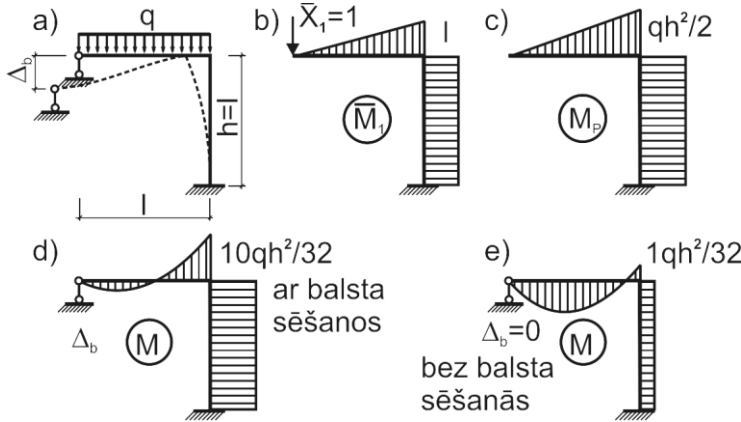
Piemērs 2.8 Noteikt lieko nezināmo un uzkonstruēt lieces momentu epīru rāmim (att.2.35a) divos variantos: kreisā balsta iegrimes gadījumā par lielumu

$\Delta_b = -\frac{3qh^4}{8EI}$ (neatkarīgi no pieliktās slodzes lieluma) un bez balstu sēšanās. Stata un rīģeļa garumi vienādi. To šķērsgrīzumu laukumi vienādi un konstanti visā garumā.

Atrisinājums. Par lieko nezināmo X_1 izvēlamies kustīgā balsta reakciju. Risinot pirmo variantu, kanoniskais vienādojums, kurš izsaka pārvietojumu kustīgajā balstā, ir vienāds ar $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = \Delta_b$. Pārvietojums pamatsistēmā rodas gan no X_1 , gan no ārējās slodzes, bet kopējo pārvietojumu nosaka balsta sēšanās.

Atrisinot kanonisko vienādojumu, iegūstam

$$X_1 = \frac{\Delta_b - \Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$



att.2.35

Izmantojot vienības un ārējās slodzes izraisītās lieces momentu epīras (att. 2.35b, c), iegūstam sekojošas pārvietojumu vērtības

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{8} \frac{qh^4}{EI};$$

$$\delta_{11} = \frac{4}{3} \frac{h^3}{EI},$$

kas dod

$$X_1 = \frac{3}{16} qh.$$

Gadījumā, ja balsta sēšanās nenotiek, kustīgā balsta reakcija ir 2,5 reizes lielāka:

$$X_1 = \frac{15}{32} qh.$$

Atbilstošas lieces momentu epīras parādītas att. 2.35d (gadījumam ar balstu sēšanos) un att. 2.35e (gadījumam bez balsta sēšanās).

Pirmajā gadījumā lieces momentu vērtība rīģeļa un stata savienojuma punktā ir 10 reizes lielāka.

2.12. Pārvietojumu noteikšana statiski nenoteicamā sistēmā

Analogi kā statiski noteicamās sistēmās, pārvietojumi arī statiski nenoteicamās sistēmās nosakāmi ar Maksvela – Mora formulām.

Ārējās slodzes rezultātā patvaļīgā šķēlumā **k** pārvietojumu nosaka sakarība

$$\Delta_{kP} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M}{EI} dx + \sum \int \frac{\bar{N}_k N}{EF} dx + \mu \sum \int \frac{\bar{Q}_k Q}{GF} dx \quad (2.5)$$

Svarīgi ņemt vērā, ka piepūles **M**, **N**, **Q** ir ārējās slodzes radītās piepūles dotajā stieņu sistēmā, tātad statiski nenoteicamā sistēmā. To noteikšanai jāveic aprēķins ar kādu no

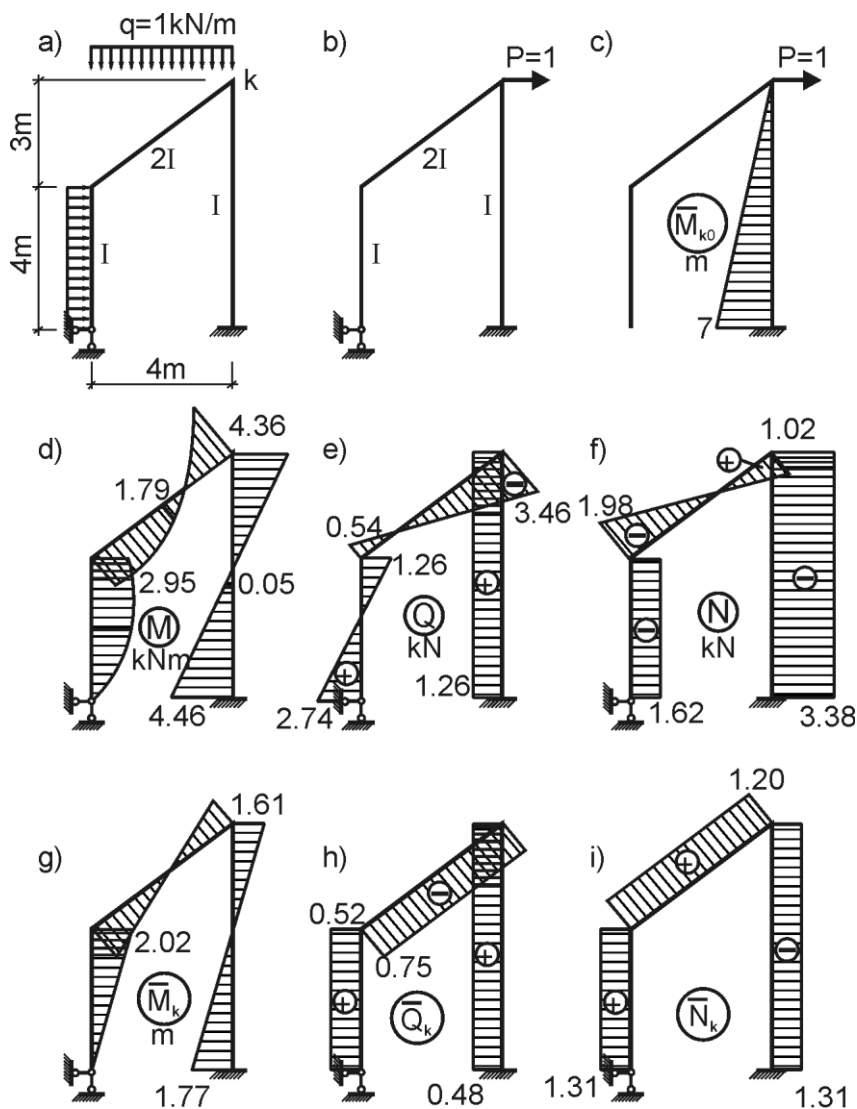
statiski nenoteicamu sistēmu aprēķinu metodēm, piem., spēku metodi. Piepūles $\overline{M}_k, \overline{N}_k$ un $\overline{Q}_k$ iegūstam slogojot doto sistēmu (tātad atkal statiski nenoteicamu) šķēlumā k ar vienības slodzi nosakāmā pārvietojuma virzienā. Tātad piepūļu $M, N, Q, \overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$ noteikšanai nepieciešams divas reizes neatkarīgi veikt piepūļu aprēķinu statiski nenoteicamai sistēmai. Analītiskā veidā tas saistīts ar lielu aprēķinu apjomu. Lai no tā izvairītos ir lietderīgi ņemt vērā, ka ar ārēju slodzi slogotas statiski nenoteicamas sistēmas piepūļu aprēķins ir ekvivalents statiski noteicamas sistēmas (spēka metodes pamatsistēmas) aprēķinam pie tās pašas ārējas slodzes, kura papildināta ar lieko saišu reakcijām ($X_1, X_2 \dots X_n$). Līdz ar to gadījumā, ja ir noteiktas statiski nenoteicamas sistēmas piepūles, šo sistēmu varam reducēt uz jebkuru tās pamatsistēmu, kura ir statiski noteicama un aprēķināt attiecīgo pārvietojumu tieši šai sistēmā. Tātad Mora integrālī nepieciešamās vienības epīras var tikt konstruētas slogojot ar vienības slodzi izvēlēto statiski noteicamo sistēmu. Tā rezultātā iegūstam vienības epīras $\overline{M}_{0k}, \overline{N}_{0k}, \overline{Q}_{0k}$ (indekss 0 norāda uz to, ka epīras konstruētas kādā no pamatsistēmām). Noteikt piepūles statiski noteicamā sistēmā ir mazāk darbietilpīgs process kā tās noteikt statiski nenoteicamā sistēmā. Tādēļ pārvietojumu aprēķināšanai statiski nenoteicamām sistēmām tiek rekomendēta sakarība:

$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{\overline{M}_{0k} M}{EI} dx + \sum \int \frac{\overline{N}_{0k} N}{EF} dx + \mu \sum \int \frac{\overline{Q}_{0k} Q}{GF} dx \quad (2.6)$$

Svarīgi ņemt vērā, ka par statiski noteicamo sistēmu var tikt izmantota jebkura dotās sistēmas pamatsistēma, kura ērtāka attiecīgajam vienības stāvoklim.

Piemērs 2.9 Noteikt punkta k horizontālo pārvietojumu rāmim, kurš dots att. 2.36.

Atrisinājums. Sistēma ir divas reizes statiski nenoteicama. Nosakot pārvietojumu Δ_k^h ar sakarību (2.5) ir jāveic att. 2.36a dotās statiski nenoteicamās sistēmas aprēķins divas reizes: pie slodzes, kura uzdota att. 2.36a un horizontālā vienības spēka $P_k = 1$ punktā k (att. 2.36b). Tā rezultātā iegūstam piepūļu epīras, kuras parādītas att. 2.36d - i. (detalizēts aprēķins netiek dots).



att. 2.36

Aprobežosimies tikai ar to pārvietojuma daļu, kuru rada stieņu liece. Tātad

$$\Delta_k^h = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{EI_i} \int_0^{l_i} M \cdot \bar{M}_k dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{4}{6} (2.95 \cdot 2.02 + 4 \cdot 3.47 \cdot 1.01) + \right. \\ \left. + \frac{5}{2 \cdot 6} (2.95 \cdot 2.02 + 4 \cdot 1.79 \cdot 0.21 + 4.36 \cdot 1.61) + \right. \quad (2.7)$$

$$+ \frac{7}{6} (4.36 \cdot 1.61 + 4 \cdot 0.05 \cdot 0.08 + 4.46 \cdot 1.77) \Big] = \frac{36.67}{EI}.$$

Lai izmantotu sakarību (2.6), jānosaka lieces momenta epūra no vienības slodzes kādā no pamatsistēmām. Izvēlamies statiski noteicamu sistēmu, kura parādīta att. 2.36c. Pārvietojuma noteikšanai nepieciešamā vienības lieces momenta epūra $\overline{M}_{0k}$ arī parādīta att. 2.36c.

Sareizinot (izmantojot Simpsona formulu) M (att. 2.36d) un epūru $\overline{M}_{0k}$ (att. 2.36c) iegūstam

$$\Delta_k^h = \frac{1}{EI} \int_0^7 M \cdot \overline{M}_{0k} dx = \frac{7}{6EI} (4.36 \cdot 0 + 4 \cdot 0.05 \cdot 3.5 + 4.46 \cdot 7) = \frac{37.24}{EI}. \quad (2.8)$$

Izvēloties konkrētus stieņu šķēsgriezuma profilus varam noteikt konkrētas pārvietojumu vērtības. Tā, piem., statiem, kuri izgatavoti no tērauda profila **INP200** atbilstošais inerces moments ir $I=2140\text{cm}^4=0,214 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, bet rīģelim, kas izgatavots no tērauda profila **INP240** tas ir $I=4250\text{cm}^4=0,425 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$. Praktiski inerces momentu attiecība ir 2. Stieņu elastības modulis $E=210 \text{ GPa}$.

Atbilstoši sakarībām (2.7) un (2.8) iegūstam pārvietojumu vērtības $(\Delta_k^h)_1 = 0,818 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 8,18 \text{ mm}$ un $(\Delta_k^h)_2 = 0,829 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 8,29 \text{ mm}$. Atšķirību aprēķinu rezultātos, kura sastāda 1,26%, var izskaidrot ar aritmētisko darbību rezultātu noapaļojumiem un uzskatīt par nebūtisku. Veicot rāmja aprēķinu ar skaitlisko metodi programmā Analysis noteiktais punkta k horizontālais pārvietojums ir $(\Delta_k^h)_3 = 0,833 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 8,33 \text{ mm}$.

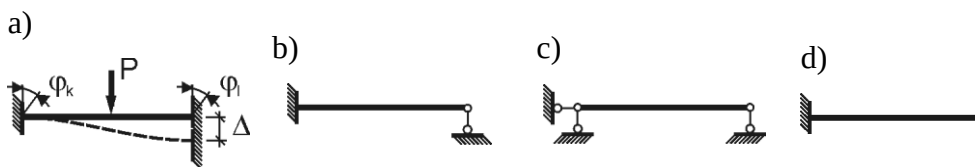
3. STATISKI NENOTEICAMU RĀMJU APRĒĶINS AR PĀR- VIETOJUMU METODI

Daudzos gadījumos rāmju un siju aplēse ar spēku metodi ir neracionāla lielas sistēmas statiskās nenoteicamības pakāpes dēļ. Šādos gadījumos dažreiz lietderīgi lietot citu - pārvietojumu metodi. Pārvietojumu metodē, atšķirībā no spēku metodes, tiek ievestas papildus lineārās saites un iespīlējumi sistēmas stingajos mezglos, lai panāktu stāvokli, ka sistēma sastāv no tipveida elementiem (att. 3.1) un katrs sistēmas elements ir neatkarīgs no citiem.

Pārvietojumu metodē par nezināmajiem pieņem kinemātiskus lielumus – ievesto *stingo mezglu pagriezienu leņķus* un ievesto *saišu lineāros pārvietojumus*.

Vispārīgā gadījumā rāmi var iztēloties kā sistēmu, kura sastāv no atsevišķiem taisniem galos dažādi nostiprinātiem stieņiem ar nemainīgu šķērsriezuma laukumu.

Sistēmas atsevišķam stienim, zinot tā galu pagriezienu leņķus un lineāros pārvietojumus stieņa asij perpendikulārā virzienā, var noteikt lieces momentu epīru un līdz ar to arī šķērsspēku un asspēku epīras.

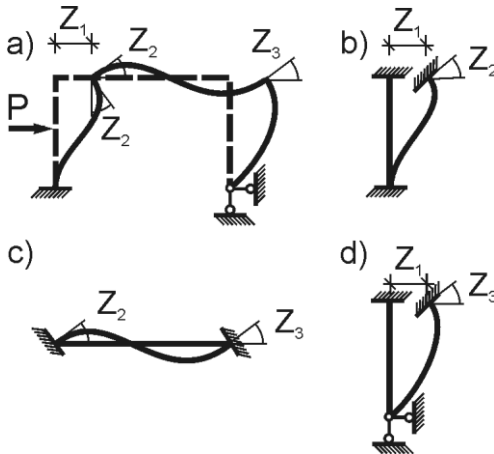


att. 3.1

Tā, piemēram, att. 3.1a parādītajam stienim piepūles ir atkarīgas no trim kinemātiskiem lielumiem – galu pagriezieniem φ_k , φ_l un galu savstarpējā lineārā pārvietojuma Δ , kā arī ārējās slodzes P . Bez jau minētā abos galos iespīlētā stieņu tipa parasti pārvietojumu metodē izmanto stieņus, kuriem viens gals iespīlēts, bet otrs brīvi balstīts (att.3.1b), kā arī stieņus, kuriem abi gali brīvi balstīti (att.3.1c).

Dažreiz, lai samazinātu kinemātiskās nenoteicamības pakāpi, par statiski noteicamu elementu lietderīgi uzskatīt arī konsolsiju (att. 3.1d). Svarīgi ņemt vērā, ka divu pirmo divu tipu stieņi ir statiski nenoteicami elementi un piepūles tajos jāaprēķina ar statiski nenoteicamu sistēmu aprēķina metodēm, piemēram, spēku, bet trešā un ceturtā tipa

stieņi ir statiski noteicami.



att. 3.2

Analizējot rāmja (att.3.2a) deformēto stāvokli, tā kreiso statū varam uzskatīt par abos galos iespīlētu stieni (att.3.2b), kuram augšējā balstā veikts pagrieziens par leņķi Z_2 un lineārs pārvietojums perpendikulāri stieņa asij par lielumu Z_1 . Rīģeli varam uzskatīt par abos galos iespīlētu stieni (att.3.2.c), kura iespīlējumi pagriežti par leņķiem Z_2 un Z_3 . Labais stats (att.3.2d) ir vienā galā iespīlēts, bet otrā galā brīvi balstīts stienis, kura iespī-

lētais gals lineāri pārvietots par lielumu Z_1 un pagriezts par leņķi Z_3 .

Pie šādas uzdevuma nostādnes aktuāls kļūst jautājums par to, kā noteikt piepūles rāmja atsevišķos elementos (tātad statiski nenoteicamos), kuri slogoti ar uzdotām kinemātisko lielumu Z_1, Z_2, Z_3 vērtībām.

Lai noteiktu abos galos iespīlētam stienim tos lieces momentus, kuri rodas no šo galu pagriezieniem rīkojamies sekojoši. Izvēlamies brīvi balstītu siju, kuras galos darbojas pagaidām nezināmi momenti M_k un M_ℓ . Tādā gadījumā ir iespējams izmantojot Mora integrāli izteikt šo galu pagriezienu leņķus φ_k un φ_ℓ caur momentiem M_k un M_ℓ . Reizi-
not vienības un slodzes epīras pēc Simpsona formulas, gadījumā, ja epīras ierobežotas ar taisnēm (att. 3.3)

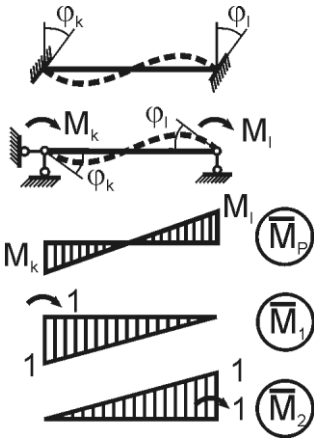
$$\frac{I}{EI} \int_0^\ell M_1 M_2 dx = \frac{\ell}{6EI} (2M_1^k M_2^k + 2M_1^L M_2^L + M_1^k M_2^L + M_1^L M_2^k),$$

iegūstam

$$\varphi_k = \frac{\ell}{6EI} (2M_k - M_\ell) \quad \text{un} \quad \varphi_\ell = \frac{\ell}{6EI} (2M_\ell - M_k).$$

Gadījumā, ja $\varphi_\ell = 0$ (labais gals iespīlēts), bet $\varphi_k = 1$, iegūstam sakarības

$$2M_k - M_\ell = \frac{6EI}{\ell}; \quad 2M_\ell - M_k = 0,$$



att. 3.3

saskaņā ar kurām

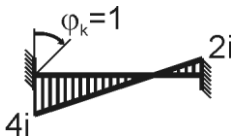
$$M_\ell = \frac{2EI}{\ell} = 2i;$$

$$M_k = 2M_\ell = 4i.$$

Parametru i , kuru nosaka izteiksme $i = \frac{EI}{\ell}$, sauc par stieņa īpatnējo stingumu.

Abos galos iespīlētām stienim no kreisā gala pagriezienu par vienības leņķi, rodas lieces moments, kura epīra redzama att. 3.4.

Izdarot pieņēmumu $M_\ell = 0$ un $\varphi_k = 1$, no iepriekšējām sakarībām varam noteikt lieces

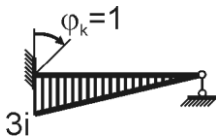


att. 3.4

momentu epīru, kura rodas vienā (kreisajā) galā iespīlētām un otrā galā brīvi balstītam stienim no iespīlētā gala pagriezienu par vienības leņķi.

Atbilstoši pieņēmumam iegūstam sakarību

$$1 = \frac{\ell}{6EI} 2M_k.$$



att. 3.5

Tāpat momenta vērtība iespīlējtajā sijas galā ir

$$M_k = \frac{3EI}{\ell} = 3i,$$

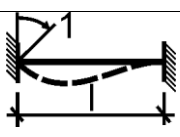
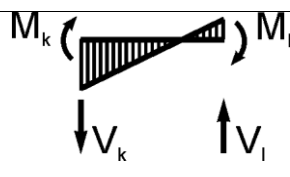
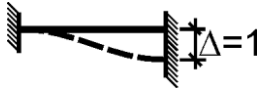
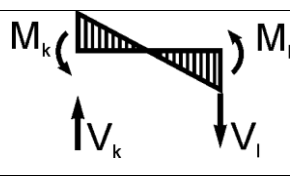
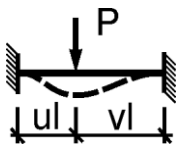
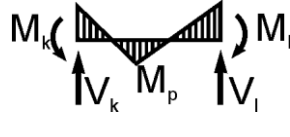
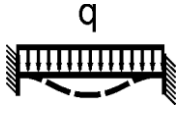
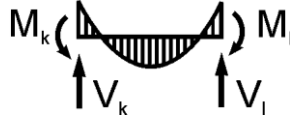
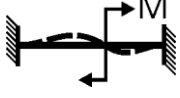
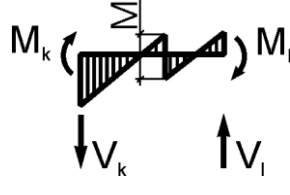
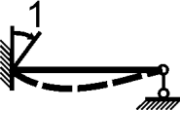
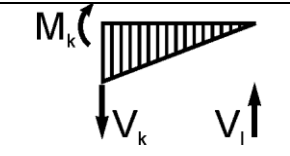
bet attiecīgā epīra parādīta att. 3.5.

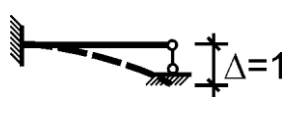
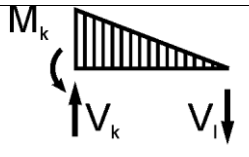
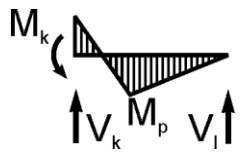
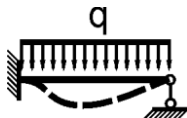
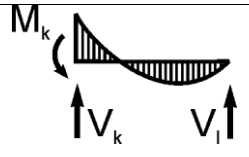
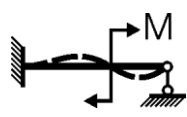
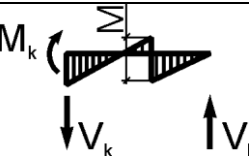
Analogā veidā tiek noteiktas lieces momentu epīras abu statiski nenoteicamu tipu stieņiem arī pie citiem slogojumu veidiem. Iegūtie rezultāti tiek apkopoti tabulu veidā un praktiskos stieņu sistēmu aprēķinos tiek izmantoti kā jau zināmi rezultāti. Lieces momentu epīras un balstu reakciju vērtības tipiskākajiem vienības slogojumu gadījumiem

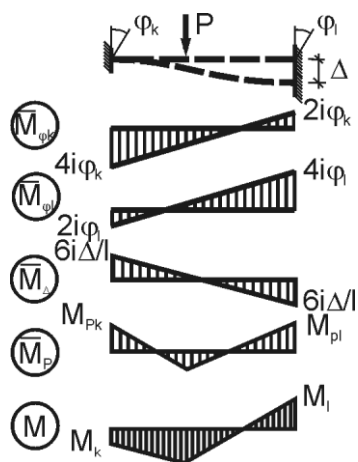
apkopotas tabulā 3.1.

Tabula 3.1

Lieces momentu epīras un balstu reakcijas

Slogojums	Epīra	Lieces momentu un balstu reakciju vērtības
		$M_k=4i$ $M_l=2i$ $V_k=V_l=6i/l$
		$M_k=M_l=6i/l$ $V_k=V_l=12i/l^2$
		$M_p=2Pu^2v^2/l$ $M_k=uv^2Pl$ $M_l=u^2vPl$ $V_k=v^2(1+2u)P$ $V_l=u^2(1+2v)P$
		$M_k=M_l=ql^2/12$ $V_k=V_l=ql/2$
		$M_k=Mv(3v-2)$ $M_l=Mu(3u-2)$ $M_v=Mv(4u^2+v^2-uv)$ $V_k=V_l=6uvM/l$
		$M_k=3i$ $V_k=V_l=3i/l$

		$M_k = 3i/l$ $V_k = V_l = 3i/l^2$
		$M_k = Plv(1-v^2)/2$ $V_k = Pv(3-v^2)/2$ $V_l = Pu^2(3-u)/2$ $M_p = Pu^2vl(3-u)/2$
		$M_k = ql^2/8$ $V_k = 5ql/8$ $V_l = 3ql/8$
		$M_k = (1-3v^2)M/2$ $M_v = (2u^3+2v^3+3u^2v)M/2$ $V_k = V_l = 3(1-v^2)M/2l$



att. 3.6

Izmantojot tabulā sakopotos rezultātus, iespējams uzkonstruēt lieces momentu epīras jebkuram stienim, ja zināms tā slogojums (galu lineārie pārvietojumi, galu pagriezienu leņķi un ārējā slodze). Tā piemēram, ja abos galos iespīlētai sijai ir zināmi tās galu pagriezieni φ_k un φ_l gala lineārais pārvietojums Δ un ārējā slodze P , izmantojot tabulu 3.1 konstruējam atbilstošās lieces momentu epīras no katra slogojuma atsevišķi. Šīs epīras parādītas att. 3.6. Galīgo lieces momentu epīru iegūstam summējot atsevišķās epīras no $\varphi_k, \varphi_l, \Delta$ un P . Šādas summēšanas rezultātā iegūtas sekojošas lieces

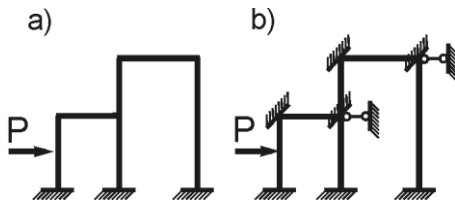
momentu vērtības stieņa labajā un kreisajā galā:

$$M_{\ell} = -2i\varphi_k - 4i\varphi_{\ell} + \frac{6i}{\ell}\Delta - M_{p\ell},$$

$$M_k = 4i\varphi_k + 2i\varphi_{\ell} - \frac{6i}{\ell}\Delta - M_{pk}.$$

3.1. Kinemātiskās nenoteicamības pakāpe un pārvietojumu metodes pamatsistēma

Iepriekš tika parādīts kā var noteikt iekšējo piepūļu epīras, ja ir zināmi atsevišķu stieņu stingo mezglu pagriezienu leņķi un to lineārie pārvietojumi. Diemžēl pagaidām šie lielumi statiski nenoteicamā sistēmā nav zināmi. Pārvietojumu metodes mērķis ir noteikt šos nezināmos lielumus, lai pēc tam aprēķinātu arī sistēmas iekšējās piepūles. Tātad pārvietojumu metodē par nezināmajiem tiek pieņemti kinemātiski lielumi - stingo mezglu pagriezienu leņķi un stieņu lineārie pārvietojumi. Pārvietojumu metodē, līdzīgi kā spēku metodē, aprēķini tiek veikti izmantojot pamatsistēmu.



att. 3.7

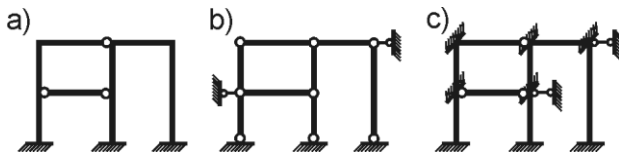
Pārvietojumu metodes pamatsistēmu iegūst nevis atmetot liekās saites, kā tas tika darīts spēku metodē, bet gan ieviedot papildus saites - **iespīlējumus**, kas novērš rāmja stingo mezglu pagriešanos, un **balststieņus**, kas novērš stieņu lineāros pārvietojumus (att.

3.7b). Mezglos ievietoto iespīlējumu īpatnība ir tā, ka tie novērš mezglu pagriešanos, bet atļauj tiem lineāri pārvietoties. Tātad par pārvietojumu metodes pamatsistēmu (att. 3.7b) varam uzskatīt stieņu sistēmu, kura sastāv no atsevišķiem stieņiem ar atšķirīgu to galu nostiprinājumu. Konkrētajā gadījumā visi šie stieņi ir abos galos iespīlēti.

Ievestās saites nodrošina arī to, ka jebkura iedarbība (iespīlējuma pagrieziens, galu savstarpējais lineārais pārvirtojums, ārējā slodze), kas pielikta kādam stienim, iespaido tikai šo stieni un nevienu citu.

Nezināmo skaits pārvietojumu metodē ir vienāds ar sistēmas stingajos mezglos ievesto iespīlējumu skaita un ievesto balststieņu skaita summu (katram iespīlējumam atbilst nezināms pagriezienu leņķis, katram balststienim nezināms pārvietojums).

*Summāro ievesto papildus saišu skaitu sauc par sistēmas **kinemātiskās nenoteicamības pakāpi**.*



att. 3.8

Pārvietojumu metodē pamatsistēmas izvēle, atšķirībā no spēku metodes, ir visai vienozīmīga. Visos stingajos mezglos tiek ievietoti iespīlējumi. Lai

noteiktu lineāro saišu skaitu, visos rāmja mezglos (arī balstos) ievieto locīklas. Iegūto sistēmu (ja tā ir ģeometriski mainīga) pārveido par ģeometriski nemainīgu, pareizi izvietojot lineārās saites.

Jāievēro šāds nosacījums - sistēmas mezglam nav iespējams lineārais pārvietojums, ja tas pievienots pie nekustīgas sistēmas vismaz ar 2 stieņiem (balststieņus ieskaitot), kas neatrodas uz vienas taisnes, t.i. ar diādi.

Pakāpeniski analizē visus sistēmas mezglos, un tajos mezglos, kuri pievienoti diskam (ģeometriski nemainīgai rāmja daļai) ar vienu stieni, ievieto papildus lineāro saiti, kas novērš šā mezgla lineāro pārvietojumu (att. 3.8b).

Nepieciešamo lineāro saišu skaitu var iegūt, nosakot sistēmai, kurai visos stingajos mezglos ieskaitot balstu iespīlējumus ievietotas locīklas, kustības brīvības pakāpi. Šādi aprēķināta sistēmas kustības brīvības pakāpe ir vienāda ar nepieciešamo lineāro saišu skaitu un arī ar sistēmas lineāro pārvietojumu skaitu.

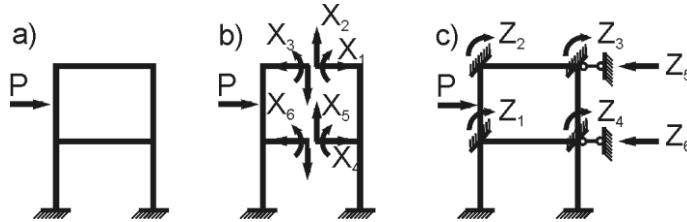
Tā, piemēram, att. 3.8 parādītajam rāim

$$W = 3D - (2L + S) = 3 \cdot 8 - [2(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) + 6] = 2.$$

Tātad jāieved 2 lineāras saites.

Uzsākot statiski nenoteicamas stieņu sistēmas aprēķinu svarīgi izvēlēties to aprēķinu metodi, kura racionālāka konkrētajam gadījumam. Racionalitātes kritērijs šajā gadījumā ir minimālais nezināmo skaits, ko nosaka sistēmas statiskās vai kinemātiskās nenoteicamības pakāpe. Tā, piemēram, gadījumā, ja att. 3.9 parādīto sistēmu risina ar spēku metodi, tā ir sešas reizes statiski nenoteicama un ir jānosaka seši nezināmie. Pielietojot pārvietojumu metodi vispārīgā gadījumā (nevar tikt izmantota sistēmas simetrija) arī

jānosaka seši nezināmie, jo izvēloties metodes pamatsistēmu četros stingajos mezglos jāievieto iespīlējumi (att. 3.9c), kas rada četrus nezināmus mezglu pagriezienu leņķus Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 un sistēmai jāpieliek divi atbalststieņi, kas rada vēl divus papildus nezināmos – lineāros pārvietojumus Z_5 un Z_6 .



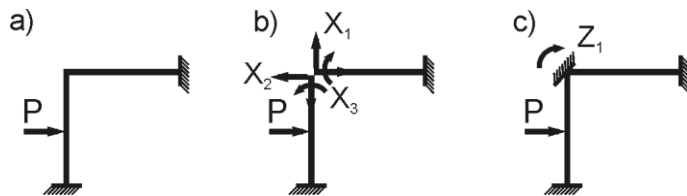
att. 3.9

Nosakot sistēmai nepieciešamo lineāro saišu skaitu, visus stingos mezglus (arī balstus) aizstājam ar locīklām un šādai sistēmai nosakām kustības brīvības pakāpi

$$W = 3D - [2(L_2 + 2L_3 + \dots) + S] = 3 \cdot 6 - [2(2 + 2 \cdot 2) - 4] = 18 - 16 = 2.$$

Līdz ar to pamatsistēmā jāievieš 2 lineāras saites. Tātad nezināmo skaits kā spēku tā arī pārvietojumu metodē ir vienāds ar 6 un abas metodes no nezināmo skaita viedokļa ir līdzvērtīgas. Šādā situācijā nedaudz izdevīgāka ir pārvietojumu metode, jo lieces momentu epīru konstruēšana pārvietojumu metodē izmantojot tabulu 3.1 ir mazāk darbietilpīga kā spēku metodē. Vienkāršāk nosakāmi arī kanonisko vienādojumu koeficienti un brīvie locekļi.

Citādi ir att. 3.10 parādītā rāmja gadījumā, jo šis rāmis ir trīs reizes statiski un tikai vienu reizi kinemātiski nenoteicams. Tātad pārvietojumu metode ir racionālāka. Viena no daudzām iespējamām spēku metodes pamatsistēmām parādīta att. 3.10b. Toties att. 3.10c parādītā pārvietojumu metodes pamatsistēma dotajam rāhim ir vienīgi iespējamā.

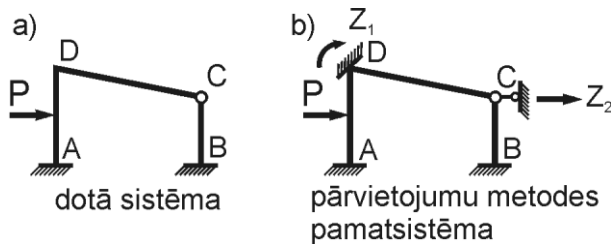


att. 3.10

3.2. Pārvietojumu metodes kanonisko vienādojumu sistēma

Pārvietojumu metodes pamatsistēmu iegūst, ievēdot papildus saites - iespīlējumus un lineārās saites.

Slogotā sistēmā šajās saitēs radīsies reaktīvie momenti un reaktīvās piepūles. Šī ir slogotas pārvietojumu metodes pamatsistēmas atšķirība no dotās sistēmas.



att. 3.11

Lai panāktu dotās un pamatsistēmas identitātes, ir nepieciešams, lai reaktīvie momenti un reaktīvās piepūles ievestajās saitēs būtu vienādas ar nulli. Šis nosacījums izpildīsies, ja pamatsistēmas mezgliem izdarī-

sim pagriezienus un pārvietojumus, kas identiski pagriezieniem un pārvietojumiem dotajā sistēmā no tai pieliktās ārējās slodzes.

Apskatīsim divreiz kinemātiski nenosakāmu rāmi (att. 3.11).

Ārējā slodze (P), mezglu pagriezieni (Z_1) un lineārie pārvietojumi (Z_2) pamatsistēmā ievietotajās papildu saitēs izraisa reaktīvās piepūles. Tā kā pamatsistēmā ieviestie papildus iespīlējumi un balststieņi ir nosacīti, tad, lai dotā un pamatsistēma būtu ekvivalentas, summārajām reaktīvajām piepūlēm pamatsistēmas papildus saitēs jābūt vienādām ar nulli.

Pievēršoties iespīlējumam mezglā D (att.3.11b) varam apgalvot, ka summārā reaktīvā piepūle ievestajā iespīlējumā D no mezgla D pagrieziņa, lineārā pārvietojuma horizontālā virzienā un pieliktās slodzes ir vienāda ar nulli:

$$R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0,$$

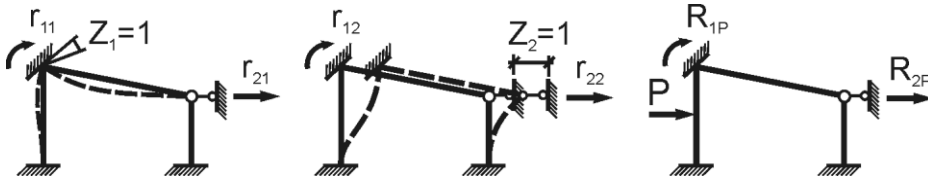
kur R_{11} - reaktīvais moments iespīlējumā no mezgla pagrieziņa par lielumu Z_1 ;

R_{12} - reaktīvais moments iespīlējumā no lineārā pārvietojuma Z_2 ;

R_{1P} - reaktīvais moments iespīlējumā no ārējās slodzes P .

R_{11} un R_{12} var izteikt ar vienības pārvietojumu izsauktajām reaktīvajām piepū-

lēm (att. 3.12).



att. 3.12

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{r}_{11} \mathbf{Z}_1;$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_{12} \mathbf{Z}_2,$$

kur

r_{11} - reaktīvais moments iespīlējumā no mezgla **D** pagrieziens par vienu vienību $\bar{Z}_1=1$;

$\mathbf{r}_{12}$ - reaktīvais moments iespīlējumā no mezgla **C** un arī **D** lineārā pārvietoju-
ma par vienu vienību $\bar{\mathbf{Z}}_2 = \mathbf{1}$.

Kanonisko vienādojumu sistēmas 1.vienādojums, ja sistēmai (att. 3.11) ir divi nezināmie

$$\mathbf{r}_{11}\mathbf{Z}_1 + \mathbf{r}_{12}\mathbf{Z}_2 + \mathbf{R}_{1P} = \mathbf{0}$$

izsaka nosacījumu, ka summārais reakīvais moments iespīlējumā $\mathbf{D}$ no ārējās slodzes un nezināmo $\mathbf{Z}_1$ un $\mathbf{Z}_2$ kopiedarbības ir vienāds ar nulli.

Otrais kanoniskais vienādojums izsaka nosacījumu, ka summārā reaktīvā piepūle ievietotajā papildu saitē no nezināmo $\mathbf{Z}_1$ un $\mathbf{Z}_2$, un ārējās slodzes kopiedarbības ir vienāda ar nulli

$$\mathbf{r}_{21}\mathbf{Z}_1 + \mathbf{r}_{22}\mathbf{Z}_2 + \mathbf{R}_{2p} = \mathbf{0}.$$

Vispārīgā gadījumā n reizes kinemātiski nenoteicamai sistēmai kanonisko vienādojumu sistēma sastāv no n neatkarīgiem algebriskiem vienādojumiem:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ... + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ... + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0 \\ \\ r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + ... + r_{kn}Z_n + R_{kP} = 0 \\ \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ... + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0. \end{array} \right.$$

Atrisinot šo sistēmu nosakām nezināmo $Z_1 \dots Z_n$ vērtības. Tas iespējams, ja ir zināmi kanonisko vienādojumu sistēmas koeficienti un brīvie locekļi.

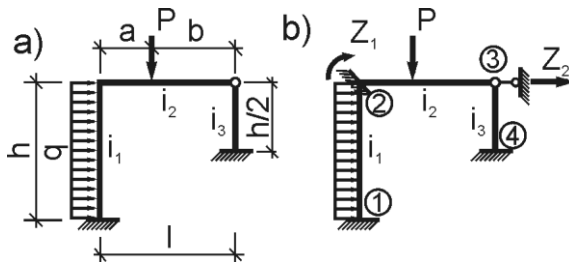
3.3. Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu noteikšana ar statisko paņēmieni

Lai noteiktu kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus, vispirms jākonstruē lieces momentu epīras no vienības pārvietojumiem un ārējās slodzes pārvietojumu metodes pamatsistēmai. Šeit jāizmanto lieces momentu epīru un balstrekciju tabulas vienlaiduma statiski nenoteicamām sijām.

Koeficientus var iedalīt divās grupās:

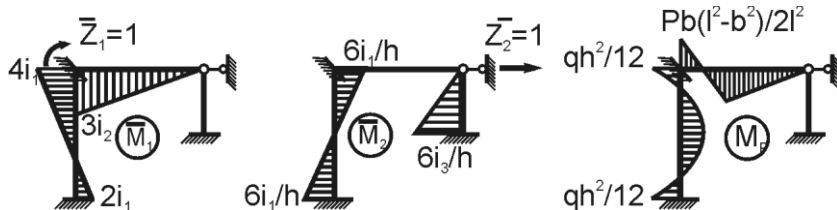
- 1) koeficienti, kas ir *reaktīvie momenti* izveidotajos iespīlējumos;
- 2) koeficienti, kas ir *reaktīvās piepūles* ievietotajos papildu stieņos.

Pirmos nosaka ar mezglu izgriešanas paņēmieni, izgrieztajam mezglam sastādot momentu līdzsvara vienādojumu $\sum M_i = 0$.



att. 3.13

Otros nosaka ar projekciju metodi, izdarot šķēlumu tā, ka tiek atšķelta daļa no rāmja vai atšķēļ visu rāmi pa balstiem un sastāda projekciju līdzsvara vienādojumus spēkiem, kas darbojas uz atšķēlto daļu

$$: \sum_i X_i = 0 \text{ vai } \sum_i Y_i = 0.$$


att. 3.14

Lai noteiktu kanonisko vienādojumu sistēmas koeficientus un brīvos locekļus att. 3.13

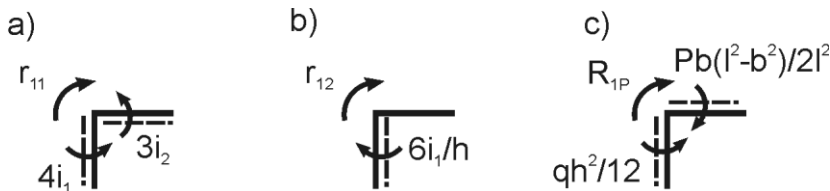
parādītajam rāim, konstruējam lieces momentu epīras pārvietojumu metodes pamatsistēmai (att. 3.13b) no vienības pārvietojumiem ($\bar{Z}_1 = 1$, $\bar{Z}_2 = 1$) un no ārējās slodzes (att. 3.14).

Lai noteiktu pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientus un brīvo locekli, kas būtībā ir reaktīvie momenti ievestajā iespīlējumā, apskatam mezgla 2, kurā darbojas nezināmais Z_1 , līdzsvaru, *par pozitīvo reakcijas virzienu pieņemot virzienu, kas sakrīt ar Z_1 virzienu*:

1. Lai noteiktu r_{11} -reaktīvo momentu ievestajā iespīlējumā no šī iespīlējuma pagrieziena par vienu vienību, sastādām līdzsvara vienādojumu mezglam 2 (att. 3.15a), t.i. mezglam, kurā darbojas pirmais nezināmais un kurā rodas reaktīvā piepūle no šī pirmā nezināmā

$$\sum_i M_{2i} = r_{11} - 3i_2 - 4i_1 = 0.$$

Tātad $r_{11} = 3i_2 + 4i_1$.



att. 3.15

2. Lai noteiktu r_{12} - reakciju mezglā, kurā darbojas $\bar{Z}_1$ no $\bar{Z}_2 = 1$, izgriezīsim 2 mezglu (att. 3.15b), kad vienības pārvietojums ir mezglā, kurā darbojas otrais nezināmais $\bar{Z}_2=1$:

$$\sum_i M_{2i} = r_{12} + \frac{6i_1}{h}; \quad r_{12} = -\frac{6i_1}{h}.$$

3. Lai noteiktu reakciju ievestajā iespīlējumā no ārējās slodzes R_{1P} , izgriežam pamatsistēmas mezglu 2 gadījumā, kad darbojas dotā ārējā slodze (att. 3.15c).

R_{1P} pieņemts pozitīvā virzienā. Ar raustīto līniju apzīmē stiepto zonu un parāda momentu virzienus. Sastādot lieces momentu līdzsvara vienādojumu $\sum_i M_{2i} = 0$, iegūs-

tam.

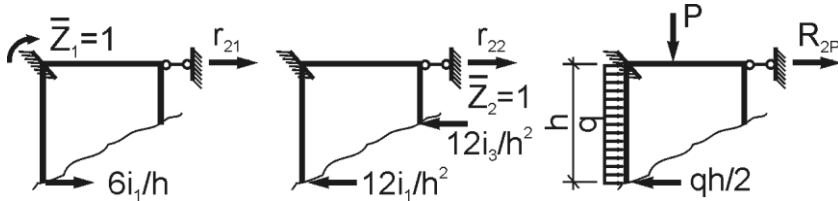
$$\sum_i M_{2i} = R_{1P} + \frac{Pb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} - \frac{qh}{12} = 0.$$

No šī vienādojuma nosakām reakcijas R_{1P} vērtību:

$$R_{1P} = -\frac{Pb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2} + \frac{qh^2}{12}.$$

Tādā veidā ir noteikti pirmā kanoniskā vienādojuma koeficienti pie nezināmajiem un brīvais loceklis.

Lai atrastu otrā kanoniskā vienādojuma koeficientus un brīvo locekli aprēķināsim reak-tīvās piepūles ievietotajā papildus saitē, kad darbojas ārējā slodze $\mathbf{P}$, kad ir izdarīts pa-grieziena mezglā 2 par vienības leņķi $\bar{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{1}$ un kad izdarīts pārvietojums ievestās saites virzienā $\bar{\mathbf{Z}}_2 = \mathbf{1}$. Šim nolūkam izdarīsim šķēlumu pa balstiem un pieliksim balstos darbojošās balstu reakcijas.



att. 3.16

Lai noteiktu r_{21} , izdara šķēlumu pa balstiem, kad nezināmais $\bar{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{1}$ izsauc reakciju saitē $\mathbf{Z}_2$, lai noteiktu r_{22} , izdara tādu pašu šķēlumu, kad reakciju saitē $\mathbf{Z}_2$ izsauc nezi-nāmais $\mathbf{Z}_2$ un lai noteiktu R_{2P} , izdara šķēlumu, kad darbojas ārējā slodze (att. 3.16):

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &= r_{21} + \frac{6i_1}{h} = 0; & r_{21} &= -\frac{6i_1}{h}; \\ \sum_i X_i &= r_{22} - \frac{12}{h^2}(i_1 + i_3) = 0; & r_{22} &= \frac{12}{h^2}(i_1 + i_3). \\ \sum_i X_i &= R_{2P} + qh - \frac{qh}{2}; & R_{2P} &= \frac{qh}{2}; \end{aligned}$$

Līdz ar to esam noteikuši otrā kanoniskā vienādojuma koeficientus.

3.4. Koeficientu un brīvo locekļu noteikšana ar epīru sareizināšanas paņēmieni

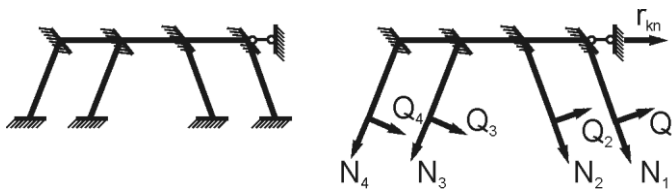
Ar statisko paņēmieni koeficientu un brīvo locekļu noteikšana reizēm ir sarežģīta. Piemēram, rāmim ar neparalēliem statiem, lai noteiktu piepūli papildus saitē, izdarot šķēlumu pa balstiem un sastādot līdzsvara vienādojumus, jāņem vērā ne tikai šķērsspēki, bet arī normālspēki (att. 3.17).

Šādos gadījumos izdevīgāk izmantot epīru sareizināšanas paņēmieni.

Kanonisko vienādojumu sistēmu koeficientu noteikšanai, izmantojot nosacījumu par ārējo un iekšējo spēku darbu vienādību, iegūst sekojošu izteiksmi:

$$r_{kn} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_k \bar{M}_n \frac{dx}{EI_i},$$

kur M_k, M_n - momentu epīras atbilstošajiem vienības pārvietojumiem - iespīlējumu pagriezieniem vai lineārajiem pārvietojumiem.



att. 3.17

Kanonisko vienādojumu brīvos locekļus var aprēķināt pēc formulas

$$R_{nP} = - \sum_i \int_0^{\ell_i} \bar{M}_n \bar{M}_p' \frac{dx}{EI}$$

kur

M_n - lieces momentu epīra no vienības pārvietojuma,

M_p' - lieces momentu epīra no ārējās slodzes statiski noteicamā ģeometriski nemainīgā sistēmā, kas iegūta no statiski nenoteicamās sistēmas, atmetot liekās saites.

3.3. Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu pārbaudes

Pie aplēses ar pārvietojumu metodi, ieteicams izrēķināt gan koeficientu r_{kn} , gan r_{nk} un pārbaudīt, vai ir spēkā sakarība

$$r_{nk} = r_{kn}$$

Bez tam var izdarīt pārbaudi pa rindiņām un universālo pārbaudi kanonisko vienādojumu koeficientiem līdzīgi kā spēku metodē.

Šim nolūkam jākonstruē summārā lieces momentu vieninieku epīra (epīra no vienlaicīgi pieliktiem visiem vienības pārvietojumiem):

$$M_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n.$$

Pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientu summa:

$$\begin{aligned} r_{1i} &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 \bar{M}_1 \frac{dx}{EI_i} + \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{dx}{EI_i} + \dots \\ &+ \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 \bar{M}_n \frac{dx}{EI_i} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \frac{dx}{EI_i} = \\ &= \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} = r_{1s} \end{aligned}$$

Tātad pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientu pie liekajiem nezināmajiem summa ir vienāda ar summārās lieces momentu vieninieku epīras reizinājumu ar vienības epīru no pirmā nezināmā pārvietojuma.

Analogi pārējiem vienādojumiem:

$$\begin{aligned} \sum_i r_{2i} &= r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_2 \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} = r_{2s} \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_i r_{ni} &= r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_n \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} = r_{ns} \end{aligned}$$

Visu vienādojumu koeficientu pie liekajiem nezināmajiem summa:

$$\begin{aligned}
\sum_i r &= \sum r_{1i} + \sum r_{2i} + \dots + \sum r_{ni} = \\
&= \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_1 \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} + \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_2 \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} + \dots + \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_n \bar{M}_s \frac{dx}{EI_i} = \\
&= \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_s (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \frac{dx}{EI_i} = \sum_i \int_{\ell_i} \bar{M}_s^2 \frac{dx}{EI_i} = r_{ss}
\end{aligned}$$

Visu kanonisko vienādojumu koeficientu summa ir vienāda ar summārās vienības epīras reizinājumu pašai ar sevi. Analogi varam parādīt, ka brīvo locekļu summa

$$R_{ip} = R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np} = - \sum_0^\ell \int \bar{M}_s M_p' \frac{dx}{EI} = -r_{sp}$$

kur

$\mathbf{M}_s$ - summārā lieces momentu epīra (momentu epīra no visiem vienības pagriezieniem un pārvietojumiem);

$\mathbf{M}_p'$ - lieces momentu epīra no ārējās slodzes jebkurai statiski noteicamai ģeometriski nemainīgai sistēmai, kas iegūta no dotās, atmetot liekās saites.

3.4. M, Q un N epīru konstruēšana

Pēc kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu noteikšanas un pārbaudes tiek atrisināta kanonisko vienādojumu sistēma un noteikti nezināmie stingro mezglu pagriezieni un lineārie pārvietojumi $\mathbf{Z}_1 \dots \mathbf{Z}_n$.

Galīgās lieces momentu epīras ordināti jebkurā punktā tādā gadījumā var iegūt pēc sakarības:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{Z}_1 \bar{\mathbf{M}}_1 \pm \mathbf{Z}_2 \bar{\mathbf{M}}_2 + \dots + \mathbf{Z}_n \bar{\mathbf{M}}_n,$$

kur

$\mathbf{M}_p$ - lieces momentu epīra pārvietojuma metodes pamatsistēmā no ārējās slodzes;

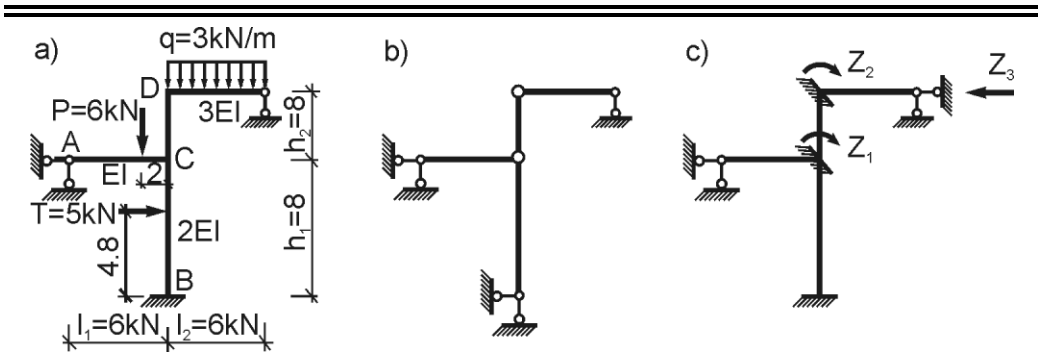
$\bar{\mathbf{M}}_1 \dots \bar{\mathbf{M}}_n$ - lieces momentu epīras no vienības pārvietojumiem.

Galīgās momentu epīras kinemātisko pārbaudi veic analogi kā spēku metodē - spēku metodes pamatsistēmu slogu ar vienības spēkiem atmesto saišu virzienā un iegūst summāro vienības epīru, kuras reizinājumam ar iegūto galīgo momentu epīru ir jābūt vienādam ar nulli.

Šķērsspēku Q un normāls spēku N epīras iegūst no galīgās lieces momentu epīras un piepūļu epīru pārbaudes veic analogi kā spēku metodē.

3.5. Rāmju aplēses ar pārvietojumu metodi piemēri

Piemērs 3.1 Aprēķināt piepūles izmantojot pārvietojumu metodi att. 3.18. parādītajam rāmim.



att. 3.18

Atrisinājums. Izvēloties pamatsistēmu ievadam iespējējumus stingajos mezglos C un D. Tiem atbilst divi nezināmie pagrieziņa leņķi Z_1 un Z_2 . Lai noteiktu, cik lineārās saites jāievēd, atrodam kustības brīvības pakāpi sistēmai, kurai visos mezglos, ieskaitot balstus, ievestas locīklas (3.18b att.):

$$W = 3D - (2L + S) = 3 \cdot 4 - [2(1+2) + 5] = 1.$$

Tātad dotais rāmis ir trīs reizes kinemātiski nenoteicams un tam jārisina trīs kanonisko vienādojumu sistēma

$$r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2P} = 0$$

$$r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3P} = 0$$

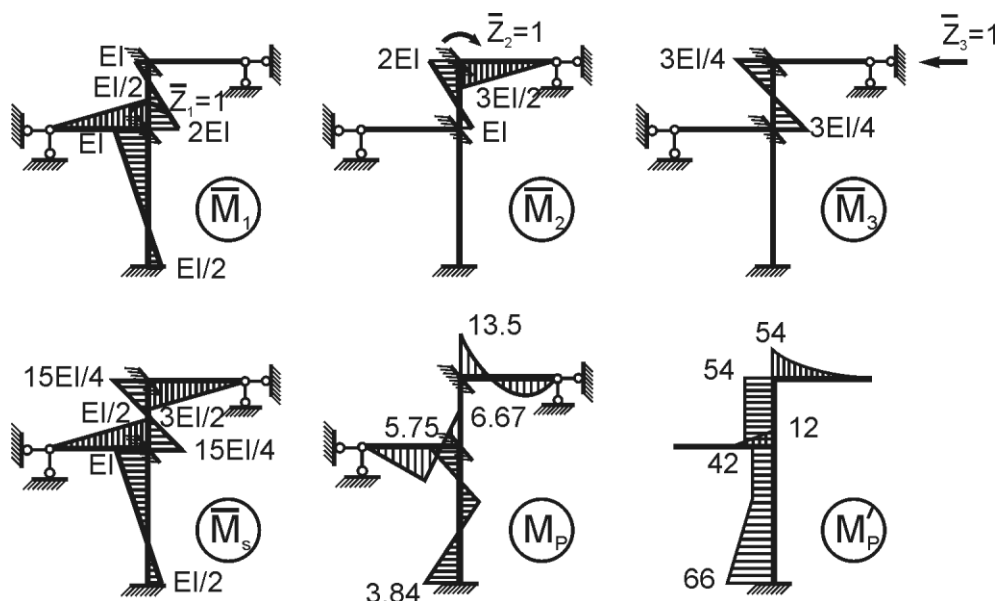
Iegūtajai pamatsistēmai (3.18c att.) konstruējam sekojošas epīras (att. 3.19):

$\bar{M}_1$; $\bar{M}_2$; $\bar{M}_3$ - vienības epīras no vienības pagrieziņa leņķiem $\bar{Z}_1=1$ un $\bar{Z}_2=1$ un vienības lineārā pārvietojuma $\bar{Z}_3=1$;

M_s - summāro vienības epīru no vienlaicīgi pieliktiem $\bar{Z}_1=1$, $\bar{Z}_2=1$ un $Z_3=1$;

M_p - lieces momentu epīra no ārējās slodzes;

M_p' - lieces momentu epīra spēku metodes pamatsistēmai no ārējās slodzes.



att. 3.19

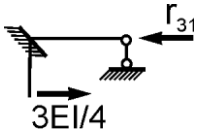
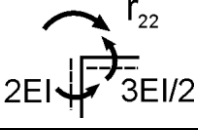
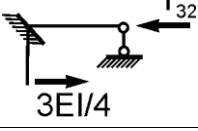
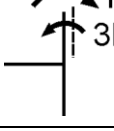
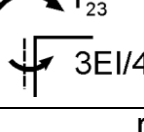
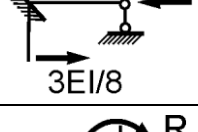
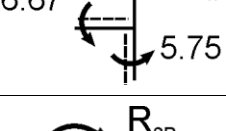
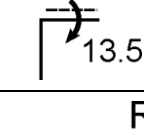
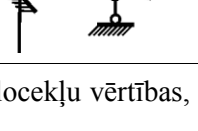
Lai noteiktu kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus, kas ir momenti ievestajos iespīlējumos, izgriežam mezgls **C** un **D**, un apskatām to līdzsvaru. Lai iegūtu koeficientus un brīvos locekļus, kas ir piepūles ievestajās papildus saitēs, griežam sistēmu virs mezgla **C** un apskatām augšējās daļas līdzsvaru. Koeficientus pie nezināmā Z_1 visos vienādojumos iegūst, apskatot epīru $\bar{M}_1$, pie Z_2 - apskatot epīru $\bar{M}_2$, pie Z_3 - apskatot epīru $\bar{M}_3$, brīvos locekļus - apskatot epīru M_p .

Koeficientu un brīvo locekļu noteikšanas secība un vērtības apkopotas tabulā 3.2.

Tabula 3.2

Kanonisko vienādojumu sistēmas koeficienti un brīvie locekļi

Nosa- kāmā reakcija	Apskatā- mā epīra	Izgrieztais mezgls (sis- tēmas daļa)	Vienādojums	Rezultāts
r_{11}	$\bar{M}_1$		$r_{11}-2EI-EI/2-EI=0$	$7EI/2$
r_{21}	$\bar{M}_1$		$r_{21}-EI=0$	EI

r_{31}	$\bar{M}_1$		$r_{31}-3EI/4=0$	$3EI/4$
r_{12}	$\bar{M}_2$		$r_{12}-EI=0$	EI
r_{22}	$\bar{M}_2$		$r_{22}-3EI/2-2EI=0$	$7EI/2$
r_{32}	$\bar{M}_2$		$r_{32}-3EI/4=0$	$3EI/4$
r_{13}	$\bar{M}_3$		$r_{13}-3EI/4=0$	$3EI/4$
r_{23}	$\bar{M}_3$		$r_{23}-3EI/4=0$	$3EI/4$
r_{33}	$\bar{M}_3$		$r_{33}-3EI/8=0$	$3EI/8$
R_{1P}	M_P		$R_{1P}-6.67-5.75=0$	12.42
R_{2P}	M_P		$R_{2P}+13.5=0$	-13.5
R_{3P}	M_P		$R_{3P}=0$	0

Atrastās koeficientu un brīvo locekļu vērtības, pēc atbilstošo pārbaužu veikšanas (analīzi kā spēku metodē), ievietojam kanoniskajos vienādojumos:

$$3,5Z_1 + Z_2 + 0,75Z_3 + 12,42/EI = 0$$

$$Z_1 + 3,5Z_2 + 0,75Z_3 - 13,5/EI = 0$$

$$0,75Z_1 + 0,75Z_2 + 0,375Z_3 = 0$$

un atrodam Z_1 , Z_2 un Z_3 vērtības:

$$Z_1 = -4,82/EI;$$

$$Z_2 = 5,545/EI;$$

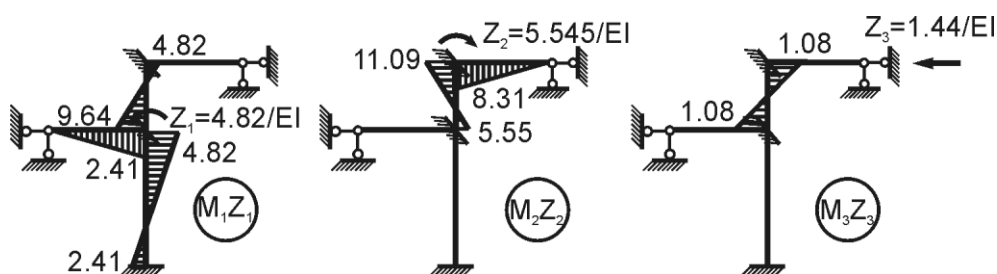
$$Z_3 = -1,44/EI.$$

Pārbaudei šīs vērtības jāievieto visos vienādojumos.

Galīgās lieces momentu epīras konstruēšanai izmantojam sakarību:

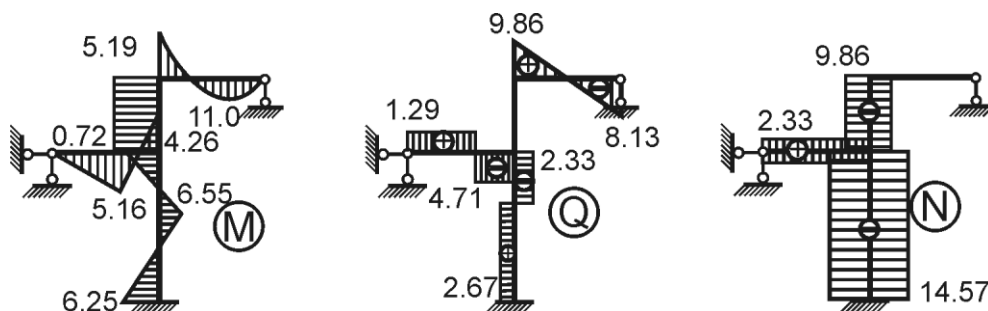
$$M = M_p + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3,$$

kur epīras $\bar{M}_i Z_i$ iegūst sareizinot vienības epīras ar atbilstošajām nezināmo vērtībām (att. 3.20).



att. 3.20

Šķērsspēku Q un normālspēku N epīras iegūstam un epīru statiskās un kinemātiskās pārbaudes veicam analogi kā spēku metodē. Galīgās iekšējo piepūļu epīras apskatāmajam rāmim dotas 3.21. attēlā.



att. 3.21

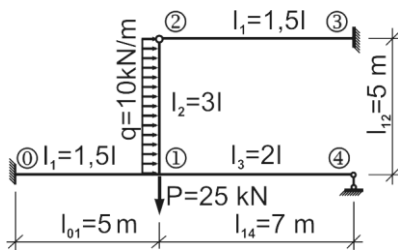
Piemērs 3.2. Uzkonstruēt lieces momentu (M), šķērsspēku (Q) un ass spēku (N) epīras statiski nenoteicamam rāmim (att. 3.22), aprēķina gaitā izdarīt nepieciešamās pārbaudes ($I_1: I_2: I_3 = 1,5I: 3I: 2I = 1,5: 3: 2$).

Atrisinājums.

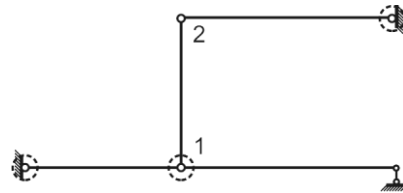
Pamatsistēmas izvēle

Pamatsistēmu izvēlamies ievērot iespējumu stingajā mezglā “1”, kam atbilst nezināmais pagrieziena leņķis Z_1 .

Lai noskaidrotu, cik lineārās saites jāievēd lai novērstu iespējamās mezglu lineāros pārvietojumus, nosakām kustības brīvības pakāpi W sistēmai, kurai visos stingajos mezglos (ieskaitot balstus) ievestas locīklas (att. 3.23):



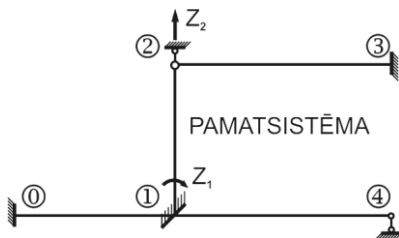
att. 3.22



att. 3.23

○ - stingajos mezglos ievestās locīklas;

D – disku (stieņu) skaits;



att. 3.24

L – summārais vienkāršo (kas savieno 2 diskus – stieņus) un uz vienkāršām reducēto salikto locīklu skaits;

S – atbalststieņu skaits,

$$W = 3D - 2L - S = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

Tātad, papildus vēl jāievēd lineāra saite, kas novērs mezglu “1” un “2” vertikālo pārvietojumu. Šai saitei atbilst nezināmais mezgla “2” (vai “1”) lineārais pārvietojums Z_2 (pamatsistēma att. 3.24).

Tātad rāmis ir divas reizes kinemātiski nenoteicams un nezināmo noteikšanai jāastāda

divi kanoniskie vienādojumi

$$Z_1 \cdot r_{11} + Z_2 \cdot r_{12} + R_{1P} = 0$$

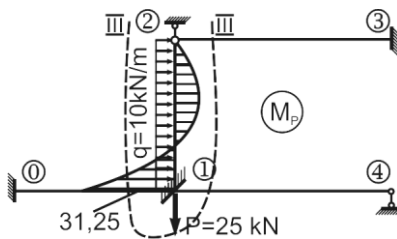
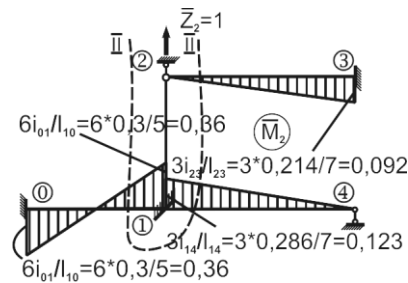
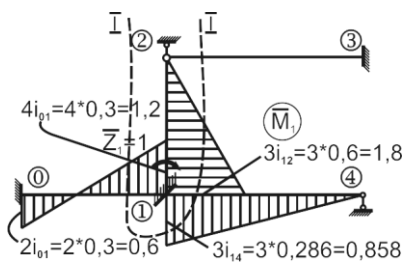
$$Z_1 \cdot r_{21} + Z_2 \cdot r_{22} + R_{2P} = 0.$$

Vienības un slodzes epīru konstruēšana.

Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu (reaktīvo piepūļu ievestajās saitēs) noteikšanai konstruējam pamatsistēmā momentu epīras no mezglu “vienības” pārvietojumiem ($\bar{Z}_1 = 1$ un $\bar{Z}_2 = 1$) un ārējās slodzes, iepriekš nosakot stieņu īpatnējos stingumus “ i_i ”

$$i_i = \frac{(EI)_i}{\ell_i}$$

Tā kā $E = const$ un aprēķina rezultāti nav atkarīgi no “I” lieluma, bet tikai no to attiecībām, var pieņemt, ka $EI = 1$ un nosakot stieņu īpatnējos stingumus ievērot tikai “I” attiecības.



att. 3.25

$$i_{10} = \frac{EI_{10}}{\ell_{10}} = \frac{1,5}{5,0} = 0,3;$$

$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{\ell_{12}} = \frac{3,0}{5,0} = 0,6;$$

$$i_{14} = \frac{EI_{14}}{\ell_{14}} = \frac{2,0}{7,0} = 0,286;$$

$$i_{23} = \frac{EI_{23}}{\ell_{23}} = \frac{1,5}{7,0} = 0,214.$$

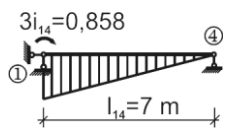
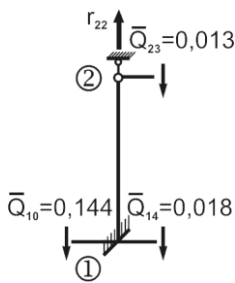
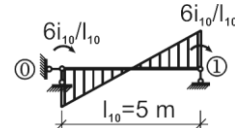
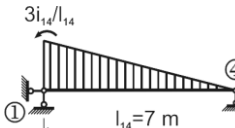
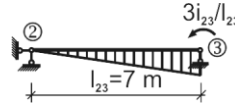
Vienības ($\overline{M}_1, \overline{M}_2$) un slodzes epīru (M_p) konstruēšanai izmantojam formulas piepūļu (momentu un reakciju) noteikšanai statistiski nenoteicamās sijās (tabula 3.1): no mezgla “1” pagriezienu par leņķi $\overline{Z}_1 = 1$, mezglu “1” un “2” lineārā pārvietojuma par $\overline{Z}_2 = 1$ un no slodzes q un P (att. 3.25).

Kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu noteikšana.

Kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus, kas ir reaktīvie momenti ievestajos papildu iespīlējumos, nosaka izgriežot atbilstošos mezglus un apskatot to līdzsvaru, bet koeficientus un brīvos locekļus, kas ir piepūles ievestajās papildus lineārajās saitēs nosaka atšķēlot sistēmas daļu un apskatot tās līdzsvaru.

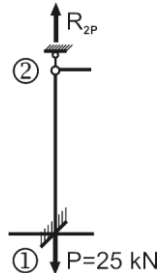
Kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus nosaka ievērojot šādu zīmju likumu: reaktīvās piepūles papildus ievestajās saitēs (reaktīvie momenti papildus iespīlējumos un reakcijas papildus lineārajās saitēs) pieņemam par pozitīvām, ja to virzieni sakrīt ar pieņemtajiem nezināmo (Z_1 un Z_2) virzieniem.

	“r_{11}” nosaka apskatot mezgla “1” līdzsvaru epīrā $\overline{M}_1$: $\sum M_1 = r_{11} - 4i_{10} - 3i_{14} - 3i_{12} = 0,$ $r_{11} = 4i_{10} + 3i_{14} + 3i_{12} = 1,2 + 0,858 + 1,8 = 3,58.$
	“r_{12}” nosaka apskatot mezgla “1” līdzsvaru epīrā $\overline{M}_2$: $\sum M_1 = r_{12} - \frac{6i_{10}}{\ell_{10}} + \frac{3i_{14}}{\ell_{14}} = 0,$ $r_{12} = 0,36 - 1,123 = 0,237.$
	R_{1P} – apskatot mezgla “1” līdzsvaru epīrā M_p: $\sum M_1 = R_{1P} + 31,25 = 0$ $R_{1P} = -31,25(kNm)$
“r_{21}” - apskatot atšķēltais rāmja daļas (šķēlums I – I) līdzsvaru epīrā $\overline{M}_1$	
	$\overline{Q}_{10} = -\frac{4i_{10} - 2i_{10}}{\ell_{10}} =$ $= -\frac{6i_{10}}{\ell_{10}} = -\frac{6 \cdot 0,3}{5} = -0,36$

		$\bar{Q}_{14} = \frac{0 - 3i_{14}}{l_{14}} =$ $= -\frac{3i_{14}}{l_{14}} = -\frac{0,858}{7,0} = -0,123$
$\sum Y_{I-I} = r_{21} - \bar{Q}_{10,II} + \bar{Q}_{14,II} = 0$ $r_{21} = \bar{Q}_{10,II} - \bar{Q}_{14,II} = 0,36 - 0,123 = 0,237$		
“r ₂₂ ” - apskatot atšķeltās rāmja daļas (šķēlums II – II) līdzsvaru epīrā $\bar{M}_2$		
		$\bar{Q}_{10} = \frac{-\frac{6i_{10}}{l_{10}} - \frac{6i_{10}}{l_{10}}}{l_{10}} =$ $= -\frac{12i_{10}}{l_{10}^2} = -\frac{12 \cdot 0,3}{5^2} = -0,144$
		$\bar{Q}_{14} = \frac{0 - \left(-\frac{3i_{14}}{l_{14}}\right)}{l_{14}} = \frac{3i_{14}}{l_{14}^2} =$ $= \frac{3 \cdot 0,26}{7^2} = 0,018$
		$\bar{Q}_{23} = \frac{\frac{3i_{23}}{l_{23}} - 0}{l_{23}} = \frac{3i_{23}}{l_{23}^2} =$ $= \frac{3 \cdot 0,214}{7,0^2} = 0,013$
$\sum Y_{II-II} = r_{22} - \bar{Q}_{23,I} - \bar{Q}_{10,I} - \bar{Q}_{14,II} = 0$ $r_{22} = \bar{Q}_{23,I} + \bar{Q}_{10,I} + \bar{Q}_{14,II} = 0,013 - 0,144 + 0,018 = 0,175$		

PIEZĪME: $\bar{Q}$ noteikšanai var izmantot arī 3. nodaļā dotās formulas reakciju noteikšanai pamatsistēmas stieņiem.

R_{2P} – apskatot rāmju atšķeltās daļas (šķēlums III – III) līdzsvaru epīrā M_p

	$\sum Y_{III-III} = R_{2P} - 25 = 0$ $R_{2P} = 25 \text{ kN}$
---	---

Aprēķinātās koeficientu un brīvo locekļu vērtības ievietojam kanoniskajos vienādojumos:

$$3,858Z_1 + 0,237Z_2 - 31,25 = 0$$

$$0,237Z_1 + 0,175Z_2 + 25 = 0$$

un atrisinot iegūstam

$$Z_1 = 18,396; \quad Z_2 = -167,59;$$

Atrisinājuma pārbaudei iegūtās Z_1 un Z_2 vērtības jāievieto abos vienādojumos:

$$3,858 \cdot 18,396 + 0,237(-167,59) - 31,25 = 70,97 - 39,72 - 31,35 = 70,97 - 70,97 = 0$$

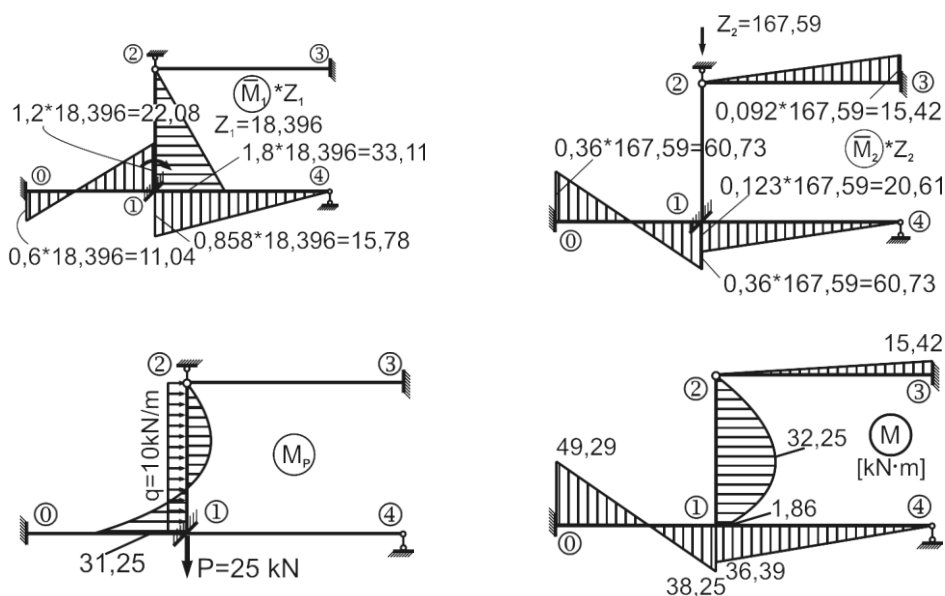
$$0,237 \cdot 18,396 + 0,175 \cdot 167,59 + 25 = 0 = 4,36 - 29,33 + 25 = 29,36 - 29,33 = 0,03 \approx 0$$

Galīgās lieces momentu epīras konstruēšana.

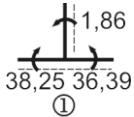
Galīgās lieces momentu epīras konstruēšanai izmantojam sakarību

$$M = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + M_p,$$

pareizinot epīru $\bar{M}_1$ un $\bar{M}_2$ ordinātas ar atbilstošajām nezināmo Z_1 un Z_2 vērtībām (ievērojot to zīmes) un saskaitot ar epīras M_p ordinātām (att. 3.26).



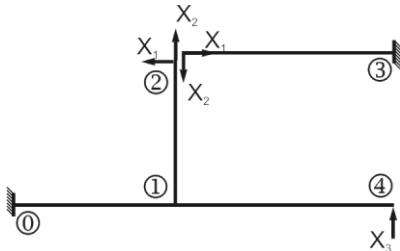
att. 3.26



Pārbaudām mezgla “1” līdzsvaru:

$$\sum M_1 = 38,25 - 1,86 - 36,30 = 38,25 - 38,25 = 0$$

Momentu epīras kinemātiskā pārbaude.



att. 3.27

Momentu epīras kinemātiskai pārbaudei nepieciešami izvēlēties spēku metodes (statiski noteicamu) pamatsistēmu (att. 3.27):

$$n = 2L + s_a - 3D = 2 \cdot 1 + 7 - 3 \cdot 2 = 3$$

- jāatmet 3 liekas saites.

Šajā (statiski noteicamajā) pamatsistēmā jāuzkonstruē “vienības” epīras no

$$\bar{X}_1 = 1; \quad \bar{X}_2 = 1; \quad \bar{X}_3 = 1.$$

Galīgās momentu epīras (M) reizinājumam ar jebkuru (piemēram, $\bar{M}_1$) no “vienības” epīrām vai arī summāro vienības epīru jābūt vienādam ar nulli.

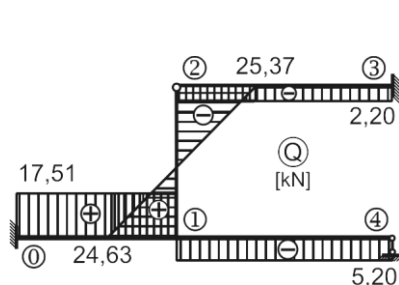
Šķērsspēku epīras konstruēšana.

Šķērsspēku epīru (att. 3.28) iegūstam no lieces momentu epīras tāpat kā spēku metodē izmantojot sakarību

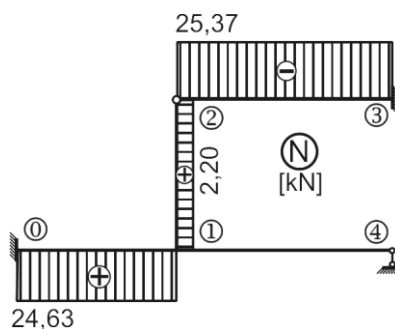
$$Q = Q^0 + \frac{M^{lab} - M^{kreis}}{l}.$$

	$Q_{01} = Q_{10} = 0 + \frac{38,25 - (-49,29)}{5,0} = 17,51(kN)$
	$Q_{12} = 25 + \frac{0 - 1,86}{5} = 25 - 0,37 = 24,63(kN)$ $Q_{21} = -25 + \frac{0 - 1,86}{5} = -25 - 0,37 = -25,37(kN)$ $Q_{x_0} = Q_{12} - qx_0 = 0$ $x_0 = \frac{Q_{12}}{q} = \frac{24,63}{10} = 2,463m$ $\max M = M_{x_0=2,463} =$ $= 1,86 + 24,63 \cdot 2,462 - 10 \cdot 2,463 \cdot \frac{2,463}{2} = 32,19(kNm)$

	$Q_{23} = Q_{32} = 0 + \frac{-15,42 - 0}{7,0} = -2,20(kN)$
	$Q_{14} = Q_{41} = 0 + \frac{0 - 36,39}{7,0} = -5,198 \approx -5,2(kN)$



att. 3.28



att. 3.29

Aksiāls spēku epīras konstruēšana.

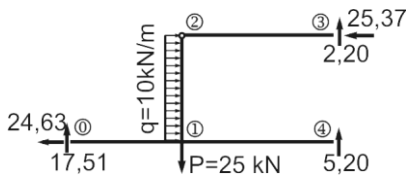
Aksiāls spēku epīru N (att. 3.29) iegūstam no Q epīras, izmantojot mezglu līdzsvara nosacījumus

	$\sum X = N_{23} + 25,37 = 0$ $N_{23} = -25,37(kN) \quad - \text{spiests}$ $\sum Y = N_{21} - 2,20 = 0$ $N_{21} = 2,20(kN) \quad - \text{stiepts}$
	$\sum X = N_{41} = 0$
	$\sum X = N_{10} - 24,63 = 0$ $N_{10} = 24,63(kN) \quad - \text{stiepts}$ $\sum Y = N_{21} - -25 + 17,51 + 5,20 = 0$ $N_{21} = 25 - 17,51 - 5,20 = 2,29(kN) \quad - \text{stiepts}$

Starpība ar mezglā "2" aprēķināto $N_{21} = 2,20kN$ ir $0,09(kN)$ – acīmredzot pieļauto noapaļojumu dēļ.

Šķērsspēku un aksiāls spēku epīru statiskā pārbaude.

Lai veiktu šķērsspēku un aksiāls spēku epīru kinemātisko pārbaudi, nošķeļam sistēmu pa balstiem (att. 3.30), balstu reakciju vērtības paņemam no šķērsspēku un aksiāls spēku epīrām, pieliekam ārējo slodzi un pārlicināmies, ka projekciju summas uz vertikālo un



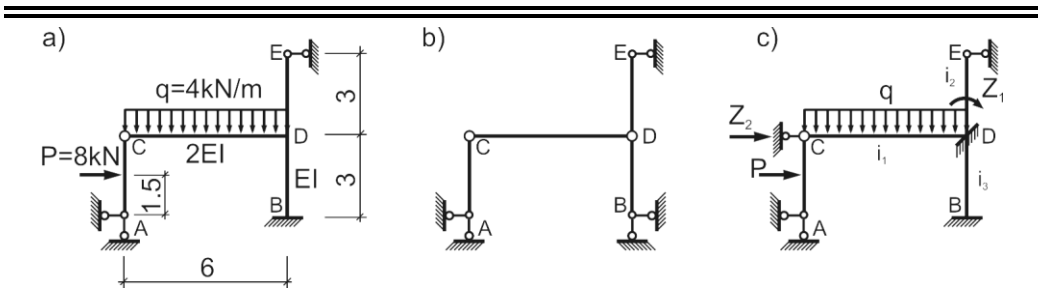
att. 3.30

horizontālo asi ir vienādas ar nulli (analogi kā spēku metodē).

$$\sum X = q \cdot 5 - 25,37 - 24,63 = 0$$

$$\sum Y = P - 17,51 - 5,20 - 2,20 \approx 0.$$

Piemērs 3.3. Uzkonstruēt lieces momentu (M), šķērsspēku (Q) un ass spēku (N) epīras statiski nenoteicamam rāmim (att. 3.31a).



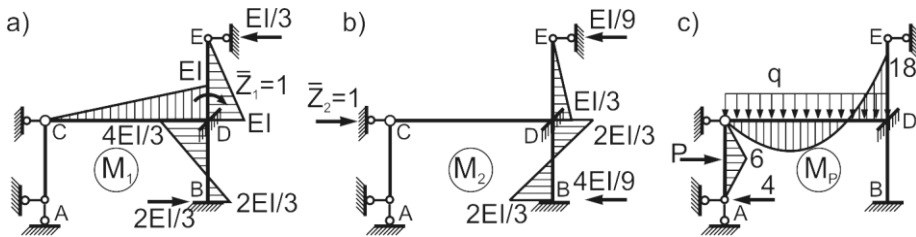
att. 3.31

Atrisinājums. Izvēloties pārvietojumu metodes pamatsistēmu, (att. 3.31c) stingajā mezglā D ievadam iespīlējumu. Pirmais liekais nezināmais ir šī iespīlējuma pagriezienā leņķis Z_1 . Lai noskaidrotu, cik lineārās saites ir nepieciešamas un kur tās jāizvieto, ievadam visos sistēmas stingajos mezglos, ieskaitot balstus, locīklas (att. 3.31b). Aprēķinot sistēmas kustības brīvības pakāpi

$$W = 3D - (2L + S) = 3 \cdot 4 - (2 \cdot 3 + 5) = 1,$$

redzam, ka jāievie viena lineāra saite. Šī saite jāievie tā, lai sistēma att. 3.31b kļūtu ģeometriski nemainīga, tātad jānovērš iespējama stienņa CD pārvietojums horizontālā virzienā. Ievadam saiti punktā C. Otrs liekais nezināmais ir šīs saites pārvietojums Z_2 . Tā kā esam ievaduši divas papildus saites, tad apskatāmā sistēma ir divas reizes kinemātiski nenoteicama un kanonisko vienādojumu sistēma satur divus vienādojumus.

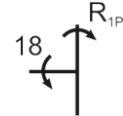
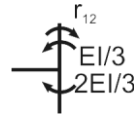
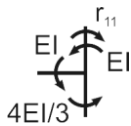
Lai noteiktu kanonisko vienādojumu sistēmas koeficientus un brīvos locekļus konstruējam epīras:



att. 3.32

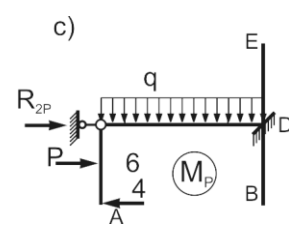
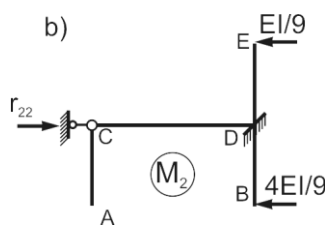
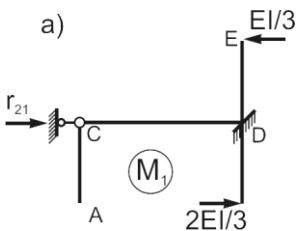
Konstruējot att. 3.32 parādītās epīras izmantotas sekojošas īpatnējo stingumu $i_i = (EI)_i / l_i$ vērtības: $i_1 = 2EI / 6 = EI / 3$; $i_2 = i_3 = EI / 3$.

Pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientus un brīvo locekli, kas būtībā ir momenti ievestajā iespīlējumā, nosakām izgriežot mezglu D un sastādot tam momentu līdzsvara vienādojumus:



$$r_{11} = EI + EI + \frac{4EI}{3} = \frac{10EI}{3}; \quad r_{12} = \frac{EI}{3} - \frac{2EI}{3} = -\frac{EI}{3}; \quad R_{1P} = 18.$$

Otrā kanoniskā vienādojuma koeficientus, kas ir piepūles ievestajā lineārajā saitē, nosakām nogriežot sistēmu pa balstiem un sastādot projekciju vienādojumus:



$$r_{12} = \frac{EI}{3} - \frac{2EI}{3} = -\frac{EI}{3} \quad r_{22} = \frac{EI}{9} + \frac{4EI}{9} = \frac{5EI}{9} \quad R_{2P} = 4 - P = -4$$

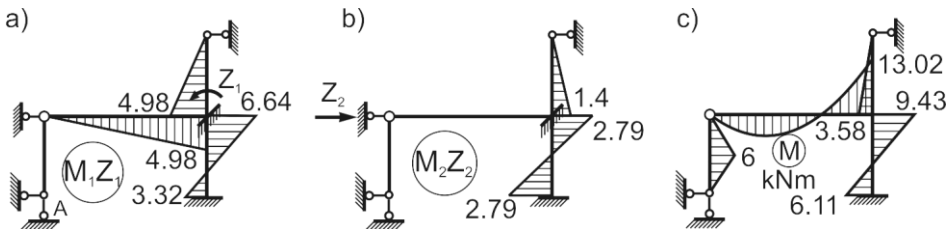
Ievietojot kanonisko vienādojumu sistēmā atrastās koeficientu un brīvo locekļu vērtī-

bas un to atrisinot iegūstam:

$$Z_1 = -4.98 / EI ; \quad Z_2 = 4.2 / EI .$$

Lieces momentu epīru statiski nenoteicamajai sistēmai att. 3.33c iegūstam atbilstoši

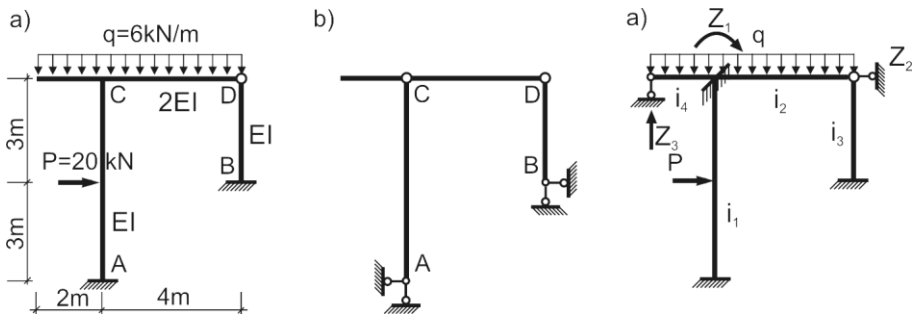
sakarībai $M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p$ summējot epīras att. 3.33a,b un att. 3.32c.



att. 3.33

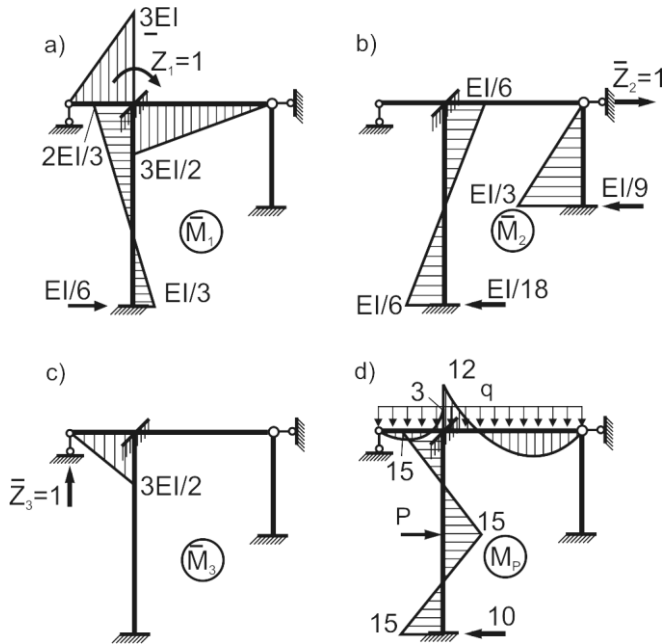
Iegūtā momentu epīra (att. 3.33c) praktiski sakrīt ar momentu epīru (att. 2.25a), kas iegūta šo pašu piemēru risinot ar spēku metodi. Tas pats sakāms par Q un N epīrām.

Piemērs 3.4. Uzkonstruēt lieces momentu (M), šķērsspēku (Q) un ass spēku (N) epīras statiski nenoteicamam rāmim (att. 3.34a).



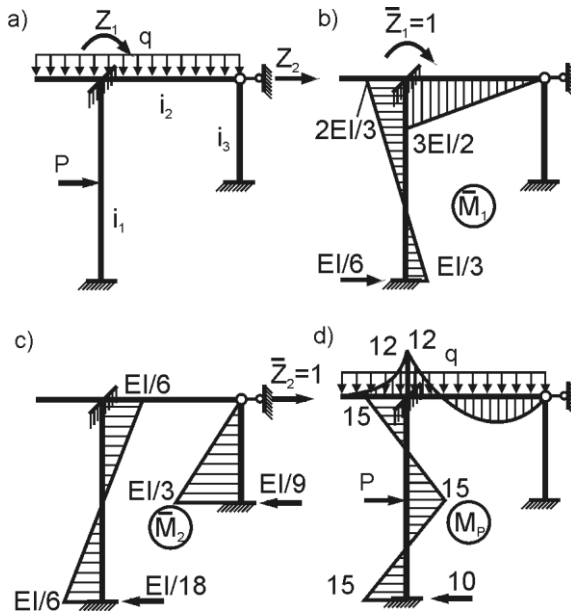
att. 3.34

Atrisinājums. Pieejot pamatsistēmas izvēlei formāli, jāieved iespīlējums stingā mezglā C (nezināms pagrieziens Z_1). Ievietojot visos stingos mezglos, ieskaitot balstus, locīklas (att. 3.34b) un veicot struktūras analīzi, varam konstatēt, ka jāieved papildus lineārās saites punktā D horizontālā virzienā (nezināms pārvietojums Z_2) un konsoles galā vertikālā virzienā (nezināms pārvietojums Z_3). Līdz ar to dotā sistēma ir trīs reizes kinemātiski nenoteicama. Lai noteiktu trīs kanonisko vienādojumu koeficientus, jāapskata att. 3.35 parādītās epīras.



att. 3.35

soles daļā patiesībā nav atkarīga no statiski nenoteicamās sistēmas aprēķina ar spēku vai pārvietojumu metodi. Sevišķi būtiski šo īpašību ir ievērot veicot nepārtrauktas sijas ar konsolēm aprēķinu.



att. 3.36

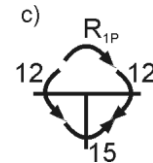
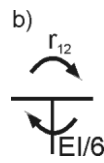
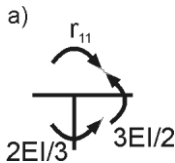
Sistēmas kinemātiskās nenoteicamības pakāpi iespējams samazināt par vienu vienību, ja rāmja konsolei galā neievedam lineāro saiti, bet šo konsoli apskatām kā statiski noteicamu elementu.

Mums ir pamats tā rīkoties, jo momentu epīru rāmja konsolē vienmēr ir iespējams uzkonstruēt izvēloties sistēmas daļu no šķēluma uz konsoles brīvo galu. Tātad momentu epīra rāmja kon-

Pamatsistēma gadījumā, ja konsole tiek pieņemta par statiski noteicamu elementu dota att. 3.36a. Šajā gadījumā ir tikai divi nezināmi pārvietojumi Z_1 un Z_2 un to atrašanai nepieciešami divi kanoniskie vienādojumi. Epīras kanonisko vienādojumu koeficientu un brīvo locekļu noteikšanai dotas att. 3.36b,c,d. Ir svarīgi saprast, ka rāmja konsolē no iespīlējuma pagrieziena, gadījumā ja konsoles galā nav saites, moments nerodas

(att. 3.36b), atšķirībā no gadījuma, kad saite ir ievesta (att. 3.35a). Atšķiras arī slodzes epīras M_p (att. 3.35d un att. 3.36d).

Pirmā kanoniskā vienādojuma koeficientu un brīvā locekļa noteikšanai izgriežam mezglu C un sastādam momentu līdzsvara vienādojumus:

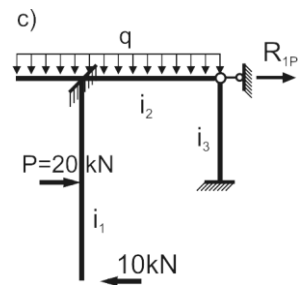
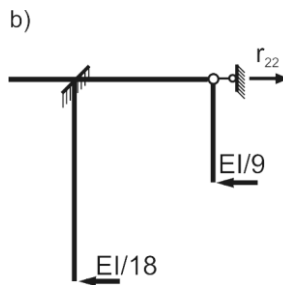
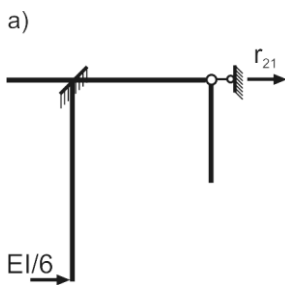


$$r_{11} = \frac{3EI}{2} + \frac{2EI}{3} = \frac{13EI}{6};$$

$$r_{12} = -\frac{EI}{6};$$

$$R_{1P} = 12 + 15 - 12 = 15.$$

Otrā kanoniskā vienādojuma koeficientus un brīvo locekli nosakam nogriežot sistēmu pa balstiem un sastādot projekciju vienādojumus:



$$r_{12} = -\frac{EI}{6};$$

$$r_{22} = \frac{EI}{9} + \frac{EI}{18} = \frac{EI}{6};$$

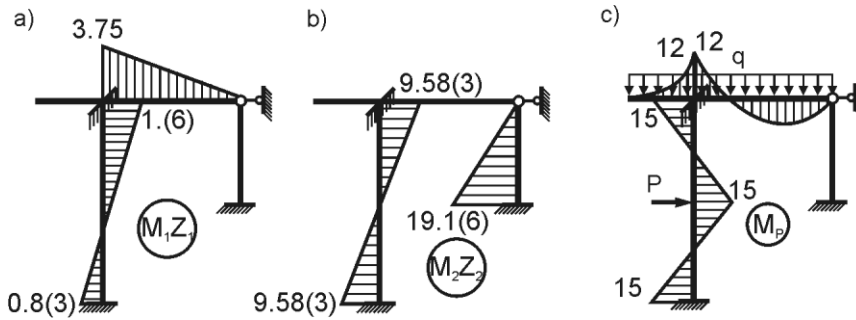
$$R_{1P} = 10 - P = -10.$$

Ievietojot iegūtās koeficientu vērtības kanoniskajos vienādojumos

$$\begin{cases} \frac{13EI}{6} Z_1 - \frac{EI}{6} Z_2 + 16 = 0 \\ -\frac{EI}{6} Z_1 + \frac{EI}{6} Z_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

un tos atrisinot iegūstam:

$$Z_1 = -2.5/EI; \quad Z_2 = 57.5/EI.$$



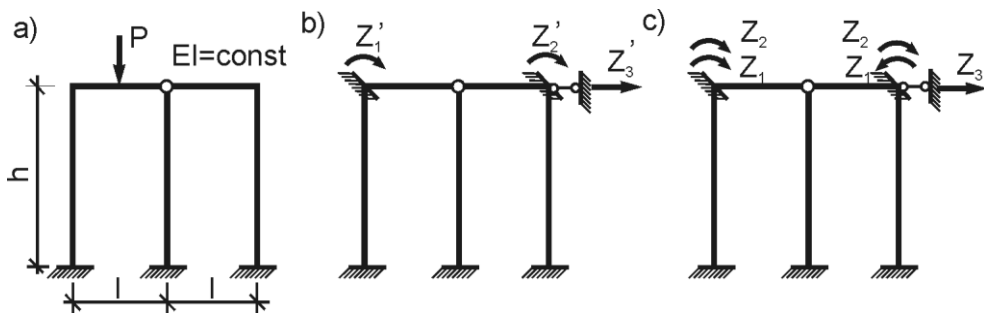
att. 3.37

Lieces momentu epīru statiski nenoteicamajai sistēmai iegūstam atbilstoši sakarībai

$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_P$ summējot att. 3.37 dotās epīras. Gan lieces momentu gan, protams, arī šķērsspēku un asspēku epīras sakrīt ar att. 2.19j-l dotajām, kas iegūtas šo pašu piemēru risinot ar spēku metodi.

3.6. Simetrijas izmantošana pārvietojumu metodē

Aprēķinot simetriskus rāmjus pēc pārvietojuma metodes, tāpat kā pie aplēses pēc spēku metodes, var izmantot nezināmo grupēšanu, kā arī ārējās slodzes sadalīšanu simetriskā un apgriezti simetriskā. Šajos gadījumos daļa koeficientu pie nezināmajiem pārvēršas par nulli, un kanonisko vienādojumu sistēma tiek sadalīta divās neatkarīgās sistēmās, no kurām pirmajā ietilpst tikai simetriski, bet otrajā tikai apgriezti simetriskie nezināmie.



att. 3.38

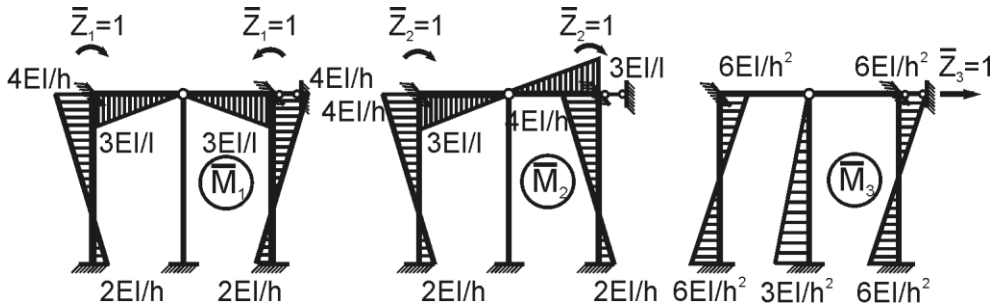
Pirmajā pamatsistēmas variantā (att. 3.38b), neviena no lieces momentu epīrām nebūs ne simetriska, ne apgriezti simetriska un vajadzēs risināt trīs vienādojumu

sistēmu ar trīs nezināmajiem.

Ja par nezināmajiem pieņem nevis atsevišķus pārvietojumus, bet pārvietojumu grupas (att. 3.38c), tad iegūst simetriskas un apgriezti simetriskas lieces momentu epīras (att. 3.39), bez tam jāizpildās nosacījumiem:

$$Z_1' = Z_1 + Z_2,$$

$$Z_2' = Z_2 - Z_1.$$



att. 3.39

Tā kā apgriezti simetriskas un simetriskas epīras reizinājums dod nulli, tad

$$r_{12} = r_{21} = r_{13} = r_{31} = 0$$

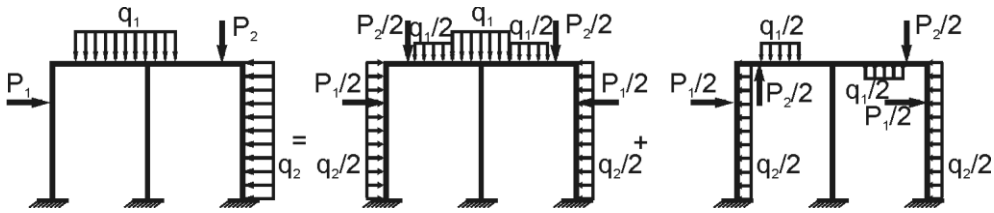
un kanonisko vienādojumu sistēma sadalās divās daļās - daļā, kas satur simetriskos un daļā, kas satur apgriezti simetriskos nezināmos

$$r_{11} Z_1 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2P} = 0;$$

$$r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3P} = 0.$$

Arī jebkuru ārējo slodzi var sadalīt divās daļās, no kurām viena ir simetriska, bet otra apgriezti simetriska (att. 3.40). Ārējās slodzes sadalījums ļauj vienkāršot kanonisko vienādojumu sistēmas brīvo locekļu aprēķinu - piemēram, ja jāreizina simetriska epīra ar slodzes epīru, tad pietiek šo epīru sareizināt ar slodzes epīras simetrisko daļu, jo šīs epīras reizinājums ar slodzes epīras apgriezti simetrisko daļu vienāds ar nulli. Vajadzības gadījumā var rēķināt doto sistēmu neatkarīgi simetriskai slodzei un apgriezti simetriskai slodzei un iegūtās piepūļu epīras summēt atbilstoši spēku darbības neatkarības principam.

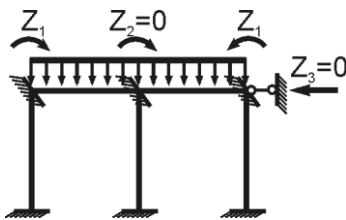


att. 3.40

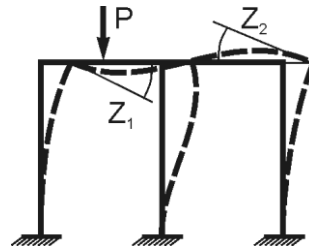
Atzīmēsim sekojošas **simetrisku rāmju īpašības**:

1) ja uz simetrisku rāmi darbojas tikai simetriska slodze:

- a) simetrisku mezglu pagriezienu leņķi ir vienādi pēc skaitliskā lieluma, bet pretēji vērsti (att. 3.41);
- b) nav mezglu lineārā pārvietojuma;
- c) uz simetrijas ass nenotiek mezglu pagriešanās;



att. 3.41



att. 3.42

2) ja uz simetrisku rāmi darbojas apgriezti simetriska slodze:

- a) simetriskie mezgli pagriežīsies par vienu un to pašu lielumu pēc skaitliskās vērtības un virziena (att. 3.42) $Z_1 = Z_2$;
- b) parādās mezgla lineārie pārvietojumi, pie kam visi stabi pārvietojas par vienu un to pašu lielumu uz vienu un to pašu pusi.

3.7. Kombinētā rāmju aplēses metode

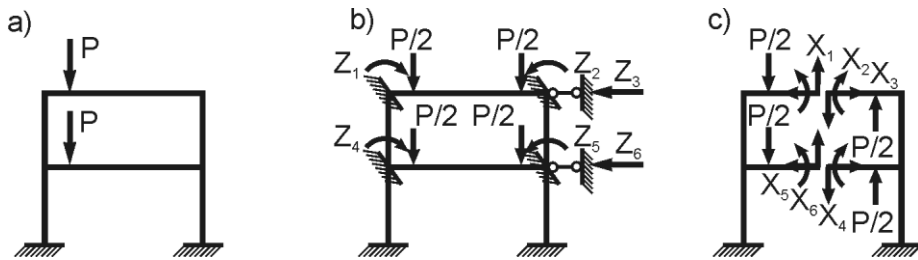
Simetrisku rāmju aplēsei bieži izdevīgi izmantot kombinēto rāmju aplēses metodi. Tiek izmantotas sekojošas simetrisku rāmju īpašības:

1) pie simetrisku rāmju aplēses ar spēku metodi uz apgriezti simetrisku slodzi, paliek

tikai apgriezti simetriskie nezināmie (simetriskie nezināmie ir vienādi ar nulli);

2) pie simetrisku rāmjū aplēses uz simetrisku slodzi ar deformāciju metodi, lineārie pārvietojumi ir vienādi ar nulli un simetrisko mezglu pagriezieni ir vienādi pēc absolūtās vērtības.

Lai izmantotu šīs īpašības, ārējā slodze jāsadala simetriskā un apgriezti simetriskā. Aprēķinu uz simetrisko slodzi veic pēc pārvietojuma metodes, uz apgriezti simetrisko slodzi pēc spēku metodes.



att. 3.43

Piemēram, att. 3.43. parādītajam rāmim vispārīgā gadījumā, kā pēc spēku, tā pēc pārvietojumu metodes ir pa sešiem nezināmajiem.

Rēķinot pēc pārvietojumu metodes uz simetrisku slodzi, ir tikai divi nezināmie, jo

$$Z_3 = Z_6 = 0;$$

$$Z_1 = Z_2, \quad Z_4 = Z_5,$$

tāpat kā pie aplēses pēc spēku metodes uz apgriezti simetrisku slodzi, jo simetriskie nezināmie $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$.

Tātad sešu vienādojumu sistēmas vietā jārisina divas reizes pa diviem vienādojumiem.

4. SKAITLISKO METOŽU PIELIETOJUMS BŪVMEHĀNIKAS PROBLĒMU RISINĀJUMOS

Sarežģītu stieņu sistēmu ar lielu elementu skaitu un augstu statistiskās nenoteicamības pakāpi aprēķins saistīts ar lielām izskaitļošanas grūtībām, kuras veiksmīgi pārvarēt ļauj elektronu skaitļojamās mašīnas (ESM). ESM rašanās un pilnveidošana būtiski izmainīja pašu aprēķinu formu. Kā viena no piemērotākajām ESM izmantošanas formām kļuva matricu vienādojumu forma. Neatkarīgi no aprēķināmās konstrukcijas sarežģītības pakāpes visas spēku vai pārvietojumu metodes izskaitļošanas operācijas tiek veiktas matricu algebras ietvaros kompaktā un viegli pārskatāmā formā.

Stieņu sistēmu statistiska slogojuma gadījumos matricu pielietojums tiek balstīts uz sistēmas daļījumu atsevišķos elementos, kuri diskreti savienoti savā starpā tā saucamajos mezglos. Kopņveida konstrukciju gadījumā par šādu elementu parasti tiek uzskatīts stienis starp diviem mezgliem. Rāmja idealizēta aprēķina shēma tiek veidota aizstājot līklīnijas stieņa asi ar minimāla skaita laužas līnijas posmiem (elementiem). Ja stieņa šķērsgriezuma laukums ass virzienā mainās, tas tiek sadalīts atsevišķos posmos ar atšķirīgu stingrību. Izklidēta slodze bieži vien (bet ne obligāti) tiek aizstāta ar ekvivalentiem koncentrētiem spēkiem. Lauzto līniju cenšas izvēlēties tā, lai laužuma punkti sakristu ar šķērsgriezuma izmaiņas vietām un būtu koncentrēto spēku pielikšanas punkti.

Tādā veidā tiek panākts, ka visa stieņu sistēma sastāv no atsevišķiem prizmatiskas formas elementiem. Konstrukcijas pārējās daļas iedarbi uz atsevišķu elementu (tā garums l_i) aizstājam ar piepūlēm M_i , N_i , Q_i vienā tā galā un M_{i+1} , N_{i+1} , Q_{i+1} – otrā galā.

4.1. Būvmehānikas problēmu risinājumi ar tuvinātām metodēm

Būvmehānikas pamatzdevums ir noteikt deformatīvo un spriegumstāvokli būvkonstrukciju elementos, kurš rodas ārējās slodzes un temperatūras iedarbībā. Tā atrisināšanai tiek izveidotas enerģētiskās un citas lietisķās aprēķinu metodes, kuru pamatā ir trīs veida sakarības:

- **fizikālās**, kuras raksturo materiāla deformatīvās īpašības (lineāri elastīga izo-

- tropa materiāla gadījumā tās ir vispārinātā Huka likuma 6 vienādojumi);
- **ģeometriskās**, kuras izsaka deformācijas caur pārvietojumu funkcijām (tās ir sešas Koši izteiksmes diferenciālā formā);
 - **līdzsvara**, kuras saista spriegumu komponentes konstrukcijā un ārējās slodzes (trīs diferenciālvienādojumi).

Tātad kopējā sistēma sastāv no 15 vienādojumiem, kuri satur 15 nezināmos: sešas spriegumu komponentes, sešas relatīvās deformācijas un trīs pārvietojumus. Sistēmas atrisinājumam jāapmierina robežnosacījumi uz ķermeņa virsmas.

Šādas problēmas nostādne likta pamatā elastības teorijai. Diemžēl jāatzīst, ka pat visai vienkāršu un idealizētu reālo konstrukciju aprēķina modeļu gadījumos nav iespējams iegūt precīzu problēmas atrisinājumu. Sakarā ar to praksē plašu pielietojumu guvušas tuvinātas metodes. Šīs metodes nosacīti var sadalīt trīs grupās: **kontinuālās**, **diskrētās** un **diskrēti – kontinuālās**.

Par **kontinuālām sauc metodes**, kurās aprēķināmā sistēma tiek uzskatīta par nepārtrauktu vidi (kontinuumu), pie kam to aprakstošās funkcijas, piem., pārvietojumi, aproksimējamas ar gludām koordinātu funkcijām.

Diskrēto metožu, kuru straujā attīstība pēdējos gados saistīta ar skaitļojamās tehnikas pilnveidošanos, **pamatā** ir uzdevuma par nepārtrauktu funkciju noteikšanu aizvietošana ar uzdevumu par šo funkciju vērtību noteikšanu galīga skaita konstrukcijas punktos.

Kā jau liecina nosaukums, **diskrēti - kontinuālās ir** jaukta tipa **metodes**, kurās meklējamās funkcijas pēc viena no argumentiem tiek noteiktas diskrētos punktos, bet pēc citas koordinātes tiek iegūts nepārtraukts atrisinājums.

Pievērsīsimies visvairāk izmantojamajām tuvinātajām aprēķinu metodēm:

I) V. Ritca izvirzīto tuvināto **metodi**, kuras pamatā ir Lagranža variāciju princips, būvmehānikas uzdevumos ieviesa S. Timošenko. Šī metode attiecināma uz kontinuālo metožu grupu. Metodes galvenā ideja, kura ļauj kardināli vienkāršot risinājumu, saistīta ar to, ka nosakāmie pārvietojumi tiek meklēti iepriekš uzdotu funkciju summas veidā, kuras tiek izvēlētas pamatojoties uz eksperimentiem, intuīciju vai vienkāršāku uzdevumu atrisinājumiem.

Funkciju rindu veidā izteiktās pārvietojumu komponentes satur galīgu skaitu nezināmu konstanšu, kuru noteikšana ir metodes pamatzdevums.

Ievietojot pārvietojumu izteiksmes pilnās enerģijas izteiksmē un veicot integrēšanu, iegūstam pilno enerģiju kā nezināmo koeficientu funkciju. Saskaņā ar Lagranža principu šādas funkcijas minimums nosakāms pielīdzinot nullei visus pilnās enerģijas atvasinājumus pēc nezināmajiem koeficientiem. Tā rezultātā nonākam pie lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas, kuru skaits vienmēr ir vienāds ar nezināmo vienādojumu koeficientu skaitu. Atrisinot šo sistēmu, esam noteikuši pārvietojumu izmaiņas likumu konstrukcijā. Tas dod iespēju noteikt kā deformāciju tā arī spriegumu sadalījumu, un tādā veidā tiek iegūts uzdevuma pilns atrisinājums. Tātad resumējot varam secināt, ka minimizējot pilno enerģiju tiek atrastas tuvinātas nezināmo funkciju izteiksmes un uz iegūto rezultātu pamata tuvinātā veidā tiek iegūts meklējamais rezultāts.

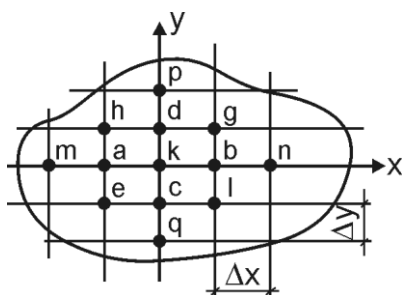
Minimizējot pilno enerģiju, tiek meklēts pārvietojumu sadalījums, kurš ir iespējami tuvs patiesajam.

II) Tuvināto metodi, kura pamatojas uz iespējamo pārvietojumu principu, un uzdevuma risinājumu identificē ar algebras vienādojumu sistēmas atrisināšanu, radījis I. Bubnovs, bet būvmehānikas uzdevumu risināšanā plaši ieviesis B. Gaļorkins. Metodes ietvaros pārvietojumi, tāpat kā Ritca metodē, tiek uzdoti aproksimējošo funkciju rindu veidā. Metodes pamatvienādojumus iegūst pielīdzinot nullei katra pārvietojuma iespējamo darbu. Līdzīgā veidā ir iegūtas arī citas kontinuālās grupas metodes. Tās atšķiras savā starpā ar izejas hipotēzēm, bet saglabā algoritma būtību. Tā, plakanu darinājumu aprēķinos, nezināmie pārvietojumi tiek uzdoti ar divu funkciju reizinājumu summām, pie kam vienu funkciju kopa ir atkarīga tikai no vienas koordinātes. Metodes pamatvienādojumus veido parastu lineāru diferenciālvienādojumu sistēma.

Iepriekš izklāstītās tuvinātās metodes bija balstītas uz pārvietojumu funkciju izvēli. Analogi var tikt izveidota arī kontinuāla metode, kurā tiek ievestas spriegumu maiņas funkcijas, rindu ar konstantiem nezināmiem koeficientiem veidā. Šie koeficienti tiek noteikti uz mazāka darba principa pamata.

Kontinuālās aprēķinu metodes dod iespēju iegūt tuvinātu analītisku atrisinājumu, diemžēl ar to palīdzību ne vienmēr izdodas iegūt praktiski pieņemamu rezultātu dau-

dziem svarīgiem uzdevumiem.



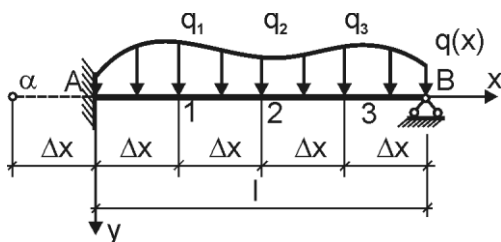
att. 4.1

III) Pēdējos gados plašu pielietojumu ieguvušas skaitliskās metodes, kuras balstītas uz aprēķināmās konstrukcijas diskretizāciju. Šo metožu pamatā ir diferencēšanas operāciju aizstāšana ar galīgām diferencēm. Tā rezultātā diferenciālie vienādojumi tiek pārveidoti par algebriskiem vienādojumiem.

Gadījumā, ja uzdevuma atrisinājumu veido parasti diferenciālvienādojumi, tad metodi sauc par galīgo diferencu metodi, bet parciālvienādojumu gadījumā metodi sauc arī par tīkla metodi. Pirmajā gadījumā integrēšanas intervāls tiek sadalīts nogriežņos ar garumu Δx , bet otrajā gadījumā ķermenis tiek sadalīts ar ortogonālu tīklu taisnstūros ar malu garumiem Δx un Δy (att. 4.1).

Piemērs 4.1. Noteikt sijas izlieces ar galīgo diferencu metodi.

Piemēra veidā iepazīsimies ar metodes būtību un pielietojuma algoritmu. Jānosaka att. 4.2 dotās sijas ar mainīgu šķēsgriezumu izlieces patvaļīgi izkliedētas slodzes gadījumā.



att. 4.2

Atrisinājums. No lieces teorijas un diferenciālām sakarībām starp piepūlēm un slodzi liektā elementā iegūstam:

$$M = -EI(x)v''; \quad M'' = -q. \quad (4.1)$$

Sadalām siju četros posmos ar garumiem $\Delta x = l/4$ un pārrakstām vienādojumu

(4.1) galīgās diferencēs. Lai to veiktu, jāņem vērā, ka funkcijas atvasinājumi patvaļīgā punktā k tiek aizvietoti ar šo funkciju vērtībām šai punktā un tam blakus esošajos punktos. Metodē tiek izmantotas sekojošas sakarības:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_k = \frac{1}{2\Delta x} (f_{k+1} - f_{k-1}).$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_k = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})$$

Tātad šijas punktos 1, 2, 3 iegūstam

$$\begin{aligned} M_A - 2M_1 + M_2 &= -q_1 \Delta x^2 \\ M_1 - 2M_2 + M_3 &= -q_2 \Delta x^2 \\ M_2 - 2M_3 + M_B &= -q_3 \Delta x^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Tā kā šijas labais gals ir brīvi balstīts, tad ir spēkā nosacījums $M_B=0$.

Ņemot vērā, ka saskaņā ar vienādojumu (4.1) jebkurā šijas punktā izpildās sakarības $M_k = IE(d^2 v / dx^2)_k$, kur $k = A, 1, 2, 3$, sistēmu (4.2) var pārrakstīt galīgās diferencēs caur pārvietojumiem.

Tādā gadījumā iegūstam

$$\begin{aligned} EI_A(v_a - 2v_1 + v_2) - 2EI_1(v_a - 2v_1 + v_2) + EI_2(v_1 - 2v_2 + v_3) &= q_1 \Delta x^4, \\ EI_1(v_a - 2v_1 + v_2) - 2EI_2(v_1 - 2v_2 + v_3) + EI_3(v_2 - 2v_3 + v_B) &= q_2 \Delta x^4, \\ EI_2(v_1 - 2v_2 + v_3) - 2EI_3(v_2 - 2v_3 + v_B) &= q_3 \Delta x^4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

No ģeometriskiem nosacījumiem kreisā galā stingri iespīlētai šijai izriet, ka

$$v_A = 0, \quad (dv/dx)_A = 0.$$

Pārrakstot otro nosacījumu galīgās diferencēs, iegūstam sakarību

$$\frac{1}{2\Delta x} (v_1 - v_a) = 0,$$

no kuras iegūstam pārvietojuma vērtību fiktīvā “aizkontūra” punktā **a**. Šī vērtība ir vienāda ar pārvietojuma vērtību punktā 1, t.i. $v_a = v_1$. Tā kā balstā B vertikālā pārvietojuma nav, t.i. $v_B = 0$, tad vienādojumus (4.3) varam pārrakstīt sekojošā veidā:

$$(2I_A + 4I_1 + I_2)v_1 - 2(I_1 + I_2)v_2 + I_2v_3 = \frac{q_1 \Delta x^4}{E}$$

$$-2(I_1 + I_2)v_1 + (I_1 + 4I_2 + I_3)v_2 - 2(I_2 + I_3)v_3 = \frac{q_2 \Delta x^4}{E}, \quad (4.4)$$

$$I_2 v_1 - 2(I_2 + I_3)v_2 + (I_2 + 4I_3)v_3 = \frac{q_3 \Delta x^4}{E}$$

Iegūtie trīs vienādojumi satur trīs nezināmos v_1 , v_2 un v_3 . Speciālā gadījumā, ja $I = I_0 = \text{const}$, bet $q = q_0 = \text{const}$, iegūstam sistēmu

$$7v_1 - 4v_2 + v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0},$$

$$-4v_1 - 6v_2 - 4v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0},$$

$$v_1 - 4v_2 + 5v_3 = \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0},$$

kuru atrisinot nosakām trīs pārvietojumu vērtības:

$$v_1 = 0,909 \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}; \quad v_2 = 1,682 \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}; \quad v_3 = 1,364 \frac{q_0 \Delta x^4}{EI_0}$$

.

Zinot izlieču vērtības atsevišķos punktos, varam noteikt lieces momentus atbilstošajos šķēlumos. Tā, piem., šķēlumā A lieces momenta vērtība ir

$$M_A = EI_A \left(d^2 v / dx^2 \right)_A,$$

vai galīgo diferencu formā

$$M_A = EI_A \frac{(v_a + v_1 - 2v_A)}{\Delta x^2}.$$

Tā kā bija pieņemts, ka I un q ir konstanti pa visu sijas garumu, tad iegūstam vērtību

$$M_A = 1,818 q_0 \Delta x^2 = 0,144 q_0 l^2$$

Patiesā vērtība (to konkrētajā gadījumā iespējams noteikt analītiski ar spēku vai pārvietojumu metodes palīdzību) ir $M_A = 0,125 q_0 l^2$. Atšķirība starp šiem rezultātiem ir 8,8

%. Tā ir galīgo diferenču metodes kļūda konkrētajam uzdevumam pie izvēlētajas dalījuma nogriežņos. Realizētajā aprēķinu gadījumā tika noteiktas tikai trīs pārvietojumu un lieces momentu vērtības sijas laidumā. Parasti mūs interesē daudz lielāks šādu punktu skaits. Palielinot dalījuma punktu skaitu nonākam pie liela apjoma algebrisku vienādojumu sistēmas. Izmantojot datorus dalījumu skaitu var būtiski palielināt un tādā veidā paaugstināt metodes efektivitāti. Uzdevums viegli programmējams un studenti var to veikt patstāvīgi. Palielinot dalījumu skaitu iegūstam "gludākas" nezināmo (pārvietojumu, momentu u.c.) izmaiņas līknes. Toties aktuāls kļūst jautājums par aprēķinu gaitā uzkrātajām kļūdām.

Līdzīgi kā galīgo diferenču metode tiek veidotas arī citas metodes. Varam minēt variāciju – diferenču metodi, lokālo variāciju metodi, kolonāciju metodi u.c.

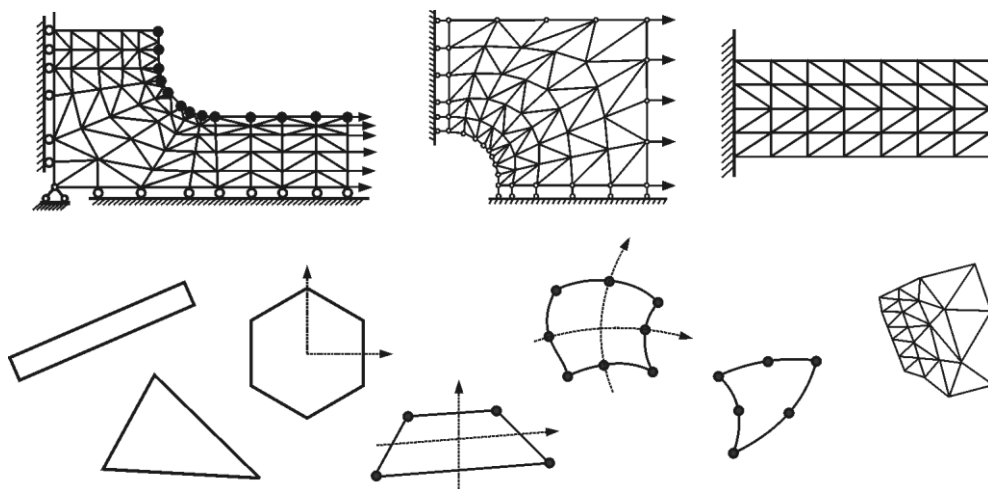
Nobeigumā varam atzīmēt, ka iepriekšminētās metodes, sevišķi galīgo diferenču un lokālo variāciju metodes ir universālas, bet izskaitļošanas ziņā darbietilpīgas. Šo trūkumu var novērst skaitļojamās tehnikas izmantošana. Skaitlisko metožu iespējas sarežģītu, tai skaitā nelineāru būvmehānikas uzdevumu risināšanā, kuri praktiski nav atrisināmi analītiskā veidā, padarījušas tās praktiski nepieciešamas reālajā aprēķinu praksē.

4.2. Galīgo elementu metode būvmehānikas uzdevumos

GEM tāpat kā citas skaitliskās metodes ir tuvināta metode, kuras pielietojums sevišķi piemērots un nepieciešams sarežģītu neregulāru konstrukciju aprēķinos. GEM ideja tāpat kā daudzām tuvinātām metodēm ir aizvietot vispārīgā gadījumā kontinuālu sistēmu ar citu – diskretu sistēmu. Salīdzinot ar klasiskajām tuvinātajām metodēm, kuras tika apskatītas iepriekš, diskretizācijas procedūra GEM ir zināmā mērā specifiska. Tās būtība ir sekojoša. Vispirms konstrukcija tiek pārklāta ar tīklu un tādā veidā tiek sadalīta atsevišķos fragmentos ar galīgiem izmēriem. Šos fragmentus sauc par **galīgiem elementiem**.

Tīklu izvēlas atbilstoši konstrukcijas ģeometrijai un struktūras īpatnībām, pie kam šīs izvēles pamatā ir prasība, lai galīgo elementu forma būtu pēc iespējas vienkāršāka, bet nodrošinātu iespēju iegūt nepieciešamo aprēķina precizitāti. Ja stienveida sistēmām galīgais elements parasti ir viendimensionāls nogrieznis, tad plātņu un čaulu aprēķinos

tiek izmantoti plakani vai izliektas formas trīsstūri, četrstūri, rombi, paralelogrami un citas figūras. Att. 4.3 parādīti dažādas formas galīgo elementu piemēri. Galīgie elementi vienas konstrukcijas ietvaros var mainīties ne tikai pēc formas, bet arī pēc lieluma. Lokālos augsta gradienta apgabalos (asas kontūras izmaiņas, caurumi, atšķirīgu materiālu saskares virsmas) dalījums galīgos elementos ir daudz sīkāks kā pārējā konstrukcijas daļā.



att. 4.3

Nākamais konstrukcijas diskretizācijas etaps, kuram ir matemātisks raksturs, saistīts ar meklējamās funkcijas, piem., pārvietojuma, aproksimāciju ar galīga skaita lokālām koordinātu funkcijām. Tādas funkcijas atšķiras no nulles tikai nelielā konstrukcijas apgabalā (ar tīkla soļa kārtu). Ar to arī diskretizācijas procedūra ir beigusies.

Jāatceras, ka metodes nosaukumā lietotais apzīmējums “galīgais” norāda uz divām metodes īpatnībām – pirmkārt, uz metodes diskrēto raksturu, sadalot konstrukciju galīga izmēra elementos, otrkārt, uz atsevišķa elementa galīgo brīvības pakāpju skaitu un tā stāvokļa raksturojuma iespējām ar galīgu parametru skaitu. Koordinātu funkciju lokalizācija ir **GEM** īpatnība. Tā ļauj nodrošināt sekojošas *metodes īpašības*:

- koordinātu funkciju izveides vienkāršību;
- augstu universālumu plašas būvmehānikas uzdevumu grupas risinājumos;
- metodes procedūras realizāciju ar standartalgoritmiem, kuri ērti realizējams ar elektronu skaitļojamām mašīnām.

Rīgas Tehniskā universitātē ir uzkrāta bagātīga pieredze darbam ar GEM risinot kompozītu struktūru mehānikas problēmas. Latviešu valodā GEM izklāstam veltīta nodaļa RTU prof. E. Lavendeļa materiālu pretestības mācību grāmatā (1986), prof. R. Rikarda darbs (1982) “Čaulu un plātņu aprēķini ar GEM” un profesoru R. Rikarda un A. Čates publicētais (2002) lekciju kurss “Galīgo elementu metode” būvniecības fakultātes maģistrantiem. Pēdējā materiālā interesenti var konkrēti iepazīties ar GEM pielietojumu viendimensiju problēmās, kādas rodas risinot stieņu sistēmas.

Vēlreiz jāuzsver, ka GEM svarīgākā priekšrocība ir ne tik daudz spējā veikt liela apjoma matemātiskus izskaitļojumus, kā spēja nodrošināt visai precīzus aprēķinu rezultātus sarežģītas formas un sloojuma plakanām un telpiskām konstrukcijām, kuras nepakļaujas analītiskiem aprēķiniem. GEM paver iespējas veikt procesu un situācijas maiņas analīzi un novērtējumu konstrukciju struktūru un iedarbību izmaiņas gadījumos.

4.3. Stieņu sistēmu aprēķins ar programmu **Analysis for Windows 1.9**

Analysis programma izveidota stieņveida metāla rāmju un kopņu aprēķiniem, bet tā vienlīdz sekmīgi var tikt izmantota arī no citiem materiāliem izgatavotu stieņveida konstrukciju aprēķinos. Pēdējā gadījumā risinātajam pašam no rokas jāievada programmā materiāla mehānisko īpašību raksturlielumi un stieņu šķērsriezuma ģeometriskie parametri. Risinot lokveida konstrukciju to liekto loku varam aizstāt ar daudzposmu lauztu līniju, tādā veidā uzdevumu reducējot uz daudzstieņu rāmi. Lauztās līnijas posmu skaita palielināšana nodrošina rezultātu pakāpenisku tuvošanos noteiktai robežai – loka aprēķina rezultātiem. Aprēķinu prakse rāda, ka praktiski nepieciešamā precizitāte tiek sasniegta pie visai maza lauztās līnijas posmu skaita (8 – 10). Programmas **Analysis** materiāla izvēles daļā (**Materials** → **Data**) tiek piedāvāti četri metāla veidi: **FE310**, **FE360**, **FE430** un **FE510**, kuri atšķiras ar pieļaujamiem spriegumiem robežās no 200 līdz 360 MPa. Programmā izmantots plašs Eironormām atbilstošs stieņu sortiments. Tie ir dubult-T profila stieņi **HEA** ar to šķērsriezumu raksturojošiem kārtas numuriem no **100** līdz **600** (ar soli 20), **HEB 100 – 600**, **HEM 100 – 500**, **INP 80 – 600**, **IPE 80 – 600**, leņķu dzelzs un U profili ar izmēru kārtas numuriem no **80** līdz **400**.

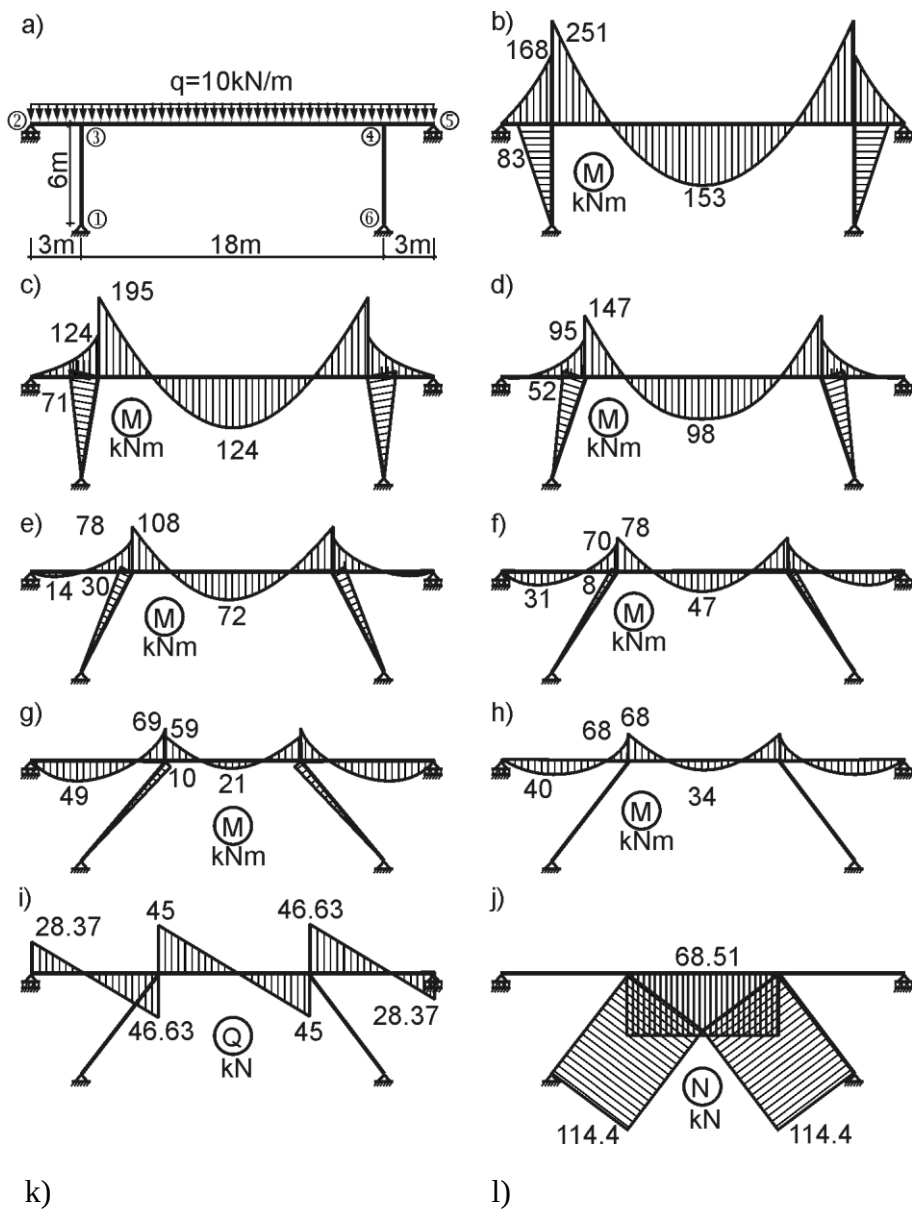
Piemērs 4.2 *Veikt rāmjrveida (att. 4.4) konstrukcijas piepūļu izpēti un optimālā variantā noteikšanu mainoties statu slīpumam.*

Atrisinājums. Piepūļu aprēķinus veicam ar skaitlisko programmu Analysis. Par konstrukcijas realizācijas izejas materiālu izvēlamies metāla stieņus ar profilu **IPE450** no tērauda **FE360**.

Problēmas risinājumu meklējam diskrētu atkārtotu aprēķinu veidā pie fiksētām mezglu **1**, **2**, **5** un **6** koordinātu vērtībām globālajā sistēmā un mainīgām mezglu **3** un **4** koordinātēm šajā pašā sistēmā. Aprēķinus veicam pie ārējās slodzes **$q=10$ kN/m**, neņemot vērā konstrukcijas pašsvaru.

Konstrukcijas realizācijā svarīgs ir jautājums par balstu nostiprinājuma veidu.

Pieņemam, ka balstus **2** un **5** var uzskatīt par kustīgām locīklām, bet balstus **1** un **6** par nekustīgām locīklām. Mezglu **3** un **4** horizontālās koordinātes var mainīties intervālā no 3m līdz 9m. Izvēlamies soli 1 m un veicam atkārtotus rāmja piepūļu aprēķinus. Iegūtās lieces momentu epīras parādītas att. 4.4b-f. Varam secināt, ka robežgadījumos, kad stieņa **3 – 4** garums ir maksimālais ($l = 18$ m), kas atbilst vertikālam statu stāvoklim, lieces momentu ekstremālās vērtības rāmim ir visneizdevīgākās (sk. att. 4b). Samazinoties stieņa **3 – 4** garumam (pie nemainīga kopējā sijas **2 – 5** garuma), vērojama momentu epīru izlīdzināšanās un ekstremālo vērtību samazināšanās. Tas vērojams līdz stāvoklim att. 4.4g, t.i., gadījumam, kad stieņa **3 – 4** garums ir $l_{34} = 7$ m. Sākot ar stāvokli, kad $l_{34} < 9$ m, sāk palielināties lieces momentu ekstremālās vērtības stieņos **2 – 3** un **4 – 5**. Tātad optimālais lieces momentu sadalījums atbilst gadījumam, kad $7 \text{ m} < l_{34} < 9 \text{ m}$. Šai posmā veicot papildus dalījumus konstatējām, ka optimāls ir stieņa **3 – 4** garums $l_{34} = 9$ m (att. 4.4h). Šai gadījumā maksimālās lieces momentu vērtības praktiski ir vienādas stieņos **2 - 3**, **3 - 4**, **4 - 5**, bet lielākā vērtība ir mezgla punktos **3** un **4**, kur tā nepārsniedz vērtību $M_{\max} = 68$ kNm. Varam atzīmēt, ka stieņi **1 – 3** un **4 – 5** optimālajā gadījumā praktiski netiek liekti, bet tikai spiesti. Tātad varam secināt, ka att. 4.4 dotajai rāmja formai attiecībā uz lieces momentiem pie izvēlēta materiāla un stieņu šķērsgriezuma optimālu balstu orientāciju nosaka to leņķis pret horizontu $\alpha_{\text{opt}} = 53^{\circ}$.



att. 4.4

Izvēloties citu rāmja realizācijas materiālu, piem., dzelzsbetonu (sk. att. 4.4k) programmā individuāli jāievada kā sijas, tā arī statu elastīgo un stiprības īpašību parametri un šo elementu šķērsriezumu ģeometriskie parametri. jāņem vērā, ka mainot statu slīpumu, palielinās to garums, kā arī aksiālās piepūles tajos. Tas var radīt papildus problēmas sakarā ar šo slīpo stieņu noturību. Kā jau tika minēts, stieņi, kuri konstrukcijā pie dotās slodzes zaudē noturību ar Analysis veicamo aprēķinu rezultātā iekrāsojas sarkanā krāsā. Tādā gadījumā jāmaina attiecīgā stieņa profils un aprēķins jāatkārto.

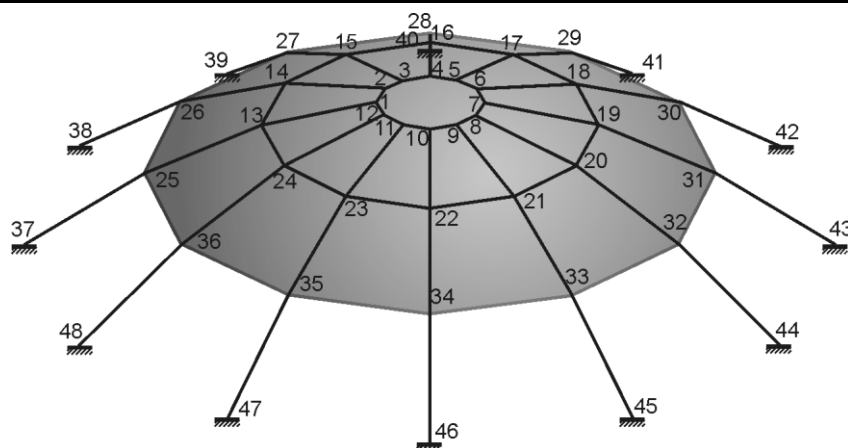
Nosakot slīpo statu noslodzes pakāpi uz noturību (**Results** → **Buckling**), konstatējam, ka izvēlētais profils **IPE450** dod daudzkārtīgu rezervi. Tādēļ profila šķērsriezums var tikt samazināts, piem., uz **IPE240** un tad veikts atkārtots aprēķins. Tas rāda, ka arī šai gadījumā stieņu noturības rezerve ir ~ 2 reizes.

Svarīgs darinājuma kritiskā stāvokļa rādītājs ir pārvietojumi. Gadījumā, ja dotā rāmja rīģēļos ir izmantots profils **IPE240**, maksimālās izlieces stieņos **2 - 3**, **3 - 4** un **4 - 6** nepārsniedz 22 mm. Tas nozīmē, ka laidumā **2 - 3** (arī **4 - 6**), kura garums ir $l_{23} = 7,5$ m relatīvā izliece ir ~ 3%, t.i., tā ir mazāka par 1/300 no sijas laiduma. Rīģelī **3 - 4** tā ir vēl mazāka.

Palielinot rīģeļa šķērsriezuma laukumu, piem., izmantojot profilu **IPE360**, to maksimālās izlieces būtiski samazinās. Galvenā rīģeļa **3 - 4** vidū tā ir 6,5 mm.

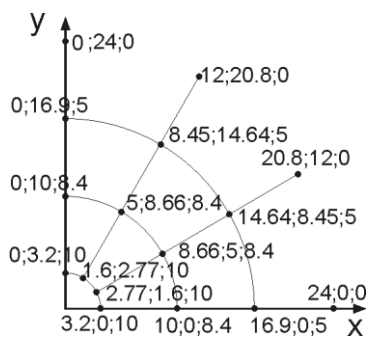
Veicot reālu konstrukciju piepūļu aprēķinus, tiek izmantotas aprēķinu shēmas, kuras balstos piestiprinātas zemei ar konkrētiem balstu veidiem – kustīgām, nekustīgām locīklām vai ar iespīlējumu. Diemžēl reālās konstrukcijās šie stiprinājumi ne vienmēr viennozīmīgi apmierina aprēķinu shēmās uzstādītās prasības attiecībā uz šo balstu reakcijām. Tādēļ bieži vien var uzskatīt, ka reālie balstu nostiprinājumi ir starpstāvoklis starp diviem dažādiem teorētiski izmantotajiem stāvokļiem. Tāds, piem., var būt starpstāvoklis starp nekustīgu locīklu un iespīlējumu. Mūsu gadījumā nomainot nekustīgos locīklu balstus **2** un **5** pret iespīlētiem, konstatējam, ka kopējais rāmju piepūļu – pārvietojumu lauks praktiski nav izmainījies, pie kam būtiski palielinājusies statu **2 - 3** un **4 - 5** noturības rezerve.

Piemērs 4.3. Noteikt piepūles kupolveida pārsegumu veidojošos stieņos (att. 4.5), kurš slogots ar izkliedētu vienības slodzi $q = 1 \text{ kN}$.



att. 4.5

Atrisinājums. Kupolu veido savā starpā stingri savienoti stieņi. To kopskaits ir 72. Tā kā kupols piestiprināts zemei ar stingriem mezgliem, tad izveidotais rāmis ir 216 reizes statiski nenoteicama telpiska sistēma. Piepūļu noteikšanai kupola stieņos izmantosim programmu **Analysis**. Saskaņā ar aprēķinu izpildes instrukciju vispirms jāievada sistēmas mezglu koordinātes. Izvēlamies globālo koordinātu sistēmu ar sākumpunktu kupola pamata plaknes centrā. Koordinātu sistēmas **x ass** vērsta kupola ribas 7-19-31-43 projekcijas uz pamata plaknes virzienā, bet **y ass** ribas 4-16-28-40 projekcijas virzienā. Koordinātu **z ass pozitīvais virziens** vērsts vertikāli uz augšu.

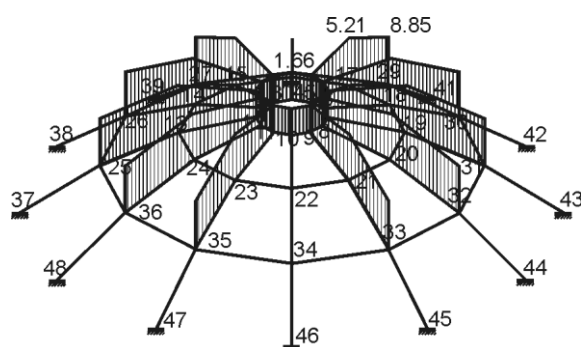


att. 4.6

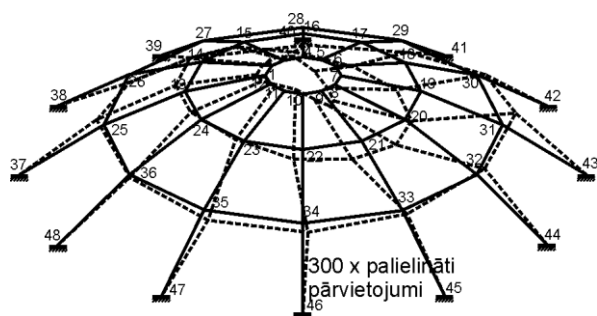
Vienas ceturktās kupola daļas mezgla punktu koordinātes uzdotas att. 4.6. Kupolu veido divpadsmit simetriski izvietotas ribas, kuras savā starpā savienotas ar trim koncentrisku aplū veidā izvietotām stieņu joslām. Kupola pamata diametrs ir 48 m, augstums – 10 m, ribas savienojošo stieņu augstumi attiecīgi ir 5 m, 8,4 m un 10 m.

Kupola aprēķina pamatā izmantojam pieņēmumu, ka ārējo slodzi uzņem kupola ribas, bet savienojošie stieņi nodrošina kupola stabilitāti

ribām transversālajā virzienā. Tādā gadījumā izveidojas kupola elementu noslodze, kura parādīta att. 4.7.



att. 4.7



att. 4.8

Veicot kupola aprēķinu konstatējam, ka kupolu veidojošie stieņi galvenokārt tiek aksiāli spiesti. Stieņu lieces momenti, vērpes momenti un šķērsspēki ir relatīvi mazi un būtiskus spriegumus nerada. Konstrukcijas realizācijai izvēlamies metāla stieņus ar profilu **IPE400** no tērauda **FE 360**. Šajā gadījumā ass spēku epīras parādītas att. 4.9.

Par kupola deformēšanās raksturu var spriest no att. 4.8 parādītās pārvietojumu ainās. Varam konstatēt, ka simetrisks kupols pat pie simetriska slogojuma deformējas nesimetriski – viena līmeņa

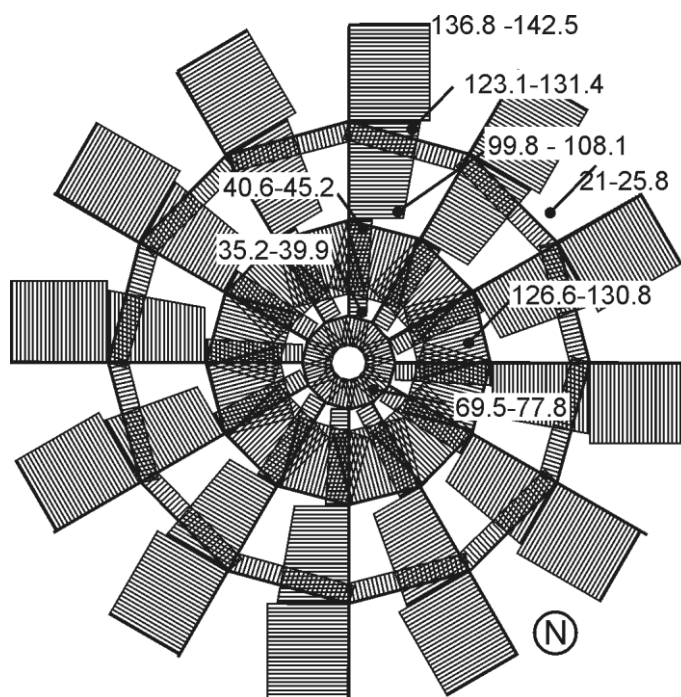
mezgli pārvietojas atšķirīgi. Ar to arī izskaidrojama izkliede ass spēku vērtībām analoģas situācijas stieņos. Aprēķins rāda, ka šī izkliede nav nemaz tik nebūtiska un sasniedz 10%.

Studentam ieteicams patstāvīgi veikt atkārtotu aprēķinu atšķirīgām kupola struktūrām, slodzēm un balstu nostiprinājumiem. Aprēķinu rezultātā svarīgi izdarīt secinājumus par kupola racionālāko struktūru un to realizāciju konkrētu slodžu gadījumos.

4.4. Galīgo elementu metodes precizitātes problēmas

GEM tāpat kā visām pārējām tuvinātajām skaitliskajām metodēm aktuāla ir problēma par atrisinājuma precizitāti. Precizitātes pētījumi saistīti ar kļūdu cēloņu izvērtēšanu, kļūdu lieluma analīzi un procesa konverģences un konverģences ātruma noteikšanu.

Svarīgs šādu pētījumu praktiskais rezultāts ir rekomendācijas aprēķina precizitātes regulēšanai ar pētniekam pieejamiem līdzekļiem.



att. 4.9

Gadījumos, kad risināmais uzdevums vai tā izskaitļošanas algoritms ir visai sarežģīts, praksē teorētiskā analīze tiek papildināta ar skaitlisko eksperimentu, kurš izpildās vai nu ar dotajam uzdevumam vai vienkāršotam uzdevumam, kurš atspoguļo būtiskākās konstrukcijas un tās slodzes īpatnības. Šāda eksperimenta mērķis ir noteikt galīgo elementu tipu un aprēķina tīkla parametrus, kuri dotu iespēju ar aprēķina modeli sasniegt nepieciešamo precizitāti. Plānojot skaitlisko eksperimentu un tā rezultātu patiesīguma novērtējumam tiek izmantoti kā zināmie teorētiskie risinājumi tā eksperimentālie dati.

Atrisinājuma kļūda sastāv no *nenovēršamās kļūdas*, *metodes kļūdas* un *izskaitļojumu kļūdas*.

Nenovēršamā kļūda ir kvantitatīvs raksturlielums, kurš raksturo aprēķina modeļa neatbilstību dotajai konstrukcijai. Šī neatbilstība pamatā no vienas puses ir neprecīzi uzdevuma parametri, bet no otras puses vienkāršoējumi izveidojot aprēķina modeli. Šādi vienkāršoējumu piemēri varētu būt:

- 1) pieņēmums par plānsieniņu elementa bezmomenta spriegumstāvokli;
- 2) izliektas konstrukcijas virsmas aproksimāciju ar plakaniem galīgiem elementiem;
- 3) sarežģītas formas šķērsriezuma nomaiņa ar vienkāršāku.

Nenovēršamā kļūda nav kontrolējama skaitliskā procesā, to iespējams samazināt tikai (izmainot) precizējot izejas pieņēmumus un parametrus. Zinot nenovēršamās kļūdas lielumu, var izstrādāt pamatotas prasības attiecībā uz aprēķina precizitāti nākamajiem to etapiem. Acīmredzot nepamatota būtu prasība sasniegt aprēķina precizitāti lielāku par nenovēršamās kļūdas lielumu.

GEM matemātiskā modeļa kļūda rodas sakarā ar to, ka nosakāmā funkcija tiek aproksimēta ar galīga skaita koordinātu funkcijām. GEM-ē koordinātu funkcijas ir lokalizētas un tiek noteiktas aprēķinu tīkla elementārlaukumiem. Tādēļ metodes kļūdas lielums ir atkarīgs gan no koordinātu funkciju atbilstības meklējamam atrisinājumam, gan no aprēķina tīkla (elementu lieluma un formas). Koordinātu funkciju kvalitāti nosaka to saderīguma nosacījums blakus esošos galīgos elementos un uz to kopējas robežvirsmas.

Izskaitļojumu kļūdas veidojas no noapaļojumu kļūdām veicot aritmētiskas darbības ar skaitļiem, kuriem skaitļojamās mašīnās ir galīgs zīmju skaits. Noapaļojumu kļūda pieaug pieaugot aritmētisko operāciju skaitam.

Izskaitļojumu kļūdas galvenokārt rodas GEM algebrisko vienādojumu sistēmu atrisinājumu gaitā un to cēloņi ir:

- nenovēršamā izejas datu kļūda, kā rezultātā sistēmas $Kp = R$ vietā faktiski tiek risināta sistēma $(K + \Delta K)p = (R + \Delta R)$;
- skaitļa noapaļojuma kļūdas izpildot aritmētiskās darbības GEM galīgam elementu tīklam.

Šī veida kļūdas var radīt paradoksālus rezultātus. Tā, piem., sistēmas

$$\begin{cases} x + 5y = 17 \\ 15x + 7501y = 25500 \end{cases}$$

atrisinājums ir $x = 17, y = 0$, bet visai nedaudz atšķirīgas sistēmas

$$\begin{cases} x + 5y = 17 \\ 15x + 7501y = 25503 \end{cases}$$

atrisinājums ir $x = 2, y = 3$.

Tātad maza vienādojumu koeficientu izmaiņa rada būtisku izmaiņu atrisinājumā. Viens no kļūdu teorijas pamatjautājumiem ir atrisinājuma stabilitātes pārbaude.

Aktuāls ir jautājums par *metodes konverģenci* un tās ātrumu. Parametri, kuri iespaido šo procesu ir koordinātu funkciju polinoma pakāpe p , galīgo elementu tipiskais izmērs a (l – konstrukcijas tipiskais izmērs), izmantojamo diferenciālvienādojumu kārtas $2m$. Tādā gadījumā enerģijas noteikšanas kļūdu un arī visa atrisinājuma kļūdu izsaka sakarība

$$\delta = A \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^{2(p+1-m)}, \quad (4.5)$$

kur A – proporcionalitātes koeficients.

Tātad konverģences ātrums ir atkarīgs no parametra p , pie kam, tā kā $(a/l) < 1$, jo p lielāks, jo lielāks konverģences ātrums. Fiksētas parametra p vērtības gadījumā risinājuma precizitāti regulē galīgo elementu tīkla solis (a). Samazinot soli teorētiski var panākt jebkuru vēlamu precizitāti.

Noapaļojamu kļūdu summēšanās dēļ aprēķina gaitā veidojas nenovēršama kļūda

$$\delta = 10^{-s} \beta (a/l)^{-2m}, \quad (4.6)$$

kur s – skaitļojamajā mašīnā vērā ņemamo decimālo ciparu skaits.

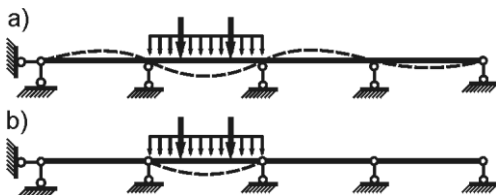
Konstante A saistīta ar aproksimācijas polinoma pakāpi p . Tīkla soļa samazināšana (attiecība a/l) no vienas puses veicina metodes kļūdas samazināšanos atbilstoši (4.5), bet no otras puses atbilstoši (4.6) kļūdas pieaugumu. Tādēļ praktiskos aprēķinos tīkla soli jāizvēlas kompromisa veidā, ņemot vērā kā sakarību (4.5) tā arī sakarību (4.6).

Nobeigumā vēlreiz svarīgi uzsvērt, ka visas skaitliskās metodes ir tuvinātas metodes un ne vienmēr var dot viennozīmīgu un patiesu rezultātu. Tomēr jāatzīst, ka bez šīm me-

todēd daudzus svarīgus būvmehānikas uzdevumus pat tuvināti nebūtu iespējams atrisināt. Sevišķi tas attiecas uz plakanām un telpiskām konstrukcijām ar sarežģītu formu. Šīs metodes ļauj iegūt ne tikai praktiskus rezultātus, bet arī veikt uzskatāmus pētījumus par tiem procesiem, kuri rodas konstrukcijās to ekspluatācijas laikā. Zīmīgi ir matemātiķa R. Heninga vārdi: “Pirms sākt risināt uzdevumu, padomā, ko darīt ar atrisinājumu. Izskaitļojumu mērķis ir izpratne, nevis skaitlis.” Iesakām katram būvmehānikas problēmu risinātājam ņemt vērā šo vēlējumu un maksimāli izmantot tās plašās iespējas, ko sniedz skaitliskās metodes veicot konstrukciju projektēšanu un reālā darba stāvokļa novērtēšanu konkrētos noslodzes apstākļos.

5. NEPĀRTRAUKTAS SIJAS

Par nepārtrauktu sauc siju, kura pārsedz divus vai vairākus laidumus, ir izvietota uz balstiem un netiek pārtraukta ar locīklām vai pārrāvumiem.



att. 5.1

Nepārtrauktas sijas būtiska atšķirība salīdzinot ar locīklu siju ir tā, ka slodze jebkurā tās laidumā izliec siju visu laidumu garumā, veidojot vienlaidus elastīgu līniju. Att. 5.1 parādītas nepārtrauktas un neatkarīgu vienlaiduma siju shēmas.

Konstruējot nepārtrauktas sijas vienmēr tiek veikti pasākumi, lai izslēgtu iespēju tām atdalīties no saviem balstiem. Sijas brīvs novietojums uz balstiem pieļaujams tikai tajos gadījumos, kad ir pārliecība, ka sija arī izliecoties atradīsies kontaktā ar visiem balstiem un neatdalīsies ne no viena no tiem.



att. 5.2

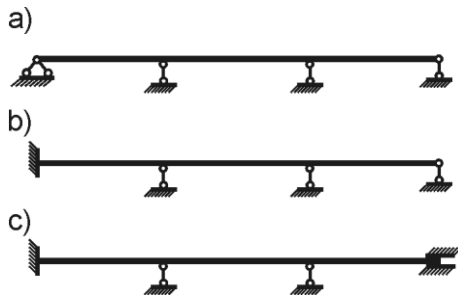
Nepārtrauktas sijas aprēķina shēma pieņem ideālu tās piesaisti visiem starpbalstiem. Tāda ir shēma att. 5.1a. Malējos balstos arī tiek pieņemts absolūts vai arī elastīgi paredzēts nostiprinājums. Reālās sijas piestiprinājuma konstrukcijas balstiem parasti atšķiras no tās shēmas.

Nepārtrauktas sijas ir visai izplatīts konstrukciju veids un tiek lietotas dzelzsbetona, metāla un koka konstrukcijās kā to atsevišķi elementi vai pamatdaļas. Att. 5.2 redzams nepārtrauktas sijas tipa tilts.

Nepārtrauktas sijas ir pieskaitāmas pie vienkāršākajiem statiski nenoteicamu sistēmu gadījumiem, jo tām ir vienkārša struktūra, tās piepūļu un pārvietojumu aprēķini veicami ar visai vienkāršiem vienādojumiem un rezultāti vienkārši saprotami un izvērtējami. Nepārtrauktu siju aplēse veicama vienlīdz veiksmīgi kā ar spēku, tā arī ar pārvietojuma metodi.

5.1. Spēku metodes pamatsistēmas

Katra diska ģeometriskās nemainības nodrošināšanai plaknē ir nepieciešamas trīs pareizi izvietotas saites. Tā kā nepārtraukta sija uzskatāma par vienu disku, tad tās lieko

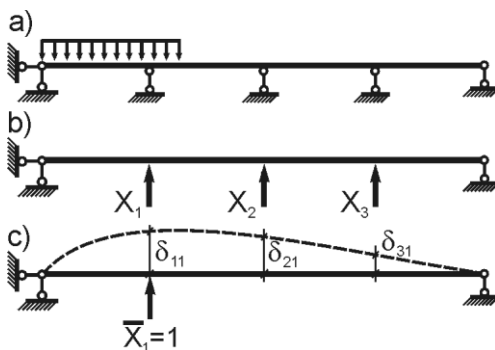


att. 5.3

saišu skaits ir vienāds ar visu balststieņu skaitu samazinātu par trim vienībām. Tā, piemēram, att. 5.3 parādītās nepārtrauktās sijas satur divas (gadījums a), trīs (b) un četras (c) liekas saites. Shēmā c attēlotās sijas labā gala nostiprinājums atbilst diviem atbalststieņiem. Šāds nostiprinājums pieļauj sijas gala horizontālu pārvietojumu un tātad

nerada spriegumus, kuri varētu rasties sijas sasilstot vai atdziestot.

Lieko saišu skaits att. 5.3a attēlotā nostiprinājuma gadījumā (abos galos locīklu balsti) m laidumu sijas ir $m-1$. Viena gala iespīlējuma gadījumā lieko saišu skaits ir m , bet abu galu iespīlējuma gadījumā (shēma c) tas ir $m+1$. Statiskās nenoteicamības pakāpe nepārtrauktai sijai $n = S_{\text{atb}} - 3$ (S_{atb} – summārais saišu (stieņu) skaits, 3 – neatkarīgo statikas vienādojumu skaits visai sistēmai).



att. 5.4

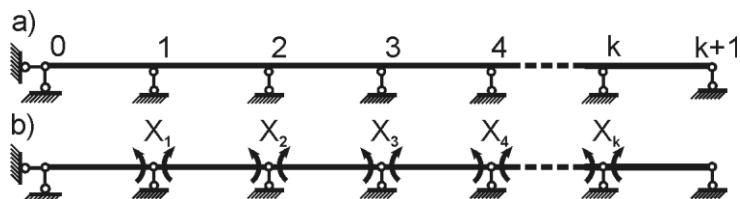
Izvēloties spēku metodes pamatsistēmu parasti vadās no apsvēruma, lai kanoniskie vienādojumi būtu pēc iespējas vienkāršāki. Vēsturiski pirmā literatūrā aprakstītā pamatsistēma bija izveidota, atmetot liekos balsta stieņus (att. 5.4). Jāsecina, ka tā acīmredzot ir visneizdevīgākā sistēma. Sastādot kanoniskos vienādojumus šādas sistēmas gadījumā, katrs no

tiem satur visus nezināmos. No shēmas c redzams, ka neviens no δ_{m1} nav nulle un tātad pirmais vienādojums saturēs visus nezināmos. Analogi būs arī pārējo sloojumu $\bar{X}_m=1$ gadījumos.

Veiksmīgi izvēloties nepārtrauktas sijas pamatsistēmu, var panākt, ka lielākā daļa koeficientu būs nulle un patvaļīga laidumu skaita gadījumā neviens kanoniskais vienādojums nesaturēs vairāk kā trīs nezināmos.

5.2. Trīsmomentu vienādojumi

Izvēloties par pamatsistēmu siju, kurai mezglos virs balstiem ir ievietotas locīklas (att. 5.5), iegūstam atsevišķu divbalstu siju kopu. Lai nodrošinātu iegūtās sistēmas ģeometrisku nemainību, svarīgi ņemt vērā, ka malējā balstā, ja uz tā balstās sijas konsolda, locīklu ievietot nedrīkst.



att. 5.5

Izvēlētās pamatsistēmas gadījumā par nezināmajiem tiek pieņemti lieces momenti balstu šķēlumos. Tā kā šo momentu vērsums iepriekš nav zināms, tad pieņemam, ka tie izraisa stiepi apakšējās šķiedrās. Ja šis pieņēmums izrādīsies nepareizs, risinājuma rezultātā iegūsim balstu momentu vērtības ar negatīvu zīmi.

Vispārīgā gadījumā, ja nepārtrauktai sijai ir k liekās saites, kanonisko vienādojumu sistēma sastāv no k vienādojumiem ar k nezināmajiem. Katrs no šo vienādojumu saskaitāmajiem $\delta_{ij}X_j$ raksturo šķēlumu i savstarpējo pagriezienu šķēlumā j darbojošos divu vienādu pēc lieluma, bet pretēju pēc virziena momentu X_j dēļ. Tā, piemēram, momentu pāris X_1 izraisa savstarpējos pagriezienus $\delta_{21}X_1$ šķēlumā 2 virs balsta 2.

Katra kanoniskā vienādojuma kreisā puse izsaka summāro savstarpējo pagriezienu šķēlumā virs kāda balsta, ko izraisa liekie nezināmie un ārējā slodze. Izveidojošos leņķi starp šķēluma plaknēm varētu nosaukt par elastīgās līnijas “lauzuma leņķi” virs konkrētā balsta. Tā kā šādu laužumu nevar būt un elastīgajai līnijai jābūt monotoni gludai, tad šo pagriezienu summu pielīdzina nullei un iegūst konkrēto kanonisko vienādojumu.

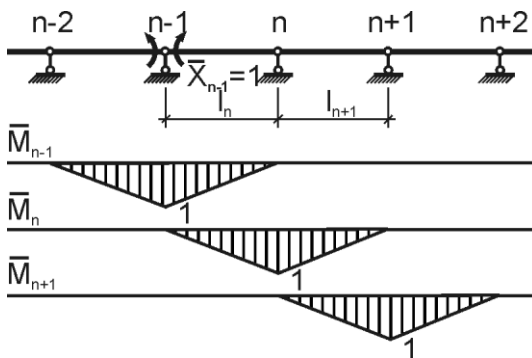
Par izvēlētās pamatsistēmas racionālumu var spriest pēc tās deformēšanās īpatnībām

balstmomentu un ārējās slodzes dēļ. No att. 5.5b varam konstatēt, ka moments X_1 izraisa elastīgās līnijas laužumus tikai virs balstiem 1 un 2; moments X_2 – virs balstiem 1, 2 un 3; moments X_3 virs balstiem 2, 3 un 4, u.t.t. Tāpat varam konstatēt, ka laužumu virs balsta 1 izraisa tikai momenti X_1 , X_2 un ārējā slodze, lūzumu virs balsta 2 izraisa tikai X_1 , X_2 , X_3 un ārējā slodze, u.t.t. Tātad katrs kanoniskais vienādojums satur tikai trīs nezināmos, bet pirmais un pēdējais vienādojums satur tikai divus. Uz šo apsvērumu pamata, n -tajam balstam kanonisko vienādojumu nepārtrauktai sijai var uzrakstīt daudz vienkāršākā veidā:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} + \Delta_{np} = 0. \quad (5.1)$$

Šādu vienādojumu sauc par trīsmomentu vienādojumu, jo tas satur trīs nezināmus balstmomentus X_{n-1} , X_n un X_{n+1} .

Vienādojuma (5.1) koeficientu $\delta_{n,n-1}$, $\delta_{n,n}$, $\delta_{n,n+1}$ noteikšanai konstruējam attiecīgās vienības epīras $\bar{M}_{n-1}$, $\bar{M}_n$, $\bar{M}_{n+1}$ no vienības slodzēm $\bar{X}_{n-1} = 1$; $\bar{X}_n = 1$; $\bar{X}_{n+1} = 1$.



att. 5.6

Šīs epīras attēlotas att. 5.6. Neņemot vērā šķērsspēku iespaidu uz deformācijām, kanoniskā vienādojuma koeficientu noteikšanai izmantojam izteiksmes

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx.$$

Nepārtrauktas sijas šķērsriezuma laukums un forma sijas garumā varētu

mainīties pēc patvaļīga likuma. Tādā gadījumā katrā šķēlumā būtu atšķirīgs sijas inerces moments, t.i. inerces moments būtu funkcija no koordinātes x . Šādā gadījumā inerces moments nav iznesams ārpus integrāļa un integrēšana kļūst sarežģītāka. Apskatīsim speciālu nepārtrauktas sijas gadījumu, kad katrā tās laidumā ir konstants, bet starp laidumiem atšķirīgs inerces moments. Tātad katram laidumam ℓ_n atbilst savs inerces moments I_n , kura lielums salīdzināms ar kādu brīvi izvēlētu inerces momenta vērtību I_0 ,

piemēram, vieninieku. Tādā gadījumā, izmantojot kādu no epīru sareizināšanas paņēmieniem, iegūstam sakarības

$$\delta_{nn-1} = \frac{1}{EI_0} \int \bar{M}_n \bar{M}_{n-1} \frac{I_0}{I_n} dx = \frac{1}{6EI_0} \frac{I_0}{I_n} l_n = \frac{1}{6EI_0} l'_n;$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{EI_0} \sum \int \bar{M}_n^2 \frac{I_0}{I_n} dx = \frac{1}{3EI_0} \left(\frac{I_0}{I_n} l_n + \frac{I_0}{I_{n+1}} l_{n+1} \right) = \frac{1}{3EI_0} (l'_n + l'_{n+1});$$

$$\delta_{nn+1} = \frac{1}{EI_0} \int \bar{M}_n \bar{M}_{n+1} \frac{I_0}{I_n} dx = \frac{1}{6EI_0} l'_{n+1},$$

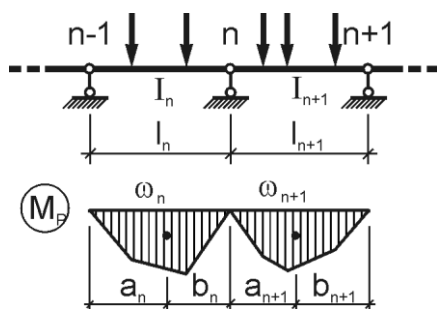
kur

$$l'_n = \frac{I_0}{I_n} l_n, \quad l'_{n+1} = \frac{I_0}{I_{n+1}} l_{n+1}.$$

Lielumus l' sauc par **reducētiem laidumiem**.

Analogā veidā nosakām šķēlumā n pārvietojumus (pagriezienus), ko izraisa ārējā slodze. Šos pārvietojumus izraisa tikai tās slodzes, kuras darbojas laidumos ℓ_n un ℓ_{n+1} . To skaitliskā vērtība nosakāma izmantojot sakarību:

$$\Delta_{np} = \frac{1}{EI_0} \sum \int M_p \bar{M}_n \frac{I_0}{I} dx$$



att. 5.7

Tā kā epīra $\bar{M}_n$ sastāv no divām taisnēm, tad katra laiduma robežās integrālis ir vienāds ar M_p epīras laukumu reizinātu ar tā smaguma centru atbilstošo epīras $\bar{M}_n$ ordināti (Vereščagina metode). Izmantojot apzīmējumus, kur w_n un w_{n+1} ir atbilstošajos laidumos slodzes izraisītās momentu epīras laukumi, bet a_n , b_n , a_{n+1} un b_{n+1} šo laukumu smaguma centru attā-

lumi līdz balstiem, iegūstam (att. 5.7)

$$\Delta_{np} = \frac{1}{EI_0} \left[\frac{I_0}{I_n} \frac{a_n}{l_n} w_n + \frac{I_0}{I_{n+1}} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} w_{n+1} \right].$$

Lielumus $\frac{a_n}{l_n} w_n$ un $\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} w_{n+1}$ bieži apzīmē ar B_n^f un A_{n+1}^f .

Lielums B_n^f tiek saukts par n-tā laiduma fiktīvo labā balsta reakciju (par fiktīvu tiek uzskatīta slodze ar lielumu w_n , kura pielikta epīras smagumcentrā). Lielums A_{n+1}^f ir (n+1) laiduma fiktīvā kreisā balsta reakcija (no slodzes w_{n+1}).

Tādā gadījumā pārvietojumu šķēlumā n no ārējās slodzes nosaka sakarība

$$\Delta_{np} = \frac{1}{EI_0} \left[\frac{I_0}{I_n} B_n^f + \frac{I_0}{I_{n+1}} A_{n+1}^f \right],$$

bet kanoniskais vienādojums ir

$$\frac{1}{6} l'_n X_{n-1} + \frac{1}{3} (l'_n + l'_{n+1}) X_n + \frac{1}{6} l'_{n+1} X_{n+1} + \frac{I_0}{I_n} B_n^f + \frac{I_0}{I_{n+1}} A_{n+1}^f = 0.$$

Lai uzsvērtu to, ka nezināmie X_{n-1} , X_n un X_{n+1} faktiski ir balstu momenti (lieces moments virs attiecīgajiem balstiem), turpmāk lietosim nezināmo apzīmējumus M_{n-1} , M_n un M_{n+1} .

Kanoniskā vienādojuma vispārīgā forma ir

$$l'_n M_{n-1} + 2(l'_n + l'_{n+1}) M_n + l'_{n+1} M_{n+1} = -6 \left(\frac{I_0}{I_n} B_n^f + \frac{I_0}{I_{n+1}} A_{n+1}^f \right). \quad (5.2)$$

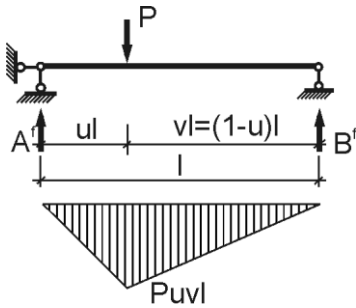
Tas arī ir trīsmomentu vienādojums nepārtrauktai sijai.

Speciālā gadījumā, kad visā sijas garumā inerces moments I ir nemainīgs, lietderīgi pieņemt $I_0 = 1$ un tādā gadījumā

$$l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) M_n + l_{n+1} M_{n+1} = -6(B_n^f + A_{n+1}^f).$$

Biežāk lietojamo slodžu gadījumiem lietderīgi izskaitļoto fiktīvo reakciju vērtības sakopot tabulā un izmantot kā jau zināmus lielumus. Viena no tādām slodzēm ir koncen-

trēts spēks (att. 5.8). Spēka P attālumu līdz kreisam balstam A apzīmējam ar $u\ell$, kur u ir īstā daļa ($0 < u < 1$), bet līdz labajam balstam ar $v\ell=(1-u)\ell$. Izkaitļojot trīsstūrveida momenta epīras laukumu un ņemot vērā, ka tāda trīsstūra smaguma centrs atrodas attālumā $\frac{l(1+u)}{3}$ no kreisā un attālumā $\frac{l(1+v)}{3}$ no labā balsta, iegūstam



att. 5.8

$$6A^f = Pl^2uv(1+v);$$

$$6B^f = Pl^2uv(1+u). \quad (5.3)$$

Ja slodze sastāv no vairākiem koncentrētiem spēkiem laidumā, tad summārās fiktīvās reakcijas ir atsevišķiem spēkiem atbilstošo fiktīvo reakciju summa.

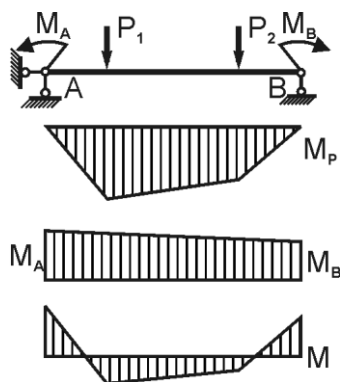
Analogi izklāstītajai metodikai var noteikt fiktīvās reakcijas arī citos slogojuma gadījumos. Daži no rezultātiem doti tabulā 5.1.

Tabula 5.1
Fiktīvās reakcijas dažādiem slogojuma veidiem

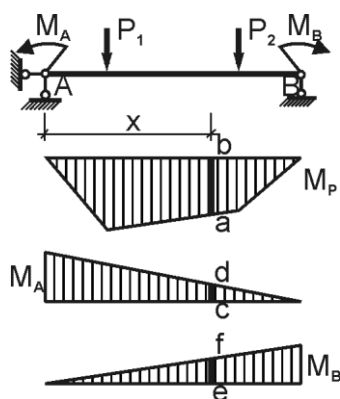
$6A^f$	$Pl^2uv(1+v)$	$\frac{ql^3}{4}$	$\frac{9ql^3}{64}$	$-ml(1-3v^2)$
$6B^f$	$Pl^2uv(1+u)$	$\frac{ql^3}{4}$	$\frac{7ql^3}{64}$	$-ml(1-3u^2)$

Elastības moduli E satur visi kanoniskā vienādojuma koeficienti. Tātad balstu momentu vērtības gadījumā, kad visi sijas laidumi ir izgatavoti no viena un tā paša materiāla, nav atkarīgas no nepārtrauktās sijas elastīgajām īpašībām. Šajā gadījumā varam apgalvot, ka no dažādiem materiāliem izgatavotās nepārtrauktās sijās pie vienādiem struktūras elementiem un slogojuma nosacījumiem, rodas vienas un tās pašas piepūles.

Sijas šķērss griezumu inerces momenti visos kanonisko vienādojumu locekļos atrodas saucējā. Līdz ar to varam apgalvot, ka pareizinot visus inerces momentus ar vienu un to pašu skaitli, balstu momentu vērtības nemainīsies. Tātad nepārtrauktās sijās lieces momenti nav atkarīgi no inerces momentu lieluma, bet gan tikai no to savstarpējām



att. 5.9



att. 5.10

attiecībām dažādos laidumos. Divās sijām, no kurām vienai ir lieli inerces momenti,

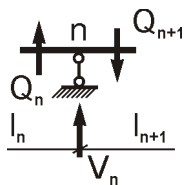
bet otrai mazi, būs vienādas piepūles, gadījumā, ja visos laidumos vienas sijas stingrības būs proporcionālas otras sijas stingrībām.

Momentu epīras patvaļīgā sijas laidumā sastāv no momentu epīras M_p vienkāršā divbalstu sijā un trapeceveida epīras, ko veido balstu momenti. Saskaitot to ordinātas jebkurā šķēlumā (ņemot vērā to zīmes) tiek iegūta galīgā nepārtrauktās sijas lieces momentu epīra konkrētajā lai dumā. (att. 5.9.)

Analītisko lieces momentu izteiksmi nepārtrauktai sijai var iegūt izmantojot sakarības, kuras atbilst att. 5.10 parādītajām epīrām. Summārā lieces momentu ordināte patvaļīgā šķēlumā ar abscisu x ir ordinātu ab , cd un ef summa. Tātad iegūstam

$$M_x = M_p + \frac{x}{l} M_B + \frac{x-l}{l} M_A \quad (5.4)$$

Tā kā šķērsspēks raksturo momentu izmaiņas intensitāti, tad saskaņā ar diferenciālo sakarību starp momentu un šķērsspēku, iegūstam sakarību



att. 5.11

$$Q_x = Q_p + \frac{M_B - M_A}{l} \quad (5.5)$$

Svarīgi atcerēties, ka šķērsspēks šķēlumā x ir pozitīvs, ja tas tiecas abus sijas posmus šai šķēlumā griezt pulksteņa rādītāja virzienā. Balsta reakcijas noteikšanai patvaļīgā nepārtrauktas sijas balstā n ,

izmantojam jau iegūto šķērsspēka izteiksmi.

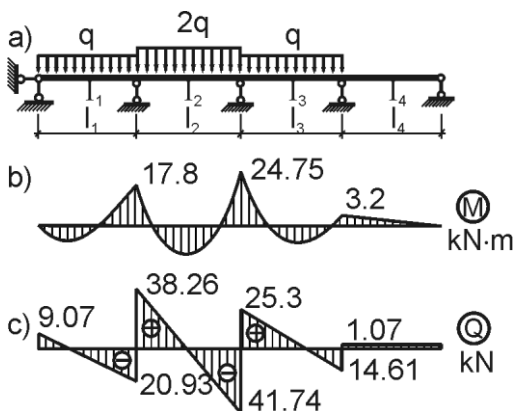
Izgriežam bezgala mazu sijas nogriezni tā, ka tajā ietilpst balsts n . Balsta reakciju V_n pieņemsim par pozitīvu, ja tā vērsta uz augšu (att. 5.11).

Pieņemot šķērsspēkus Q_n un Q_{n+1} par pozitīviem un izmantojot sakarību (5.5) iegūstam

$$V_n = Q_{n+1} - Q_n = V'_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n}, \quad (5.6)$$

kur ar V'_n apzīmēta balsta n reakcija pamatsistēmā no ārējās slodzes laidumos l_n un l_{n+1} .

Trīsmomentu vienādojums tika iegūts atmetot šķērsspēka iespaidu. Neizmantojot šo vienkāršojumu tāpat iegūsim trīsmomentu vienādojumu tikai ar citiem koeficientiem (ieteicams studentam patstāvīgi veikt šādu aprēķinu un novērtēt šķērsspēka efekta iespaidu uz nepārtrauktās sijas iekšējām piepūlēm un deformācijām).



att. 5.12

Piemērs 5.1. Uzkonstruēt M un Q epīras att. 5.12a dotajai nepārtrauktajai sijai: $l_1 = l_4 = 3\text{ m}$, $l_2 = l_3 = 4\text{ m}$, $I_2 = 2I_1$; $I_3 = 2I_1$; $I_4 = 1,5I_1$

Atrisinājums.

Pieņemam $I_0 = I_1 = 1$;

Tādā gadījumā $l'_1 = l_1 = 3\text{ m}$;

$l'_2 = l'_3 = 4/2 = 2\text{ m}$;

$l'_4 = 3/1,5 = 2\text{ m}$.

Dotā sija ir trīsreiz statiski nenoteicama sistēma. Atbilstoši spēka metodei, tai ir trīs liekie nezināmie (balstmomenti M_1, M_2, M_3). To noteikšanai izmantojam trīsmomentu vienādojumus:

$$2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2M_2 = -\frac{ql_1^3}{4} - \frac{1}{2} \frac{2ql_2^3}{4};$$

$$l'_2M_1 + 2(l'_2 + l'_3)M_2 + l'_3M_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2ql_2^3}{4} - \frac{1}{2} \frac{ql_3^3}{4};$$

$$l'_3 M_2 + 2(l'_3 + l'_4) M_3 = -\frac{1}{2} \frac{q l_3^2}{4}.$$

Ievietojot reducēto laidumu skaitliskās vērtības, iegūstam trīs lineāru vienādojumu sistēmu:

$$10M_1 + 2M_2 = -22,75q$$

$$2M_1 + 8M_2 + 2M_3 = -24q$$

$$2M_2 + 8M_3 = -8q$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam $M_1 = -1,78q$; $M_2 = -2,475q$; $M_3 = -0,32q$.

To dimensija ir slodzes intensitātes q dimensija reizināta ar m^2 (ja q dimensija ir kN/m , tad momentu dimensija ir $kN \cdot m$).

Ārējās slodzes pamatsistēmā izraisīto lieces momentu epīru veido trīs parabolas ar sekojošām ekstremālajām vērtībām attiecīgo laidumu vidū:

$$M_{V1} = \frac{q l_1^2}{8} = 1,125q; \quad M_{V2} = \frac{2q l_2^2}{8} = 4q; \quad M_{V3} = \frac{q l_3^2}{8} = 2q.$$

Momenta vērtības jebkurā patvaļīgā laiduma šķēlumā nosakāmas no sakarības

$$M_x = \frac{q l}{2} x - \frac{q x^2}{2} = \frac{q x}{2} (l - x).$$

Izmantojot iegūtos rezultātus, varam noteikt nepārtrauktās sijas lieces momentu epīru. Gadījumam, kad nepārtrauktā sija slogota ar $q = 10 \text{ kN/m}$, attiecīgā epīra attēlota zīm. 5.12b.

Šķērsspēku vērtības balstos nosakām izmantojot sakarību (5.5). Balstā 0 iegūstam

$$Q_0 = \frac{q l_1}{2} - \frac{1,78q}{l_1} = 0,907q = 9,07(kN),$$

bet balstā 1:

$$Q_{1kr} = -\frac{q l_1}{2} - \frac{1,78q}{l_1} = -2,093q = -20,93(kN).$$

Analogā veidā nosakām šķērsspēku vērtības otrā laiduma (l_1) balstos. Iegūstam

$$Q_{1lab} = \frac{2ql_2}{2} + \frac{-2,475q + 1,78q}{l_2} = 3,826q = 28,26(kN),$$

$$Q_{2kr} = -\frac{2ql_2}{2} + \frac{-2,475q + 1,78q}{l_2} = -4,174q = -41,74(kN).$$

Trešajā laidumā iegūstam

$$Q_{2lab} = \frac{ql_3}{2} + \frac{-0,32q + 2,475q}{l_3} = 2,539q = 25,39(kN),$$

$$Q_{3kr} = -\frac{ql_3}{2} + \frac{-0,32q + 2,475q}{l_3} = -1,461q = -14,61(kN).$$

Ceturtā laidumā

$$Q_{3lab} = Q_4 = -\frac{0,32q}{l_4} = 0,107q = 1,07(kN).$$

Šķērsspēka epīra redzama att. 5.12c.

Nosakot balstu reakcijas, izmantojam šķērsspēka vērtības attiecīgajā balstā no kreisās un labās puses.

Iegūstam:

$$V_0 = 0,907q \text{ (kN)};$$

$$V_1 = 3,826q - (-2,093q) = 5,919q \text{ (kN)};$$

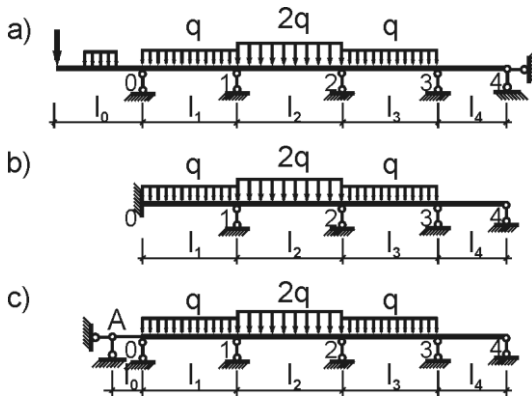
$$V_2 = 2,539q - (-4,174q) = 6,713q \text{ (kN)};$$

$$V_3 = 0,107q - (-1,461q) = 1,568q \text{ (kN)};$$

$$V_4 = -0,107q \text{ (kN)}.$$

Piemērs 5.2. Novērtēt kā mainās piepūļu vērtības sijās, ja iepriekš analizētai sijai kreisā galā ir: konsole (att. 5.13a); kreisais gals ir iespīlēts (att. 5.13b).

Atrisinājums. Gadījumā **a)** momentu kreisā balstā, ko rada slodze uz konsoles, apzīmēsim ar M_0 . Šī momenta vērtība ir zināma (to nosaka pēc momenta definīcijas). Pirmo trīsmomentu vienādojumu sastāda balstam 1. Tas satur divus nezināmos (M_1 un



att. 5.13

ivivalents iespīlējumam. Locīklā A lieces moments ir nulle, līdz ar to pirmais trīsmo-
mentu vienādojums ir

$$2(l'_0 + l'_1)M_0 + l'_1M_1 = -6 \frac{I_0}{I_1} A_1.$$

Ņemot vērā, ka laidums l_0 ir bezgalīgi stings $l'_0 = 0$ un iegūstam

$$2l'_1M_0 + l'_1M_1 = -6 \frac{I_0}{I_1} A_1.$$

Pārējo vienādojumu būtība nemainās.

5.3. Momentfokusu metode

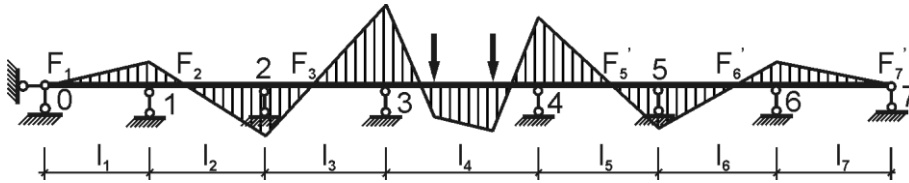
Gadījumā, ja nepārtraukta sija slogota tikai vienā laidumā (tātad pašsvars netiek ņemts vērā), lieces momentu epīrai ir specifisks raksturs neatkarīgi no tā, kurš laidums ir slogots. Par lieces momentu epīras raksturu var spriest pēc attēla 5.14. Raksturīga iezīme ir epīras slīpās taisnes raksturs visos neslogotajos laidumos ar ekstremālām (pretējas zīmes) vērtībām laiduma galos. Tātad katrā laidumā ir punkts, kurā momentu vērtība ir nulle. Šos nullpunktus sauc par **momentu fokusi**. Att. 5.14 šādi punkti apzīmēti ar $F_1, F_2, F_3, F'_5, F'_6, F'_7$. Katrā laidumā ir divi momentu fokusi. *Par kreiso (labo) momentfokusu konkrētā laidumā sauc nullpunktu, ja nepārtrauktā sija slogota pa labi (pa kreisi) no šī laiduma.* Tātad att. 5.14 punkti F_1, F_2, F_3 ir **kreisie momentfokusi**, bet

M_2) un uzrakstāms sekojošā veidā

$$l'_1M_0 + 2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2M_2 = -6 \left(\frac{I_0}{I_1} B_1 + \frac{I_0}{I_1} A_2 \right).$$

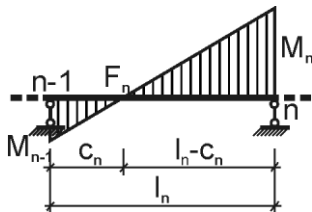
Gadījumā **b)** kreisā gala iespīlējumu var aizvietot ar bezgalīgi stingu laidumu l_0 (att. 5.13c). Tā kā laidums l_0 ir bezgalīgi stings, tad balstā 0 pagrieziens nav iespējams un balsts 0 ir ek-

F'_5, F'_6, F'_7 – labie momentfokusi.



att. 5.14

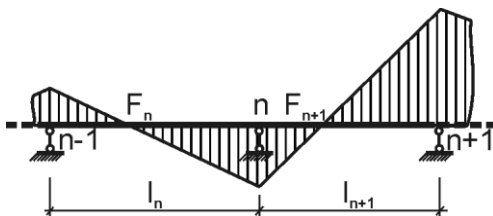
Svarīgi ņemt vērā, ka ne katrs nullpunkts ir momentfokuss. Nullpunkts ir momentfokuss tikai tai gadījumā, ja konkrētais laidums nav slogots un visa slodze atrodas vienā pusē no šī laiduma. Tā, piemēram, att. 5.14 laiduma 3 – 4 nullpunkti nav momentfokusi.



att. 5.15

Būtiska momentfokusu īpašība ir to invariance: konkrētai nepārtrauktai sijai visi fokusi ir noteikti un nav atkarīgi no sijai pieliktās ārējās slodzes. Tātad neatkarīgi no izmaiņām sijas daļā pa labi no analizējamā laiduma tādām kā slodzes veids, izvietojums un lielums, balstu sēšanās, lieces momentu epūru attēlo slīpa taisne, kura krusto sijas

asi attiecīgā laiduma kreisajā fokusā (att. 5.15). Šīs taisnes slīpumu nosaka momenta vērtība labajā balstā un momentfokusa vieta uz sijas ass. Tātad momenta vērtība posma kreisajā balstā M_{n-1} ir proporcionāla momenta vērtībai labajā balstā M_n . Šo divu momentu vērtību attiecības absolūto vērtību sauc par momentfokusu attiecību. Katrā laidumā tātad ir kreisā un labā **momentfokusu attiecība**. Saskaņā ar att. 5.15 laidumam l_n kreisā momentfokusu attiecība ir



att. 5.15

$$k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{l_n - c_n}{c_n}. \quad (5.7)$$

Ja ir zināma fokusa atrašanās vieta, tad ir zināma arī fokusa attiecība vai arī otrādi, zinot laiduma fokusa attiecību, varam noteikt fokusa atrašanās vietu.

Pieņemot, ka slodze atrodas pa labi no l_n laiduma (att. 5.16), varam sastādīt balstam n

trīsmomentu vienādojumu

$$l'_n M_{n-1} + 2(l'_n + l'_{n+1})M_n + l'_{n+1} M_{n+1} = 0 \quad (5.8)$$

Izdalot šī vienādojuma abas puses ar vērtību M_n un ņemot vērā, ka

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -\frac{1}{k_n}, \quad \text{bet} \quad \frac{M_{n+1}}{M_n} = -k_{n+1},$$

iegūstam vienādojumu (5.8) sekojošā formā

$$-\frac{l'_n}{k_n} + 2(l'_n + l'_{n+1}) - l'_{n+1} k_{n+1} = 0.$$

Saskaņā ar šo sakarību iegūstam rekurentu formulu, kura saista fokusa attiecību $(n+1)$ - jā laidumā ar fokusa attiecību n - tajā laidumā:

$$k_{n+1} = 2 + \frac{l'_n}{l'_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right). \quad (5.9)$$

Ja ir zināma kaut viena laiduma fokusa attiecība, tad ar formulu (5.9) iespējams noteikt fokusu attiecības visos pārējos laidumos. Nepārtrauktai sijai ar locīklveida kreiso balstu fokusa attiecība pirmajā laidumā (k_1) nosakāma izmantojot definīciju un ņemot vērā, ka locīklu balstā $M_0 = 0$. Tā iegūstam

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = \pm\infty.$$

Pārējo laidumu fokusu attiecības saskaņā ar formulu (5.9) ir

$$k_2 = 2 + \frac{l'_1}{l'_2} \left(2 \pm \frac{1}{\infty} \right) = 2 \left(1 + \frac{l'_1}{l'_2} \right), \quad k_3 = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right), \quad \text{u.t.t.}$$

Gadījumā, ja nepārtrauktās sijas kreisajā galā ir iespīlējums, tad aizvietojo šo iespīlējumu ar papildus laidumu $l'_0 = 0$ un locīklveida kreiso balstu, izmantojot to, ka $k_0 = \pm\infty$ (pēc iepriekšējā), iegūstam:

$$k_1 = 2 + \frac{l'_0}{l'_1} \left(2 \pm \frac{1}{\infty} \right) = 2.$$

Momentfokusu attiecība fokusiem, kuriem tuvākais laiduma balsts ir iespīlējums, vienmēr ir 2.

Atcerēsimies, ka iegūtie rezultāti attiecināmi uz nepārtrauktām sijām, kuru laidumos ir konstanti šķēlumu inerces momenti.

Katru nepārtrauktas sijas laidumu var uzskatīt par elastīgi iespīlētu, t.i. tādu, kurš ieņem kādu no starpstāvokļiem starp brīvi balstītu un iespīlētu siju. Tādēļ arī fokusa attiecībām izpildās nosacījums $2 \leq k \leq \infty$.

Fokusu ģeometrisku vietu iespējams noteikt kā grafiski, tā analītiski. Pirmajā gadījumā to nosaka taisnes caur momentu M_n un M_{n-1} ordinātu galapunktiem krustpunkts ar sijas asi, bet otrajā, izmantojot sakarību (5.7), iegūstam kreisā fokusa attālumu no kreisā balsta:

$$c_n = \frac{l_n}{1 + k_n}.$$

Ja nepārtrauktās sijas kreisais gals ir iespīlēts, tad $k_1 = 2$ un līdz ar to $c_1 = l_1/3$, t.i. šādai sijai pirmā laiduma kreisā fokusa attālums no kreisā balsta ir trešā daļa no laiduma. Tas ir lielākais iespējamais fokusa attālums no tuvākā balsta. Pārējos gadījumos fokusu attālumus iespējami intervālā $0 \leq c_n \leq l_n/3$.

Analogi spriedumi, izvedumi un rezultāti iegūstami arī gadījumā, ja slodze atrodas pa kreisi no analizējamā laiduma l_n . Tādā gadījumā nosakām labos momentfokusus, labo fokusu attiecības un šo fokusu attālumus no labā balsta laidumā. Tā iegūstam rekurences formulu labo fokusu attiecību noteikšanai

$$k'_n = 2 + \frac{l'_{n+1}}{l'_n} \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) \quad (5.10)$$

un izteiksmi fokusa attāluma d_n no labā balsta izskaitļošanai

$$d_n = \frac{l_n}{1 + k'_n}.$$

5.4. Momentfokusu attiecību pielietojums epīru konstruēšanā

Iepriekš tika parādīts, ka gadījumos, ja slogots tikai viens nepārtrauktās sijas laidums, neslogoto balstu laidumu balstu momenti ļoti vienkārši nosakāmi, izmantojot fokusu attiecības.

Lai noteiktu slogotā laiduma balstmomentus, sastādām divus trīsmomentu vienādojumus

(n-1) - jam un n - tjam balstam:

$$l'_{n-1}M_{n-2} + 2(l'_{n-1} + l'_n)M_{n-1} + l'_nM_n = -6\frac{I_0}{I_n}A_n,$$

$$l'_nM_{n-1} + 2(l'_n + l'_{n+1})M_n + l'_{n+1}M_{n+1} = -6\frac{I_0}{I_n}B_n.$$

Izmantojot sakarības $M_{n-2} = -M_{n-1}/k_{n-1}$; $M_{n+1} = -M_n/k'_{n+1}$ no vienādojumu sistēmas izslēdzam nezināmos M_{n-2} un M_{n+1} un iegūstam:

$$k_n l'_n M_{n-1} + l'_n M_n = -6\frac{I_0}{I_n}A_n = -6\frac{l'_n}{l_n}A_n,$$

$$l'_n M_{n-1} + k'_n l'_n M_n = -6\frac{I_0}{I_n}B_n = -6\frac{l'_n}{l_n}B_n.$$

No šīs sistēmas nosakām nezināmos balstmomentus M_{n-1} un M_n slogotā laiduma kreisajā un labajā galā. Tā iegūstam

$$M_{n-1} = -6\frac{A_n k'_n - B_n}{l_n(k_n k'_n - 1)}; \quad M_n = -6\frac{B_n k_n - A_n}{l_n(k_n k'_n - 1)}. \quad (5.11)$$

Izmantojot sakarībām (5.11) noteiktās balstmomentu vērtības un nepārtrauktās sijas momentfokusu attiecības, viegli varam noteikt balstmomentus virs pārējiem balstiem:

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k_{n-2}} = \frac{M_{n-1}}{k_{n-1}k_{n-2}}; \quad \text{u.t.t.}$$

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}; \quad M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k'_{n+2}} = \frac{M_n}{k'_{n+1}k'_{n+2}}; \quad \text{u.t.t.}$$

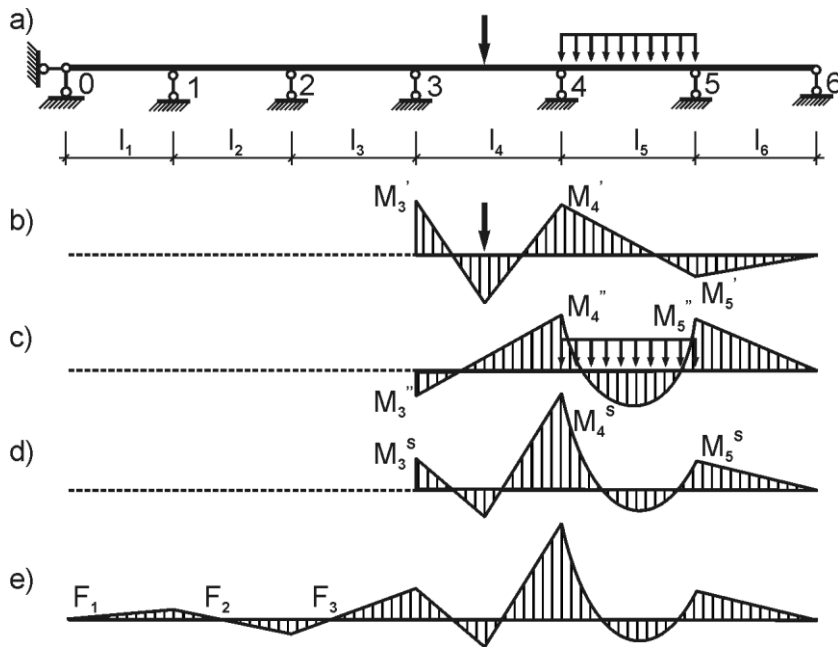
Kaut arī visi ar fokusu metodi iegūtie rezultāti attiecas uz gadījumu, kad nepārtrauktā sija slogota tikai vienā laidumā, tos var vispārināt arī gadījumiem, kad slogoti vairāki laidumi. Tādā gadījumā uzdevums jāsadala tik apakšuzdevumos, cik ir slogoto laidumu. Tiek atrisināti neatkarīgi šie apakšuzdevumi un rezultāti saskaitīti.

Atsevišķos gadījumos summēšanas procesu var vienkāršot. Tā, piemēram, ja ir laidumu grupa, kura atrodas uz vienu pusi no visas slodzes, tad ērti rīkoties sekojoši:

1. nosakām balstmomentus atbilstoši sakarībām (5.11) visos slogotajos laidumos;
2. tos saskaitām;

3. neslogotajos laidumos balstmomentus nosakām ar momentfokusu attiecību palīdzību.

Att. 5.16a parādīta sešu laidumu sija, kura slogota ceturtajā un piektajā laidumā. Vispirms nosakām momentu vērtības M_3 , M_4 un M_5 , kuras izraisa slodze laidumā l_4 (att. 5.16b), bet pēc tam momentu vērtības virs tiem pašiem balstiem no slodzes laidumā l_5 (att. 5.16c).



att. 5.16

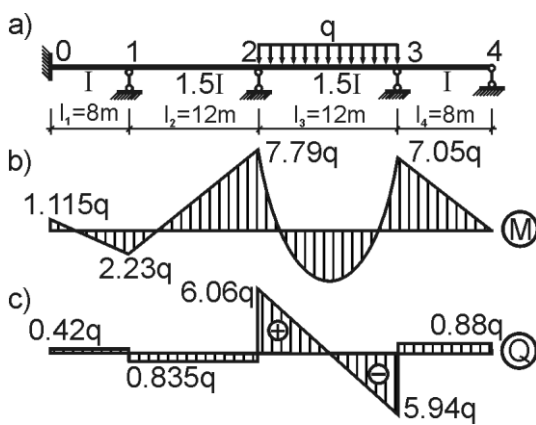
Iegūtās vērtības saskaitām (att. 5.16d). Balstmomentu vērtības M_2 un M_1 aprēķinām izmantojot summāro vērtību M_3 un kreiso fokusu attiecības k_2 un k_1 (att. 5.16e).

Piemērs 5.3. Uzkonstruēt lieces momentu epīru att. 5.17 a dotajai sijai.

Atrisinājums. Nosakām sijas reducētos laidumus:

$$l'_1 = 8m; l'_2 = \frac{I}{1,5I} 12 = 8m; l'_3 = \frac{I}{1,5I} 12 = 8m; l'_4 = 8m.$$

Sijas kreisā gala iespīlējuma dēļ $k_1 = 2$, bet pārējās fokusu attiecības nosakām izmantojot sakarības (5.9). Iegūstam



att. 5.17

$$k_2 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,5;$$

$$k_3 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{3,5} \right) = 3,714$$

$$k_4 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{3,714} \right) = 3,73$$

Labo fokusu attiecības nosakām analogi, izmantojot sakarības (5.10):

$$k'_4 = \infty;$$

$$k'_3 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 4;$$

$$k'_2 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 3,75; \quad k'_1 = 2 + \frac{8}{8} \left(2 - \frac{4}{15} \right) = \frac{56}{15} = 3,733.$$

Noslogotā laiduma balstu momenti atbilstoši sakarībām (5.11) ir

$$M_2 = -6 \frac{\frac{q12^3}{24} \cdot 4 - \frac{q12^3}{24}}{12(3,714 \cdot 4 - 1)} = -7,79q;$$

$$M_3 = -6 \frac{\frac{q12^3}{24} \cdot 3,714 - \frac{q12^3}{24}}{12(3,714 \cdot 4 - 1)} = -7,05q.$$

Neslogotā laiduma balstmomenti ir

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = \frac{7,79q}{3,5} = 2,23q;$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{2,23q}{2} = -1,115q.$$

Lieces momentu epīra parādīta att. 5.17b.

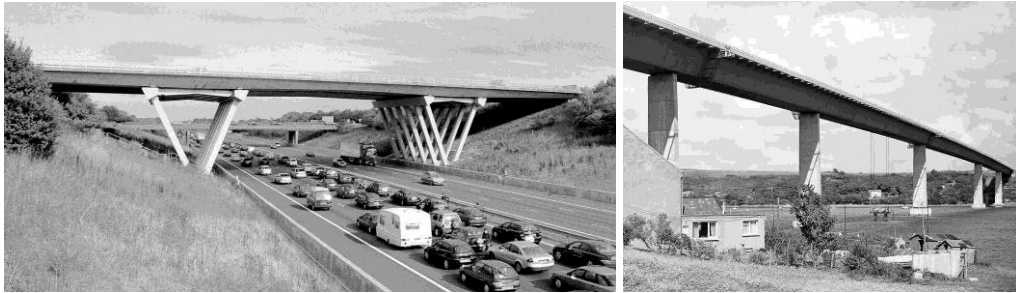
Šķērsspēku epīras konstruēšanai var izmantot bieži lietoto sakarību

$$Q_x = Q_{x0} = \frac{M_{lab} - M_{kr}}{l}$$

Tādā veidā iegūtie rezultāti redzami att. 5.17c. No šķērsspēku epīras nosakām, ka balstu reakcijas ir: $V_0 = 0,42q$; $V_1 = -1,255q$; $V_2 = 6,895q$; $V_3 = 6,82q$; $V_4 = -0,88q$.

5.5. Elastīgi padevīgi balstītas nepārtrauktas sijas

Par elastīgi padevīgiem sauksim balstus, kuri pārvietojas proporcionāli tiem pieliktai slodzei. Kā šāda tipa balstu piemērus var minēt augstas kolonnas (att. 5.18), uz kurām balstīta nepārtraukta sija; šķērsās sijas uz kurām izvietotas nepārtrauktas sijas, pontoni peldošu tiltu gadījumā, sliežu gulšņi.



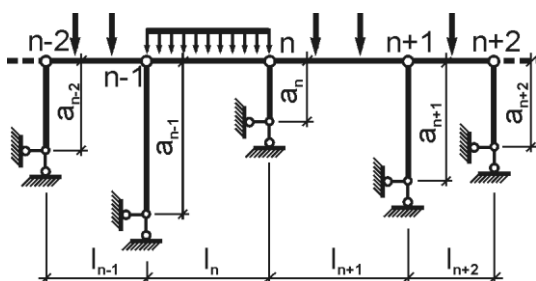
att. 5.18

Pieņemsim, ka nepārtrauktai sijai ir locīklveida savienojums ar balstiem, kaut arī tas ir visai nosacīts pieņēmums attiecībā uz reālām konstrukcijām.

Lai risinātu nepārtrauktu siju uz elastīgi padevīgiem balstiem, ir jāzina šo balstu elastīgās īpašības raksturojošus parametrus. Par tādiem pieņem **balstu padevīguma koeficientus**. Par balsta padevīguma koeficientu sauc balstu pārvietojumu no vienības slodzes. Tā, piemēram, balstam, kuru veido kolonna ar garumu a un šķērsgriezumu F , šis koeficients ir $c = \frac{a}{EF}$ (kolonnas saīsinājums no vienības slodzes). Dažreiz ērti izman-

tot koeficientam c apgrieztu lielumu $r = \frac{1}{c}$, kas nosaka spēku, kurš nepieciešams balsta pārvietojumam par vienu vienību. To sauc par balsta **stingrības vai elastības koeficientu**. Balstu izturēšanos pilnībā nosaka to padevīguma koeficienti c_n .

Par nepārtrauktas sijas pamatsistēmu atkal izmantojam siju sadalītu ar locīklām atsevišķās divbalstu sijās (att. 5.19). Nezināmie lielumi atkal būs lieces momenti virs balstiem. Atšķirībā no sijām uz stingriem balstiem, pārvietojumus (pagriezienus) n -tajā balstā izraisa ne tikai momenti M_{n-1} , M_n un M_{n+1} , bet arī momenti M_{n-2} un M_{n+2} un slodze četros laidumos (pa diviem uz katru pusi no balsta n). Momenti M_{n-2} un M_{n+2} un



att. 5.19

slodze izraisa piepūles balstos **(n-1)** un **(n+1)** un tos deformē. Tas savukārt izraisa pagriezienus balstā **n**. Momenti un slodze, kuri darbojas tālākos laidumos, pārvietojumus balstā **n** neieaspaido.

Tātad kanoniskie vienādojumi elastīgi padevīgu balstu gadījumā satur piecus

nezināmos balstu momentus un tos arī sauc par piecmomentu vienādojumiem.

Šāda vienādojuma vispārīgā forma ir:

$$\delta_{n,n-2}M_{n-2} + \delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \delta_{n,n+2}M_{n+2} + \Delta_{nP} = 0. \quad (5.12)$$

Nosakot vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus, jāņem vērā lieces momenti sijā un piepūles balstos. Tā iegūstam formulas

$$\delta_{ij} = \sum \int \bar{M}_i \frac{\bar{M}_j}{EI} dx + \sum c_m \bar{V}_{ni} \bar{V}_{nj} ;$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \bar{M}_i \frac{M_P}{EI} dx + \sum c_m \bar{V}_{ni} V_{nP} ,$$

kur $\bar{M}_i$ un $\bar{M}_j$ - lieces momenti no vienības slodzēm $\bar{M}_i = \bar{M}_j = 1$; M_P - momenti no slodzes, bet $\bar{V}_{ni}, \bar{V}_{nj}$ balsta n reakcijas no $\bar{M}_i = 1$ un $\bar{M}_j = 1$; $\bar{V}_{nP}$ - reakcija balstā n no slodzes; c_m - balsta m padevīguma koeficients.

Piemēram, pārvietojumu $\delta_{n,n-2}$ nosaka sakarība

$$\delta_{n,n-2} = 0 + c_{n-1} \frac{1}{l_{n-1}} \cdot \frac{1}{l_n} .$$

Ja balstus var uzskatīt par absolūti stingiem, tad $c_m = 0$ un piecmomentu vienādojumi (5.12) reducējas uz trīsmomentu vienādojumiem (5.1).

5.6. Nepārtrauktas sijas ar mainīgu šķērsgrizumu

Praksē tiek lietotas nepārtrauktas sijas ar vienmērīgi mainīgu šķērsgrizumu laidumos.

Par šādu siju konfigurāciju var spriest no att. 5.20.



att. 5.20

Turpmāk aprobežosimies ar nepārtrauktām sijām, kurām laiduma robežās šķērsgriezums mainās “nedaudz”. Tas dod iespēju sijas izliekto asi tuvināti uzskatīt par taisnu.

Mainīga šķērsgriezuma nepārtrauktu siju aprēķinus veic iz-

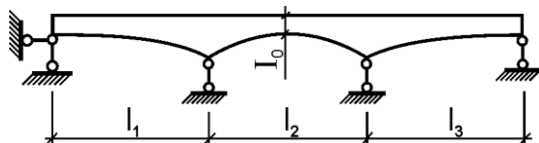
mantojot tos pašus trīsmomentu vienādojumus, kurus izmantojām arī sijām ar pastāvīgu šķērsgriezumu laidumā. Atšķirība ir trīsmomentu vienādojumu koeficientos un brīvajos locekļos, jo sijām ar mainīgu šķērsgriezumu inerces momentus laidumā nosaka funkcionāla atkarība no sijas ass koordinātes. Tātad vienādojuma

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{np} = 0$$

koeficientus nosaka sakarības

$$\delta_{ij} = \frac{1}{E} \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{I(x)} dx,$$

$$\Delta_{inp} = \frac{1}{E} \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{I(x)} dx.$$



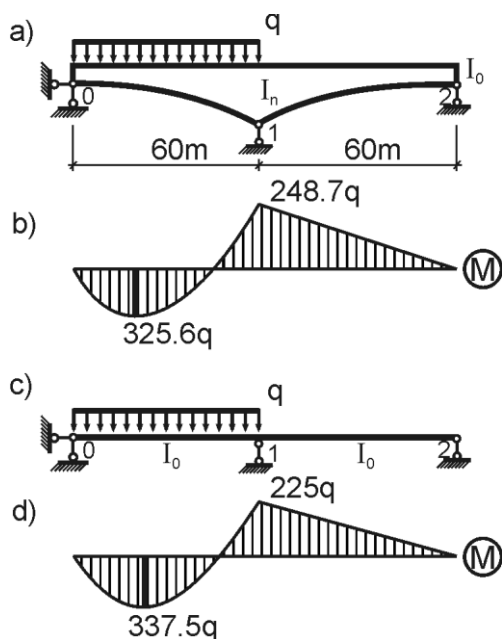
att. 5.21

Funkciju $I(x)$ izvēlas konstruktors un uzdod analītiskā (vai arī skaitliskā) veidā. Tā rezultātā zemintegrāļu funkcijas kļūst sarežģītākas un integrāļu

aprēķināšana vairs nepakļaujas vienkāršajām epīru sareizināšanas metodēm, tādām kā Vereščagina, Simpsona paņēmieni. Visērtāk pielietot kādu no skaitliskās integrēšanas metodēm (trapeci, parabolu vai citu) vai arī integrēšanu veikt ar programmu MathCad. Pieņemot, ka inerces moments (att. 5.21) sijas laidumā mainās pēc paraboliska likuma, ērti izmantot funkciju

$$I(x) = \frac{I_0}{1 + b(x/2l)^2},$$

kurā parametra b vērtība ļauj regulēt maksimālās inerces momenta vērtības (virs balsta) attiecību pret minimālo I_0 (laiduma vidū). Koordināte x mainās no nulles sijas šķēlumā ar mazāko šķērsgriezumu līdz vērtībai $l/2$ sijas balstā. Tā, piem., gadījumā, ja pieņē-



att. 5.22

$I_n = 1,67 I_0$.

Kanoniskais vienādojums ir $\delta_{11}M_1 + \Delta_{1P} = 0$ un tā koeficientus nosaka sakarības

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_0} \int_0^l \bar{M}_1^2(x) \frac{I_0}{I(x)} dx = \frac{2}{EI_0} \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left[1 + b\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] dx = \frac{2l}{EI_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{20}\right);$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI_0} \int_0^l M_P(x) \bar{M}_1(x) \frac{I_0}{I(z)} dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^l \frac{x}{l} \cdot \frac{qx}{2} (l-x) \left[1 + b\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{ql^3}{24EI_0} (1 + 0,1b)$$

Atrisinot kanonisko vienādojumu

$$\frac{2l}{EI_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{20}\right) \cdot M_1 + \frac{ql^3}{24} (1 + 0,1b) = 0$$

iegūstam balstmomenta vērtību mainīga šķērsgriezuma nepārtrauktai sijai

am, ka $b = -1$, iegūstam $I_n = 1,33 I_0$, bet, ja $b = -2$, tad $I_n = 2I_0$.

Parametra b vērtības reāli mainās no “nelielas” negatīvas (piem., -2) vērtības līdz 0. Vērtībai $b = 0$ atbilst nemainīga šķērsgriezuma nepārtraukta sija.

Piemērs 5.4. Noteikt att. 5.22a dotās sijas lieces momentu epūru un salīdzināt to ar atbilstošu epūru nemainīga šķērsgriezuma nepārtrauktai sijai.

Atrisinājums. Izmantojot sakarību

$$I(x) = \frac{I_0}{1 + b\left(\frac{x}{2l}\right)^2}, \text{ nosakām inerces}$$

momenta vērtību virs vidējā balsta. Tā ir

$$M_{1(m)} = -\frac{ql^2}{16} \cdot \frac{1+0,1b}{1+0,15b},$$

bet izmantojot att. 5.22a doto laiduma vērtību $l = 60$ m, iegūstam, ka $M_1 = -248,68q$.

Lieces momentu epīra parādīta att. 5.22b. Tā iegūta summējot slodzes izraisīto lieces momentu epīru pamatsistēmā M_p un balstmomentu epīru ($M_{1(m)}$, $\bar{M}_1$).

Nemainīga šķērsriezuma ($I_0 = \text{const}$) nepārtrauktas sijas gadījumā (att. 5.22c) risinājuma gaita atšķiras ar to, ka iepriekš izmantotā kanoniskā vienādojuma koeficientus nosaka izteiksmes:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_0} \int_0^l \bar{M}_1^2(x) dx = \frac{2}{EI_0} \int_0^l \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx = \frac{2l}{3EI_0};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI_0} \int_0^l M_p(x) \bar{M}_1(x) dx = \frac{1}{EI_0} \int_0^l \frac{x}{l} \cdot \frac{qx}{2} (l-x) dx = \frac{ql^3}{24EI_0}.$$

Izmantojot šo koeficientu skaitliskās vērtības doto laidumu sijai, iegūstam, ka balstmomentu vērtība ir $M_{1(nem)} = -225q$.

Atbilstošā lieces momentu epīra redzama att. 5.22d.

Salīdzinot mainīga ($M_{(m)}$) un nemainīga ($M_{(nem)}$) šķērsriezumu siju lieces momentu epīras, varam konstatēt, ka mainīga sijas šķērsriezuma gadījumā maksimālā lieces momenta vērtība ir lielāka kā nemainīga šķērsriezuma sijas gadījumā, bet šī vērtība ir šķēlumā ar maksimālo pretestības momentu (virs balsta), tātad normālie spriegumi šajā šķēlumā var būt mazāki kā nemainīga šķērsriezuma sijā. Optimālā gadījumā sijas šķērsriezuma maiņas likumu varētu izvēlēties tā, lai visos sijas šķēlumos normālie spriegumi būtu nemainīgi.

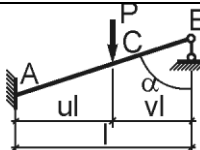
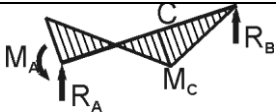
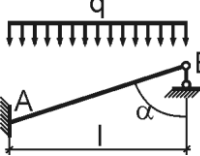
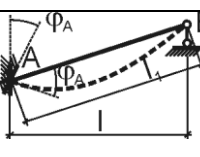
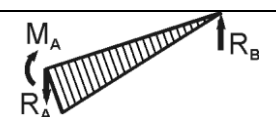
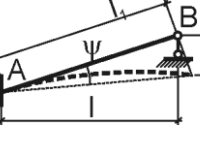
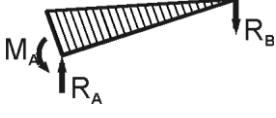
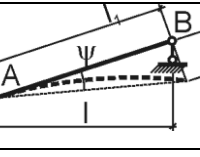
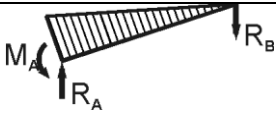
5.7. Nepārtrauktas sijas aprēķins ar pārvietojumu metodi

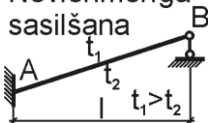
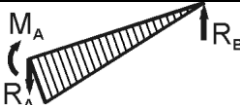
Pārvietojuma metodi var uzskatīt par ērtāku nepārtrauktu siju aprēķiniem gadījumos, kad sijas viens vai abi gali iespīlēti, kā arī gadījumos, ja sijas ass ir lauza. Pirmajā gadījumā iespējams samazināt nezināmo, tātad arī kanonisko vienādojumu skaitu, bet otrajā gadījumā, kad slodzes darbības virziens nav perpendikulārs sijas asij, slīpi orien-

tētu sijas posmu (laidumu) reakciju un lieces momentu vērtības var tikt iepriekš izskaitļotas un tabulētas. Attiecīgie rezultāti doti tabulās 5.2 un 5.3.

Tabula 5.2

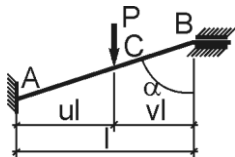
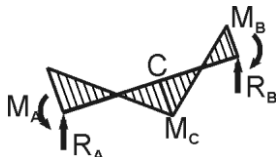
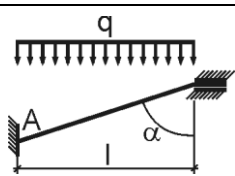
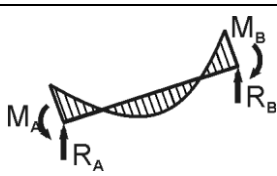
Balstu reakciju un lieces momentu aprēķins vienā galā iespīlētiem otrā brīvi balstītiem stieņiem

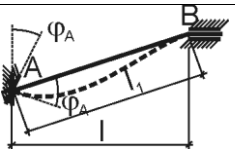
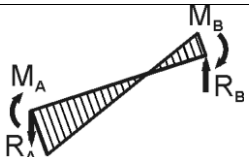
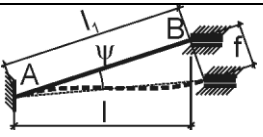
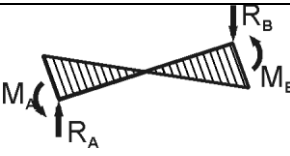
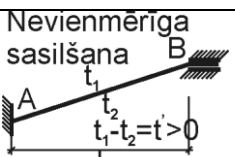
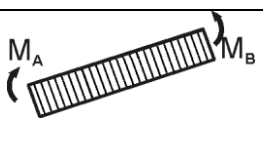
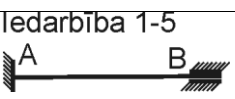
	Stieņa un iedarbības shēma	Lieces momentu epīra, balstu reakcijas	Sakarības
1.			$M_A = \frac{Pl}{2} v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Pl}{2} u^2 v(3-u)$ $R_A = \frac{Pv}{2} (3-v^2)$ $R_B = Pu^3 \left(1 + \frac{v}{2}\right) = \frac{Pu^2}{2} (3-u)$
2.			$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} ql ; \quad R_B = \frac{3}{8} ql$
3.			$M_A = \frac{3EI}{l_1} \varphi_A$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{ll_1} \varphi_A$
4.			$M_A = \frac{3EI}{ll_1} f = \frac{3EI}{l_1} \psi$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2 l_1} f = \frac{3EI}{ll_1} \psi$
5.			$M_A = \frac{3EI}{l_1^2} f = \frac{3EI}{l_1} \psi$

	Stieņa un iedarbības shēma	Lieces momentu epīra, balstu reakcijas	Sakarības
			$R_A = R_B = \frac{3EI}{ll_1^2} f = \frac{3EI}{ll_1} \psi$
6.	Nevienmērīga sasilšana 		$M_A = \frac{3EI\alpha'}{2d}$ $R_A = R_B = \frac{3EI\alpha'}{2dl},$ d – šķērsgriezuma augstums; α – termiskās izplešanās koeficients; $t' = t_1 - t_2$.
7.	Iedarbība 1-6 		Iepriekšējās sakarības, pie $l_1 = l$.

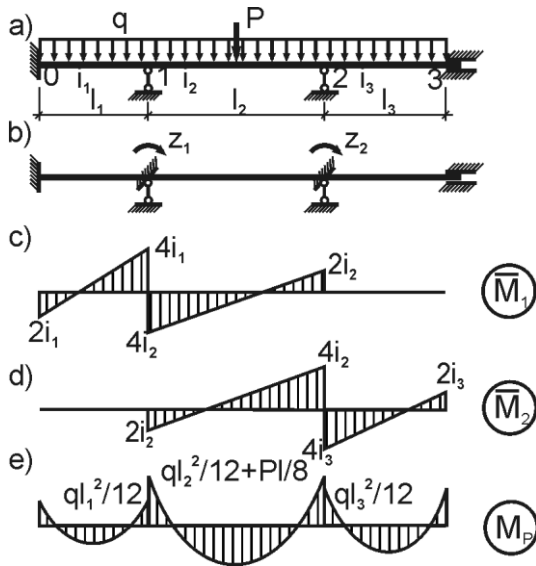
Tabula 5.3

Balstu reakciju un lieces momentu aprēķins abos galos iespīlētiem stieņiem

	Stieņa un iedarbības shēma	Lieces momentu epīra, balstu reakcijas	Sakarības
1.			$M_A = uv^2 Pl$ $M_B = u^2 v Pl$ $M_C = 2u^2 v^2 Pl$ $R_A = v^2 (1 + 2u) P$ $R_B = u^2 (1 + 2v) P$
2.			$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

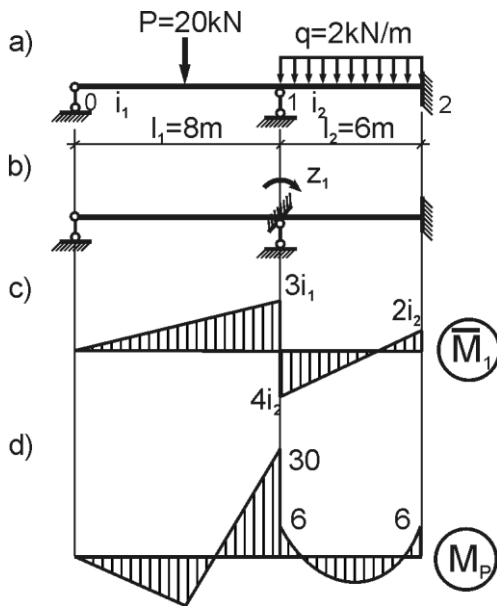
	Stieņa un iedarbības shēma	Lieces momentu epūra, balstu reakcijas	Sakarības
3.			$M_A = \frac{4EI}{l_1} \varphi_A$ $M_B = \frac{2EI}{l_1} \varphi_A$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{ll_1} \varphi_A$
4.			$M_A = M_B = \frac{6EI}{l_1^2} f = \frac{6EI}{l_1} \psi$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l_1^2 l} f = \frac{12EI}{l_1 l} \psi$
5.			$M_A = M_B = \frac{EI\alpha'}{d}$ $R_A = R_B = 0,$ d – šķērsgriezuma augstums; α – termiskās izplešanās koeficients.
6.			Iedarbība 1-5 Iepriekšējās sakarības, pie $l_1 = l$.

Gadījumam, kad slodze ir perpendikulāra sijas posma asij, izmantojot substitūciju $l_1 = l$, iegūstam iepriekš pārvietojumu metodes aprēķinos izmantotos rezultātus (sk. tab. 3.1). Izvēloties pārvietojumu metodes pamatsistēmu nepārtrauktai sijai nav nepieciešams ievest papildus lineārās saites. Pielietojot pārvietojuma metodi nepārtrauktai sijai, papildus saites iespīlējumu veidā tiek ieviestas virs balstiem. Nepārtrauktām sijām kinemātiskās nenoteicamības pakāpe ir par divām vienībām mazāka kā sijas balstu skaits. Att. 5.23 dotās sijas pamatsistēma sastāv no trijiem abos galos iespīlētiem posmiem. Tā satur divus nezināmos Z_1 un Z_2 . Tātad ir divas reizes kinemātiski nenosakāma. Spēku metodes gadījumā dotā sija ir četras reizes statiski nenosakāma. Pārvietojumu metodes priekšrocības acīm redzamas. Att. 5.23c, d, e parādītas vienības epūras $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$ un konkrētas slodzes epūra M_p . Kanonisko vienādojumu sistēmas



att. 5.23

Atrisinot sistēmu nosakām nezināmo Z_1 un Z_2 vērtības un nepārtrauktās sijas lieces momentu epīra tiek iegūta atbilstoši sakarībai $M = M_p + Z_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2$.



att. 5.24

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

koeficientus nosaka sakarības

$$r_{11} = 4(i_1 + i_2);$$

$$r_{12} = 2i_2;$$

$$R_{1P} = \frac{ql_1^2}{12} - \left(\frac{ql_2^2}{12} + \frac{Pl}{8} \right);$$

$$r_{22} = 4(i_2 + i_3);$$

$$r_{21} = r_{12};$$

$$R_{2P} = \frac{ql_2^2}{12} + \frac{Pl}{8} - \frac{ql_3^2}{12}.$$

Piemērs 5.5. Noteikt nemainīga šķēluma nepārtrauktas sijas lieces momentu epīru un balstu reakcijas att. 5.24a dotajai sijai.

Atrisinājums. Dotā sija ir vienreiz kinemātiski nenosakāma. Tās pamatsistēma dota att. 5.24b. Vienības un slodzes epīras redzamas att. 5.24.c,d. Atsevišķo laidumu īpatnējās stingrības koeficienti ir $i_1 = \frac{EI}{8}$; $i_2 = \frac{EI}{6}$, bet kanoniskā vienojuma koeficienti ir

$$r_n = \frac{3EI}{8} + \frac{4EI}{6} = \frac{25EI}{24};$$

$$R_{1P} = 24kNm.$$

No kanoniskā vienādojuma

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

nosakām, ka $Z_1 = -\frac{23,04}{EI}.$

Reizinot vienības epīru $\bar{M}_1$ ar noteikto Z_1 vērtību un saskaitot šo reizinājumu ar M_p epīru, iegūstam galīgo lieces momentu epīru nepārtrauktai sijai.

Piemērs 5.6. Uzkonstruēt iekšējo piepūļu epīras 5.25a attēlā parādītajai sijai.

Atrisinājums. Pārvietojumu metodes pamatsistēma un atbilstošās vienības un slodzes epīras parādītas att. 5.25b-f. Sija ir trīs reizes kinemātiski nenoteicama un tātad tai ir trīs kanoniskie vienādojumi. Kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus atrodam izgriežot atbilstošos mezglus un apskatot to līdzsvaru. Tā rezultātā iegūstam:

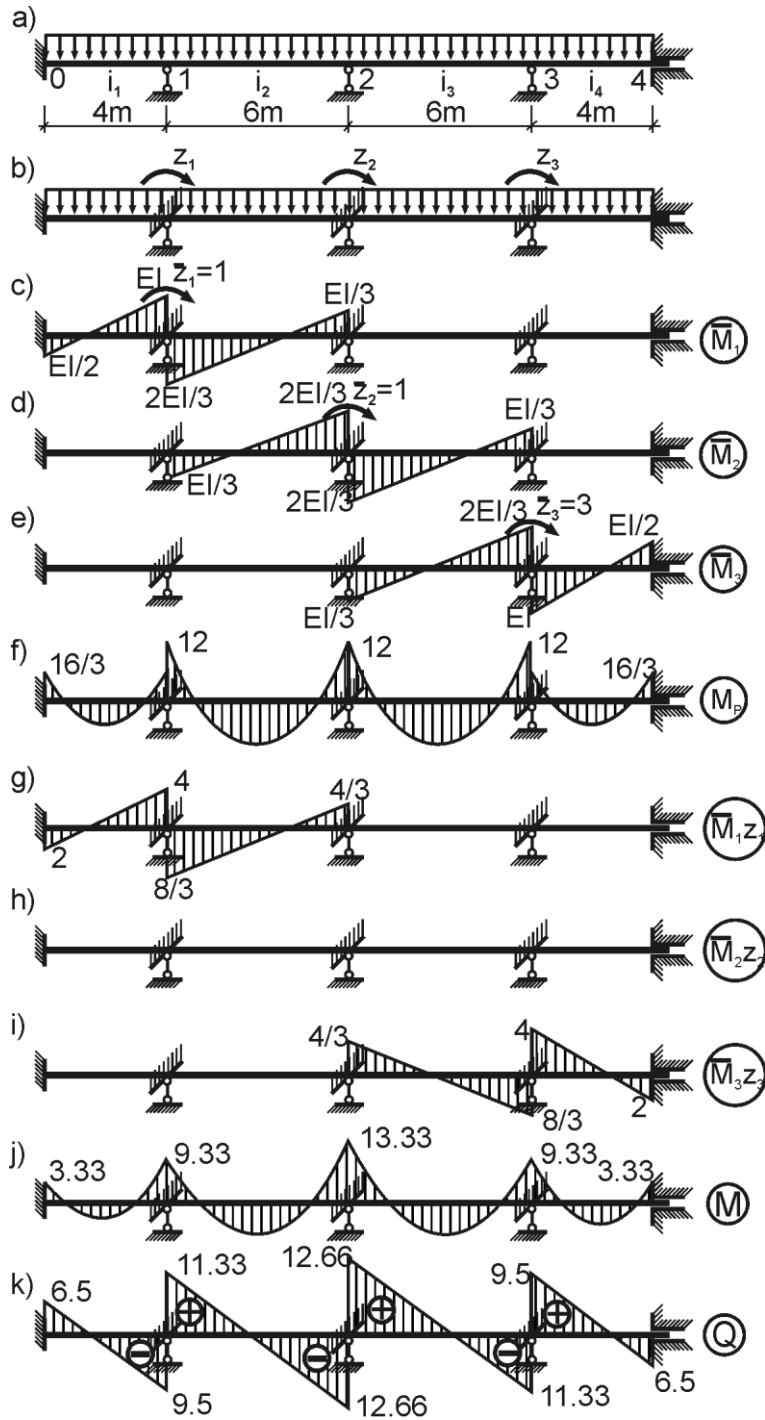
Epīras	Izgriežot pirmo mezglu (balstu 1)	Izgriežot otro mezglu (balstu 2)	Izgriežot trešo mezglu (balstu 3)
$\bar{M}_1$	$r_{11} = 5EI / 3$	$r_{21} = EI / 3$	$r_{31} = 0$
$\bar{M}_2$	$r_{12} = EI / 3$	$r_{22} = 4EI / 3$	$r_{32} = EI / 3$
$\bar{M}_3$	$r_{13} = 0$	$r_{23} = EI / 3$	$r_{33} = 5EI / 3$
$\bar{M}_p$	$R_{1P} = -20 / 3$	$R_{2P} = 0$	$R_{3P} = 20 / 3$

Ievietojot iegūtās koeficientu vērtības kanoniskajos vienādojumos un atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūstam:

$$Z_1 = 4 / EI ; Z_2 = 0 ; Z_3 = -4 / EI .$$

Sareizinot vienības epīras ar Z_1 , Z_2 un Z_3 (att. 5.25g-i) un saskaitot ar slodzes epīru (att. 5.25f), iegūstam galīgo lieces momentu epīru (att. 5.25i), no kuras savukārt varam ie-

gūt šķērsspēku epīru (att. 5.25k).

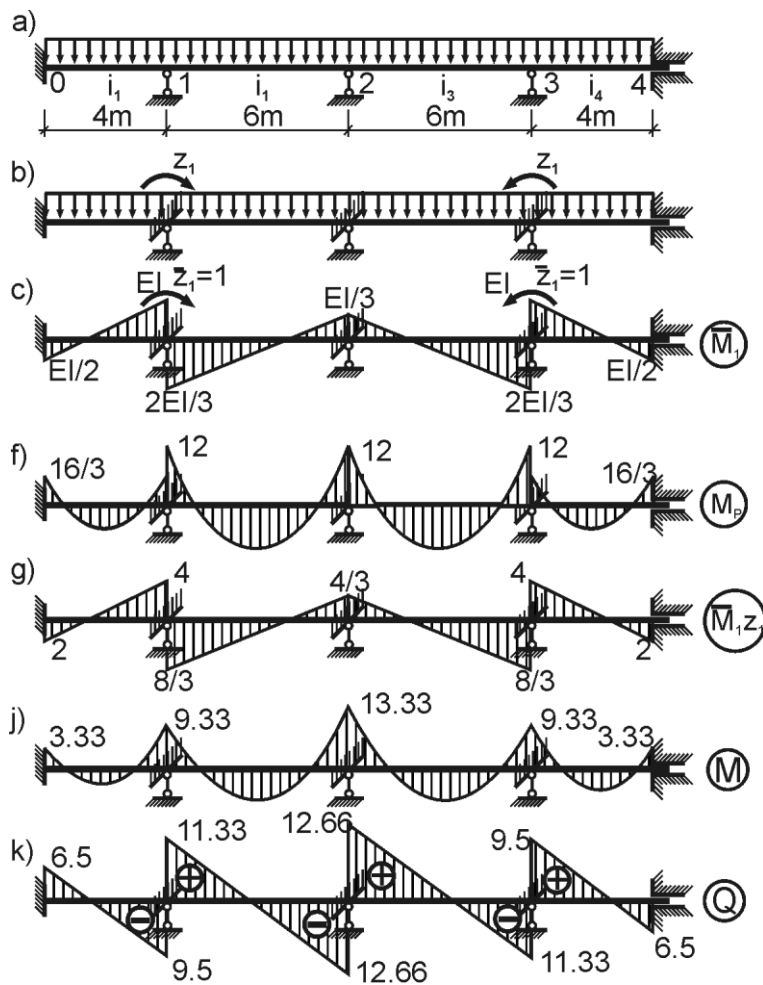


att. 5.25

5.8. Simetrijas izmantošana nepārtrauktu siju aprēķinā

Nosakot iekšējās piepūles simetriskai nepārtrauktai sijai, kas slogota ar simetriski izvietotu ārējo slodzi, iespējams ievērojami atvieglot aprēķinus, ņemot vērā sekojošas īpašības:

1. simetriski izvietotos mezglos šo mezglu pagriezieni ir vienādi pēc moduļa un pretēji vērsti;
2. mezgla, kurš atrodas uz simetrijas ass, pagrieziens ir vienāds ar 0.

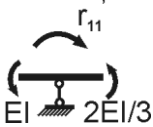
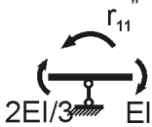
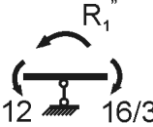


att. 5.26

Piemērs 5.7. Atrisināt iepriekšējo piemēru, izmantojot nepārtrauktās sijas simetriju.

Atrisinājums. Izvēloties pamatsistēmu (att. 5.26b), neapskatam pagriezienu balstam uz simetrijas ass un ievēdam vienu nezināmu pagriezienu Z_1 priekš abiem simetriski novietotajiem mezgliem. Līdz ar to trīsreiz kinemātiski nenoteicamas sistēmas vietā varam risināt vienreiz nenoteicamu sistēmu.

Līdz ar to jānosaka tikai viena kanoniskā vienādojuma koeficients un brīvais loceklis. To var darīt izgriežot abus apskatāmos mezglus un summējot iegūtos rezultātus vai arī izgriežot tikai vienu no simetriskajiem mezgliem.

			
$r'_{11} = 5EI / 3$	$r''_{11} = 5EI / 3$	$R'_{1P} = -20 / 3$	$R''_{1P} = -20 / 3$
$r_{11} = r'_{11} + r''_{11}$		$R_{1P} = R'_{1P} + R''_{1P}$	

Ievietojot atrastās koeficientu vērtības kanoniskajā vienādojumā $r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$, iegūstam $Z_1 = 4 / EI$.

Pareizino vienības epīru ar Z_1 (att. 5.26g) un saskaitot ar slodzes epīru M_p , iegūstam galīgo momentu epīru un pēc tam šķērsspēku epīru.

5.9. Ietekmes līniju konstruēšana

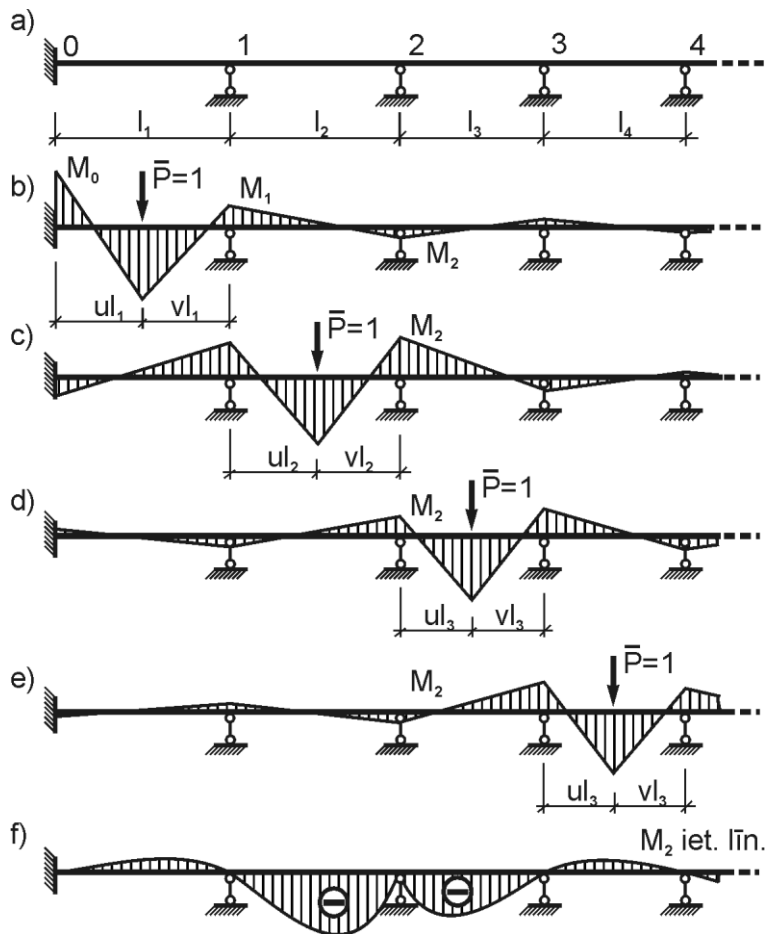
Ar pastāvīgu slodzi (arī pašsvaru) slogotas sijas gadījumā tās deformativitātes un stiprības aprēķini veicami izmantojot iepriekš izklāstītās metodikas. Konstruēšanā nepārtrauktās sijas veidā parasti raksturīgākā ir mainīgā slodze. Spriest par šādas slodzes iespaidu uz siju nestspēju un piepūli atkarību no mainīgās slodzes veida un tās intensitātes, dod iespēju attiecīgo piepūli ietekmes līnijas.

Att. 5.27a dota daudzslaidumu kreisā galā iespīlēta nepārtraukta sija. Piemēra veidā

konstruēsim balsta momenta M_2 ietekmes līniju. Aprēķinu sadalīsim vairākos etapos.

1. Slodze laidumā l_1 (att. 5.27b). Izmantojot sakarības (5.11) un ņemot vērā izteiksmes (5.3), iegūstam pirmā laiduma labā balsta momenta izteiksmi atkarībā no vienības slodzes novietojuma šai laidumā:

$$M_1 = -\frac{uv(1+u)k_1 + uv(1+v)}{k_1k'_1 - 1}l_1.$$



att. 5.27

Tādā gadījumā balstmomenta M_2 izmaiņas likumu atkarībā no slodzes $\bar{P}=1$ stāvokļa laidumā l_1 , nosaka sakarība

$$M_2 = -\frac{M_1}{k'_2}, \text{ vai } M_2 = -\frac{uv(1+u)k_1 - uv(1+v)}{k'_2(k_1k'_1 - 1)}l_1.$$

Praktiskos izskaitļojumus (t.i. ietekmes līnijas konstruēšanu) veic nepārtraukto slogojumu aizvietojojot ar diskrētos punktos pieliktu slodzi $\bar{P} = 1$. To veic izvēloties laidumā galīgu punktu skaitu, kuros tiek novietota šī slodze.

Tā, piemēram, sadalot laidumu 10 vienādos nogriežņos, iegūstam sekojošas koeficientu u , v un to veidoto izteiksmju vērtības:

u	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
v	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
uv(1+u)	0	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0
un(1+v)	0	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,099	0

Izmantojot šīs tabulas skaitliskās vērtības, saskaņā ar augstāk uzrakstīto M_2 izteiksmi, iegūstam 10 ietekmes līnijas ordinātu vērtības.

2. Slodze laidumā l_2 (att. 27c). Saskaņā ar sakarībām (5.11) laiduma labajā balstā iegūstam izteiksmi

$$M_2 = -\frac{uv(1+u)k_2 + uv(1+v)}{k_2k'_2 - 1}l_2.$$

Šī izteiksme arī nosaka ietekmes līnijas ordinātes laidumā l_2 .

3. Slodze laidumā l_3 (att. 5.27d). Analogi kā iepriekšējā laiduma slogošanas gadījumā balstmomenta M_2 vērtību nosaka sakarības (5.11), tikai ņemot vērā, ka šajā gadījumā M_2 ir slogotā laiduma kreisais balsts. Ietekmes līnijas posma l_3 konstruēšanai nepieciešamā izteiksme ir

$$M_2 = -\frac{uv(1+v)k'_3 + uv(1+u)}{k_3k'_3 - 1}l_3.$$

4. Slodze laidumā l_4 (att. 5.27e). Vispirms saskaņā ar sakarībām (5.11) iegūstam

balstmomenta izteiksmi balstā 3:

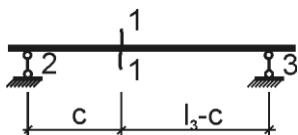
$$M_3 = -\frac{uv(1+v)k'_4 + uv(1+u)}{k_4k'_4 - 1}l_4,$$

bet izmantojot sakarību

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3}, \text{ iegūstam} \quad M_2 = \frac{uv(1+v)k'_4 + uv(1+u)}{k_3(k_4k'_4 - 1)}l_4.$$

Tā arī ir izteiksme balstmomenta M_2 ietekmes līnijas ordinātu noteikšanai laidumā l_4 .

Esam ieguvuši četras izteiksmes (katru savam laidumam) balstmomenta M_2 ietekmes līnijas konstruēšanai. Balstmomenta ietekmes līnijas raksturs ir nemainīgs visām nepārtrauktām sijām. Atšķirīgas ir ordinātu vērtības, kuras mainās atkarībā no laidumu attiecības un sijas galu nostiprinājuma. Balstu momenta ietekmes līnijai katrā laidumā ir kubiskās parabolas raksturs ar ordinātu vērtībām, kuras dilst attālinoties no balsta, kuram konstruēta attiecīga balstmomenta ietekmes līnija. Par tās raksturu var spriest pēc att. 5.27f parādītās balsta 2 balstmomenta ietekmes līnijas. Analogā veidā var tikt konstruēta jebkura cita balstmomenta ietekmes līnija.



att. 5.28

Izmantojot patvaļīga laiduma abu balstmomentu ietekmes līnijas, iespējams noteikt ietekmes līniju lieces momentam jebkurā laiduma šķēlumā. Šķēlūmam 1–1 (att. 5.28) ir spēkā sakarība

$$M_{1-1} = M_{1-1}^0 + \frac{l_3 - c}{l_3} M_2 + \frac{c}{l_3} M_3.$$

Analogā sakarība ir arī starp attiecīgo momentu ietekmes līnijām. Tātad šķēlūmā 1–1 momenta ietekmes līnija ir triju ietekmes līniju summa

$$iet.l.(M_{1-1}) = iet.l.(M_{1-1}^0) + \frac{l_3 - c}{l_3} iet.l.(M_2) + \frac{c}{l_3} iet.l.(M_3).$$

Pirmā ietekmes līnija attiecas uz pamatsistēmas (abos galos brīvi balstītas sijas) šķēlumu 1–1, bet pārējās divas ir atbilstošā laiduma balstmomentu ietekmes līnijas reizinātas ar attiecīgiem koeficientiem. Šo līkņu raksturs parādīts att. 5.29.

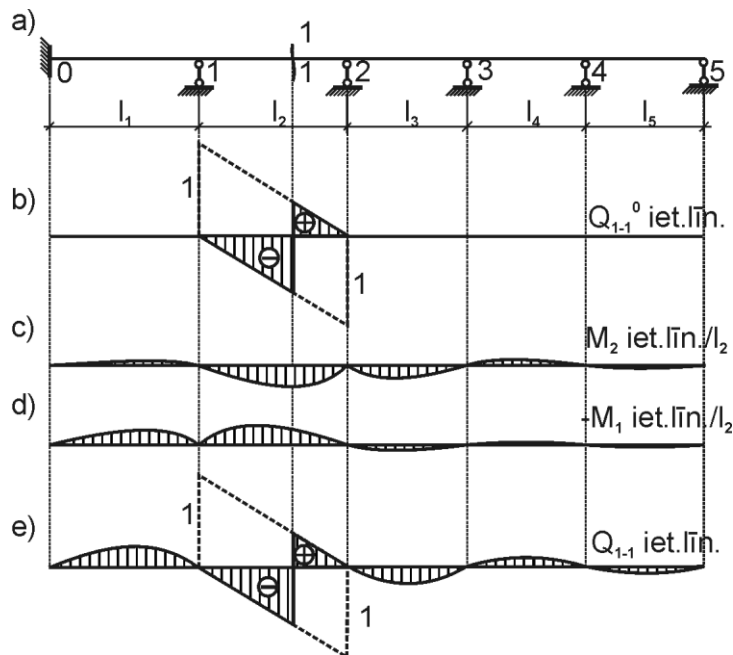
5.10. Šķērsspēku un balstreakciju ietekmes līnijas

Šķērsspēka ietekmes līniju noteikšanai varam izmantot pēc formas plaši pazīstamo sa-

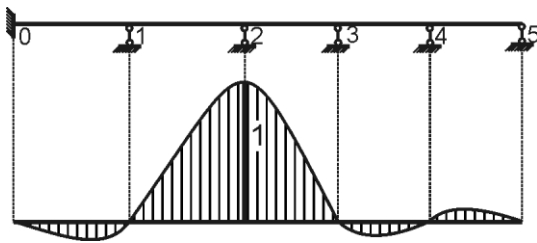
$$\text{iet.l.}(Q_{I-I}) = \text{iet.l.}(Q_{I-I}^0) + \frac{1}{l_n} [\text{iet.l.}(M_n) - \text{iet.l.}(M_{n-1})],$$

kur Q_{I-I}^0 – šķērsspēks pamatsistēmas attiecīgā šķēlumā;

M_n, M_{n-1} – balstmomenti laiduma l_n labajā un kreisajā galā.



att. 5.31



att. 5.32

Šķērsspēka ietekmes līnijas konstruēšanas piemērs parādīts att. 5.31. Izmantojot divos balstam bezgala tuvos šķēlumos (pa kreisi un pa labi no balsta) zināmās šķērsspēku ietekmes līnijas, balsta reakcijas ietekmes līniju varam iegūt kā divu ietekmes līniju

starpību

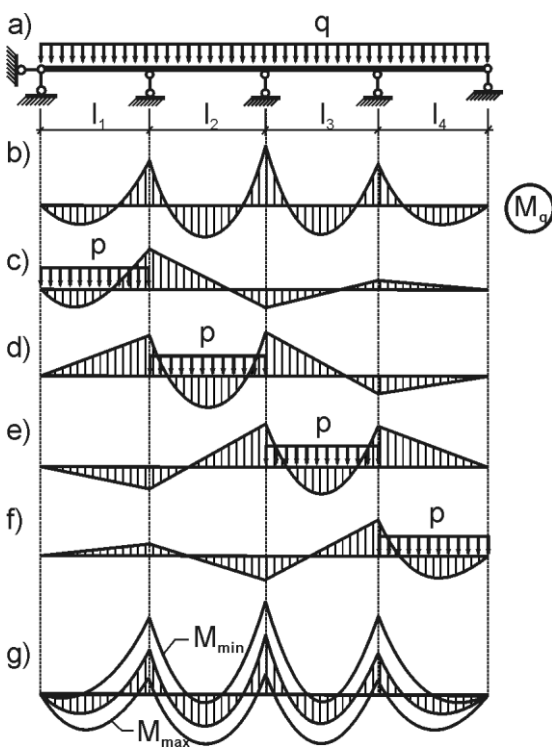
$$iet.I.(v_n) = iet.I.(Q_n^{lab}) - iet.I.(Q_n^{kr})$$

Šādi iegūtas balsta reakcijas ietekmes līnijas raksturs parādīts attēlā 5.32.

5.11. Nepārtrauktās sijas neizdevīgākais sloojums

Gadījumos, ja bez pastāvīgās uz siju vai tās posmiem darbojas arī laikā mainīga slodze, aktuāls kļūst jautājums par to, pie kādiem nosacījumiem dažādos sijas šķēlumos rodas lielākās un mazākās lieces momentu vai šķērsspēku vērtības. Atbildes uz šiem jautājumiem var gūt konstruējot pietiekamam sijas šķēlumu daudzumam ietekmes līnijas.

Tas ir darbietilpīgs un visai tuvināts problēmas risinājums. Tādēļ kā vienkāršāka, racionālāka un vispārīgāka tiek izmantota metodika, kas balstās uz katra sijas laiduma slo-



att. 5.33

gojumu ar mainīgo slodzi. Tā rezultātā veidojas epīras, kuru skaits vienāds ar sijas laidumu skaitu. Att. 5.33a dotajai sijai pie pastāvīgas vienmērīgas izkliedētas slodzes q lieces momentu M_q epīra konstruējama atbilstoši iepriekš izklāstītajai metodikai (att. 5.33b).

Ar mainīgu vienmērīgi izkliedētu slodzi p sloojot katru laidumu atsevišķi, iegūstam parciālās lieces momentu epīras M_{pi} (att. 5.33 c, d, e, f). Tās ērti konstruēt izmantojot momentfoku metodi. Tālāk rīkojas sekojoši: algebriski saskaitām jebkurā šķēlumā momenta epīras ordināti, ko izraisījusi pastāvīgā slodze q ar vi-

sām atbilstošajām pozitīvajām ordinātām attiecīgajā šķēlumā, ko izraisījušas dažādos laidumos pieliktās mainīgās slodzes p . Tās mainīgās slodzes, kuras attiecīgajā šķēlumā

rada negatīvas momenta vērtības netiek ņemtas vērā. Šādā veidā tiek iegūta momenta vērtība

$$M_{\max} = M_q + \sum M_{pi}^+$$

jebkurā brīvi izvēlēta šķēlumā. Analogi rīkojamies momentu $M_{\min}$ noteikšanai: pie pastāvīgās slodzes q izraisītā lieces momenta skaitliskās vērtības M_q algebriski pieskaitām visas mainīgo slodžu p izraisītās negatīvās lieces momentu vērtības attiecīgajā šķēlumā. Tātad jebkurā šķēlumā

$$M_{\min} = M_q + \sum M_{pi}^-$$

(indeksi var mainīties no 1 līdz nepārtrauktās sijas laiduma skaitam n). Pēc absolūtās vērtības $M_{\min}$ var izrādīties arī lielāks par $M_{\max}$.

Pielietojot izklāstīto metodiku pietiekami lielum šķēlumu skaitam katrā sijas laidumā un savienojot iegūtos punktus, iegūstam divas lieces momentu robežlīknes (att. 5.33g). Tās sauc par *lieces momenta aptvērējepīrām*. Viena no tām atbilst vērtībām $M_{\min}$, bet otra vērtībām $M_{\max}$. Att. 5.33 konstruētās epīras attiecas uz vienmērīgi izklaidētu mainīgo slodzi, bet mainīgā slodze var būt arī cita veida, piem., koncentrētu spēku sistēma. Analogi var rīkoties konstruējot šķērsspēku aptvērējepīras. Šķērsspēku aptvērējepīru konstruēšana iespējama izmantojot nelielu šķēlumu skaitu, jo izklaidētas kā arī koncentrētas slodzes gadījumos šķērsspēku epīru veido slīpi vai horizontāli orientēti taisņi nogriežņi. Lēcieni vai virziena maiņa šajās epīrās iespējama tikai koncentrētas slodzes pielikšanas vietās un izklaidētās slodzes apgabalā. Šais šķēlums tad arī jāizdara aptvērējepīru aprēķins, bet pārējos šķēlumos saglabājas lineāra sakarība (attiecīgie punkti tiek savienoti ar taisnēm).

Analizējot parciālās lieces momentu epīras M_{pi} (att. 5.33.c, d, e, f) konstatējam, ka lielāko momenta vērtību jebkurā laidumā iegūst papildus slogojot arī tos laidumus, kuros mainīgā slodze izraisa tādas pašas zīmes sijas izlieci kā apskatāmajā laidumā. Lielāko momenta vērtību pirmajā laidumā iegūstam, ja tiek papildus slogoti laidumi l_1 un l_3 , bet lielākā momenta vērtība otrajā laidumā būs gadījumā, ja papildus tiks slogoti laidumā l_2 un l_4 . Analogi spriedumi iespējami arī par neizdevīgāko slogojumu veidu citu

piepūļu aprēķināšanā.

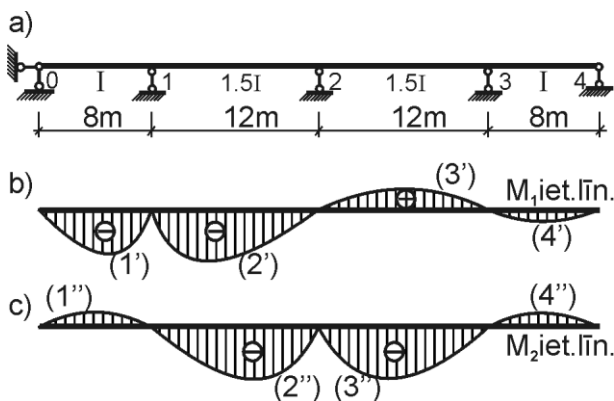
Nepārtrauktu siju neizdevīgākā slogojuma noteikšanai ir spēkā sekojoši vispārīgi noteikumi:

1. lielāko lieces momentu laidumā iegūst, ja tiek slogots attiecīgais laidums un katrs otrais pa labi un pa kreisi no šī laiduma;
2. lielāko balstmomentu, balstreakciju un šķērsspēku balstā iegūst, ja tiek slogoti divi balstam tuvākie (pa kreisi un pa labi) laidumi un katrs otrais pa labi un pa kreisi no šiem laidumiem.

Šie noteikumi piemērojami nepārtrauktām sijām ar patvaļīgu laidumu skaitu un atšķirīgu galu nostiprinājumu.

Veicot nepārtrauktu siju dimensionēšanu, nepieciešams novērtēt iespējamās lieces momentu ekstremālās vērtības. Atbildi uz šo jautājumu dod aptvērējepīras. Varam apgalvot, ka neviena cita epīra, kura iegūta jebkuram slodzes novietojumam (protams, pie fiksēta slodzes lieluma) neizies ārpus aptvērējepīru kontūrām. Tātad dimensionēšana var tikt veikta pēc $\max (M_{\max} \text{ vai } M_{\min})$ absolūtās vērtības.

Piemērs 5.8. Uzkonstruēt ar fokusu metodi nepārtrauktas sijas (att. 5.34) balstu momentu ietekmes līnijas.



att. 5.34

Atrisinājums. Sijas reducētie laidumi $l'_1 = l'_2 = l'_3 = l'_4 = 8 \text{ m}$.

Momentfokusi šādai sijai nosakāmi līdzīgi kā iepriekšējā piemērā. Iegūstam: kreisos momentfokusus: $k_1 = \infty$; $k_2 = 4$; $k_3 = 3,75$; $k_4 = 3,73$;

labos momentfokusus $k'_1 = 3,73$; $k'_2 = 3,75$; $k'_3 = 4$; $k'_4 = \infty$.

Ja slodze pirmajā laidumā, tad balstmomenta M_1 ietekmes līniju apraksta funkcija

$$\begin{aligned}
iet.l.(M_1) &= -\frac{uv(1+u)k_1 - uv(1+v)}{k_1k'_1 - 1}l_1 = -\frac{uv(1+u) - uv(1+v)/k_1}{k'_1 - 1/k_1}l_1 = \\
&= -\frac{uv(1+u)}{3,73} \cdot 8 = -2,143uv(1+u)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

bet balstmomenta M_2 ietekmes līniju funkcija

$$iet.l.(M_2) = -iet.l.(M_1)/k'_2 = 2,143uv(1+u)/3,75 = 0,575uv(1+u) \tag{5.14}$$

Atbilstoši sakarībām (5.13) un (5.14) izskaitļotās ietekmes līniju ordinātas veido balstmomentu M_1 un M_2 ietekmes līnijas pirmā laidumā.

Slogots otrais laidums

Tādā gadījumā balstmomentu M_1 un M_2 vērtības nosaka sakarības (5.11) un atbilstošās ietekmes līnijas otrajā posmā apraksta sakarības

$$\begin{aligned}
iet.l.(M_1) &= -\frac{uv(1+v)k'_2 - uv(1+u)}{k_2k'_2 - 1}l_2 = -\frac{uv(1+v)3,75 - uv(1+u)}{4 \cdot 3,75 - 1}12 = \\
&= -0,857uv(2,75 + 3,75v - u)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
iet.l.(M_2) &= -\frac{uv(1+u)k_2 - uv(1+v)}{k_2k'_2 - 1}l_2 = -\frac{uv(1+u)4 - uv(1+v)}{4 \cdot 3,75 - 1}12 = \\
&= -0,857uv(3 + 4u - v)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Sakarībām (5.15) un (5.16) atbilstošās diskretās ordinātu vērtības otrajā posmā dotas att. 5.34.

Slogots trešais laidums

No sakarībām (5.11) iegūstam

$$\begin{aligned}
iet.l.(M_2) &= -\frac{uv(1+v)k'_3 - uv(1+u)}{k_3k'_3 - 1}l_3 = -\frac{uv(1+v)4 - uv(1+u)}{3,75 \cdot 4 - 1}12 = \\
&= -0,857uv(3 + 4v - u)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

bet izmantojot sakarību $M_1 = -\frac{M_2}{k_2}$, iegūstam

$$iet.l.(M_1) = -0,214uv(3 + 4v - u) \tag{5.18}$$

Slogots ceturtais posms

$$\begin{aligned} iet.l.(M_3) &= -\frac{uv(1+v)k'_4 - uv(1+u)}{k_4 k'_4 - 1} l_4 = -\frac{uv(1+v) - uv(1+u)/k'_4}{k_4 - 1/k'_4} l_4 = \\ &= -\frac{uv(1+v)}{3,73} \cdot 8 = -2,143uv(1+v) \end{aligned}$$

Tā kā pēc momentfokusu definīcijas $M_2 = -\frac{M_3}{k_3}$, tad

$$iet.l.(M_2) = -0,572uv(1+v), \quad (5.19)$$

bet no sakarības $M_1 = -\frac{M_2}{k_2}$

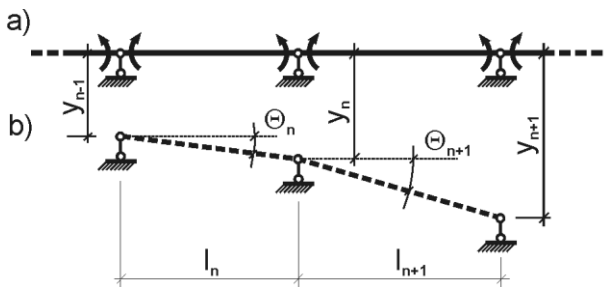
iegūstam

$$iet.l.(M_1) = -0,143uv(1+v) \quad (5.20)$$

Sakarībām (5.19) un (5.20) atbilstošās līknes parādītas att. 5.34 ceturtajā posmā. Balsmmenta M_3 ietekmes līnija ir iet.l.(M_1) spoguļattēls pret simetrijas asi, t.i. caur balstu 2.

5.12. Nepārtrauktās sijas aprēķins uz balstu sēšanos

Ar balstu sēšanos sapratīsim gadījumus, kad taisnas nepārtrauktās sijas atbalsta punkti nav izvietojušies uz taisnes. Par iemeslu šādai situācijai var būt kļūdas balstu nivelēšanā, grunts sēšanās, izskalojumi, padevīgi balsti u.c. Sija kļūst līka un tajā rodas spriegumi.



att. 5.35

Aprēķinos uz balstu sēšanos spēku metodes gadījumā kanoiskie vienādojumi vispārīgā formā ir

$$\sum_j \delta_{ij} X_j + \Delta_{is} = 0,$$

kur Δ_{is} ir pārvietojumi pamat-

sistēmā nezināmo X_i virzienā, kuri rodas balstu sēšanās rezultātā.

Nepārtrauktas sijas gadījumā šāda kanoniskā vienādojuma būtību var raksturot šādi: elastīgās līnijas lūzumam balstā, ko izraisījusi visu lieko nezināmo un balstu sēšanās kopdarbība, jābūt nullei.

Laidumu l_n un l_{n+1} slīpuma leņķus pret sākotnējo stāvokli, kuri veidojas balstu sēšanās rezultātā, apzīmējam ar θ_n un θ_{n+1} (att. 5.35) un nosakām ar sakarībām

$$\theta_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n}; \quad \theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}, \quad \text{u.t.t.}$$

Šos slīpuma leņķus varam uzskatīt par zināmiem un pieņemt, ka tie ir pozitīvi, ja vērsti pulksteņa rādītāja kustības virzienā. Lauzuma leņķi, kurš rodas pamatsistēmā n -tajā balstā nosaka starpība $\theta_{n+1} - \theta_n$.

Tādā gadījumā vispārīgie trīsmomentu vienādojumi balstu sēšanās gadījumā ir:

$$l'_n M_{n-1} + 2(l'_n + l_{n+1})M_n + l'_{n+1} M_{n+1} + 6EI_0(\theta_{n+1} - \theta_n) = 0.$$

Pirmajam un pēdējam vienādojumam ir vienkāršāka forma. Tā sijām ar locīklveida gala nostiprinājumiem pirmais kanoniskais vienādojums ir

$$2(l'_1 + l_2)M_1 + l'_2 M_2 + 6EI_0(\theta_2 - \theta_1) = 0,$$

bet sijai ar iespīlējumu kreisajā balstā

$$2l'_1 M_0 + l'_1 M_1 + 6EI_0 \theta_1 = 0.$$

Koeficienti pie nezināmajiem M_{n-1} , M_n , M_{n+1} neatšķiras no koeficientiem ārējā slogojuma gadījumā.

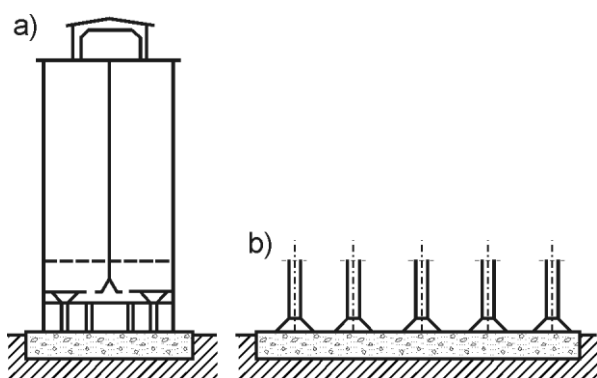
Toties brīvais loceklis Δ_{ns} būtiski atšķiras no pārvietojuma Δ_{np} . Pārvietojums Δ_{ns} ir atkarīgs no elastības moduļa E . Tas nozīmē, ka no divām pilnīgi vienādas ģeometrijas sijām lielākās piepūles radīsies sijā no stingrāka materiāla (E lielāks).

Inerces momentu I_0 satur visi vienādojuma locekļi, tādēļ tas lieces momentu neiespaido. Kanonisko vienādojumu brīvā locekļa vērtība nav atkarīga no sijas šķēlumu inerces momentiem. Toties reducētie laidumi l'_{n-1} , l'_n un l'_{n+1} ir apgriezti proporcionāli inerces momentiem un, ja sijas visu laidumu inerces momenti proporcionāli izmainās (pieaug

vai samazinās), tad tāpat izmainās arī lieces momenti. Tātad varam apgalvot, ka balstu sēšanās gadījumā lieces momenti proporcionāli sijas stingrībai.

Gadījumā, ja visu sijas laidumu slīpums balstu sēšanās dēļ pret sākotnējo stāvokli ir vienāds, t.i. $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$, tad sijas ass līnija saglabājas taisna un lieces momenti sijā nerodas. Patvaļīgas balstu sēšanās kombinācijas gadījumā, lieces momentu epīra būs lauza līnija ar lūzuma punktiem virs sijas balstiem.

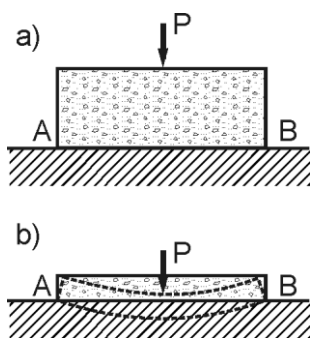
5.13. Uz nepārtraukta elastīga pamata balstītas sijas



att. 5.36

Iepriekš analizētajos gadījumos sijas bija balstītas uz galīga skaita balstiem. Praksē sastopami arī gadījumi, kad sija tiek balstīta pa visu garumu. Visbiežāk šādas sijas tiek balstītas uz grunts. Gadījumos, ja grunts iegrimē nav liela, tā tiek uzskatīta par elastīgu vidi. Uz elastīga pamata balstītu

siju piemēri ir uz grunts balstīti sijveida pamati, kuri uzņem kolonnu spiedi, dzelzceļu gulšņi, pamatplātne zem elevatora (att. 5.36), u.c.



att. 5.37

Siju uz elastīgiem pamatiem deformācijas un piepūles atkarīgas no to izmēriem un formas. Tā, gadījumā, ja vienāda garuma sijas ar atšķirīgiem šķērsriezuma laukumiem (att. 5.37) slogo to vidū ar vienādiem koncentrētiem spēkiem, to izlieces un spiediens uz pamatu ir atšķirīgi. Pirmajā gadījumā (a) pati sija deformējas nebūtiski un spiediens uz grunti praktiski ir vienmērīgs visā sijas garumā. Otrajā gadījumā (b), kad sijas stingums ir daudz mazāks, sija būtiski izliecas, pie kam lielākais spiediens uz grunti būs zem spēka pielikšanas punkta, bet sijas galos tas var būt pat vienāds ar

nulli (gadījumos, ja sijai ir liels laidums).

Slodzes rezultātā grunts deformējas un rodas iegrime. Pēc atslogošanas gruntī saglabājas paliekošās deformācijas. Ir konstatēts, ka grunts iegrime praktiski ir proporcionāla slodzei. Līdz ar to grunti nevar uzskatīt par pilnībā elastīgu vidi, bet tikai tādu, uz kuru nosacīti var attiecināt dažas elastīgas īpašības.

Sijas aprēķinos uz elastīga pamata tiek izmantotas sekojošas **hipotēzes**:

1. starp siju un grunti ir nepārtraukta saite;
2. starp siju un grunti nepastāv berze;
3. grunts reakcijas spēki ir proporcionāli grunts deformācijām atbilstošajos punktos (Fussa – Vinklera hipotēze).

Apzīmējot sijas izlieci ar y , pamata pretspiediens ir Cy , kur C ir konkrētai gruntij konstants lielums un tiek saukts par **padevīguma koeficientu**. Tā mērvienība ir MPa/m. Gadījumā, ja sijas izliece ir $y = 1$ m, grunts pretspiediens ir vienāds ar C . Tātad C nosaka to spiedienu uz laukuma vienību (m^2), kādu izraisa grunts deformējoties par vienu garuma vienību (m). Tabulā 5.4 dotas eksperimentālā ceļā noteiktas padevīguma koeficienta C vērtības dažādām gruntīm.

Tabula 5.4

Padevīguma koeficienta C vērtības dažām gruntīm

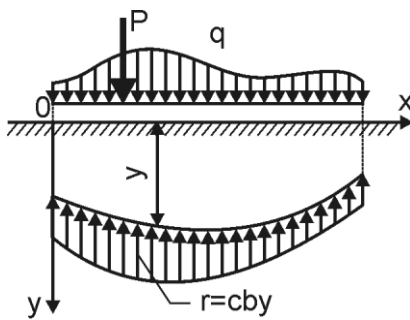
<i>Pamata veids</i>	<i>Pamata materiāls</i>	<i>C, MPa/m</i>
Maza blīvuma grunts	Plūstoša smiltis	1 – 5
	Svaigs smilšu uzbērums	
	Slapjš māls	
Vidēja blīvuma grunts	Nostāvējusies smiltis	5 – 50
	Šķembas	
	Mitrs māls	
Blīva grunts	Blīva nostāvējusies smiltis	50 – 100
	Maza mitruma māls	
Cieta grunts	Kaļķakmens	200 - 1000
	Smilšakmens	

Materiālu pretestības kursā tiek izmantotas diferenciālās sakarības starp pārvietojumiem, lieces momentiem un slodzi elastīgās sijās

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{EI}, \quad \frac{d^2 M}{dz^2} = -q, \quad (5.21)$$

kur: y – sijas izliece, M – lieces moments, q – ārējā izkliedētā slodze, EI – sijas lieces stingums.

Siju uz elastīga pamata gadījumā ārējai slodzei q tiek pieskaitīta izkliedēta pamatu reakcija, kura pozitīvu izlieču gadījumā darbojas pretēji ārējai slodzei (att. 5.38).



att. 5.38

Tādā gadījumā ir spēkā sakarība

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -(q - r) = -q + r.$$

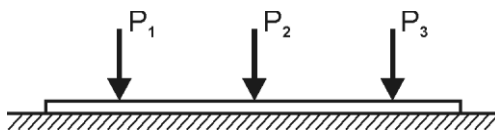
Tā kā $r = C \cdot b \cdot y$, kur b – sijas atbalsta laukuma platums, tad ir spēkā vienādojums

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q + C \cdot b \cdot y. \quad (5.22)$$

Nemainīga šķērsriezuma sijām saskaņā ar sakarībām (5.21), iegūstam:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI} \frac{d^2 M}{dx^2}, \text{ bet izmantojot sakarību (5.22), iegūstam vienādojumu}$$

$$-EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -q + C \cdot b \cdot y \quad \text{vai} \quad EI \frac{d^4 y}{dx^4} + C \cdot b \cdot y = q. \quad (5.23)$$



att. 5.39

Gadījumos, kad sija tiek slogota tikai ar koncentrētiem spēkiem P_i (att. 5.39), šo spēku starpposmos $q = 0$ un vienādojuma (5.23) vietā iegūstam

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + C \cdot b \cdot y = 0. \quad (5.24)$$

Šī vienādojuma atrisinājumi ir funkcijas, kuru ceturtais atvasinājums atšķiras no pašas

funkcijas tikai ar pretēju zīmi un reizinātāju $\frac{Cb}{EI}$. Tādas funkcijas ir

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= e^{\alpha x} \sin \alpha x; & \Phi_2 &= e^{\alpha x} \cos \alpha x; \\ \Phi_3 &= e^{-\alpha x} \sin \alpha x; & \Phi_4 &= e^{-\alpha x} \cos \alpha x,\end{aligned}\quad (5.25)$$

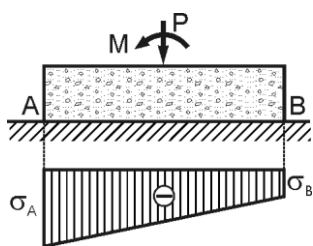
$$\text{kur} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{Cb}{4EI}},$$

kā arī šo funkciju lineārās kombinācijas

$$y = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4.$$

Funkcijas (5.25) ir pa labi vai pa kreisi rimstošas sinusoīdas vai cosinusoīdas. Attālums starp to nullpunktiem ir π/α . Katrs nākamais pusvilnis pēc formas ir līdzīgs iepriekšējam, tikai ar citu mērogu ordinātu ass virzienā. Parametram α apgriezto lielumu $S = 1/\alpha$ saucam par sijas **elastīgo raksturlielumu**. To mēra garuma mērvienībās. Tātad sijas elastīgās līnijas pusviļņa garums π/α ir πS , vai $\sim 3,14 \cdot S$.

Tātad sijas posmā, kura garums lielāks par πS , ietilpst vairāk kā viens izlieču epīras pusvilnis un ņemot vērā, ka katra nākamā pusviļņa amplitūda ir 23,14 reizes mazāka kā iepriekšējam, nākamo pusviļņu iespaidu to dilstošā rakstura dēļ praktiskos aprēķinos nepieciešamās precizitātes ietvaros var neievērot. Šādu sijas posmu uzskatām par bezgala garu. Tiešām, posms ar garumu πS un bezgala garš posms atšķiras tikai ar zemākas kārtas izlieču epīras pusviļņiem un to iespaids uz izliecēm un lieces momentiem apskatāmajā posmā ir visai niecīgs.



att. 5.40

Gadījumā, ja sijas garums ir ļoti mazs un nepārsniedz vērtību $0,1S$, tad funkcijas (5.25) ar visai lielu precizitāti var uzskatīt par lineārām, jo šajos gadījumos izpildās nosacījumi

$$e^{\alpha x} \approx 1 \approx e^{-\alpha x}, \quad \sin \alpha x \approx \alpha x, \quad \cos \alpha x \approx 1.$$

Tātad funkciju (5.25) vietā varam izmantot

$$\Phi_1 = \Phi_3 = x; \quad \Phi_2 = \Phi_4 = 1$$

un siju var uzskatīt par bezgala stingu uz elastīgi padevīga pamata. Šādas sijas spiedienu uz grunti varam uzskatīt par ekscentrisku spiedi, kuru nosaka sakarība

$$r = \frac{N}{F} + \frac{M}{I} x, \quad (5.26)$$

kur N ir ārējai slodzei atbilstošais kopspēks;
 M - moments sijas vidū (att. 5.40);
 F - sijas atbalsta laukums uz padevīgā pamata;
 I - atbalsta laukuma inerces moments attiecībā pret asi, kura novilkta sijas laiduma vidū;
 x - attālums no sijas vidus tās ass virzienā.

Veicot pietiekami garas sijas uz elastīga pamata, kura vidū slogota ar koncentrētu spēku, aprēķinu, izvēlamies koordinātu sākumpunktu spēka pielikšanas punktā. Tā kā siju var uzskatīt par bezgala garu, tad tās izlieces pa labi no spēka pielikšanas punkta nosaka izteiksme

$$y = C_3 \Phi_3 + C_4 \Phi_4, \quad \text{bet pa kreisi} \quad y = C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2.$$

Funkcijas (5.25) pakāpeniski norimst, pie kam Φ_1 un Φ_2 kreisajā virzienā, bet Φ_3 un Φ_4 labajā virzienā. Funkcijas Φ_1 un Φ_2 bezgalīgi aug virzienā pa labi un tādēļ šai posmā tās tiek atmetas. Analogi ir ar funkcijām Φ_3 un Φ_4 , kuras bezgalīgi aug virzienā pa kreisi. Punktā $x = 0$ uz simetrijas pamata šķēluma pagrieziena leņķis ir nulle (t.i. $dy/dx = 0$). Šķērsspēku epīrā šajā punktā jābūt lēcienam par lielumu P . Šādi nosacījumi izpildās gadījumā, ja

$$-C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{P}{8EI\alpha^3}$$

(izvedums tiek izlaists).

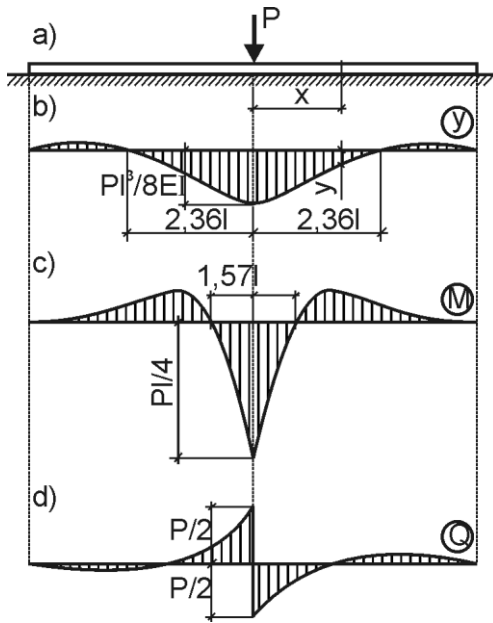
Sijas daļai **pa labi** no tās viduspunkta iegūstam izlieču izteiksmi

$$y = \frac{P}{8EI\alpha^3} (\Phi_3 + \Phi_4) = \frac{P}{8EI\alpha^3} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x),$$

bet **pa kreisi**

$$y = \frac{P}{8EI\alpha^3} (-\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{P}{8EI\alpha^3} e^{\alpha x} (-\sin \alpha x + \cos \alpha x).$$

Sijas elastīgā līnija šim gadījumam parādīta att. 5.41b.



att. 5.41

Atbilstošo momenta epīru varam iegūt izmantojot sakarību

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (5.27)$$

Tātad sijas daļai pa labi ir spēkā sakarība

$$M = \frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x),$$

bet pa kreisi

$$M = \frac{P}{4\alpha} e^{\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Momentu epīra redzama att. 5.41c.

Sijas šķērsspēku (att. 5.41d) attiecīgi nosaka sakarības

$$Q = \frac{dM}{dx} = -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x,$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{P}{2} e^{\alpha x} \cos \alpha x.$$

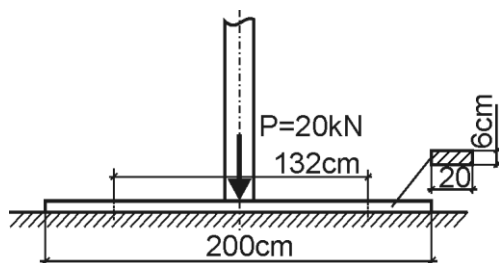
Maksimālās izlieces, lieces momenta un šķērsspēka vērtības ir sijas vidū ($x = 0$):

$$y_{\max} = \frac{P}{8EI\alpha^3} = \frac{PS^3}{8EI}; \quad M_{\max} = \frac{P}{4\alpha} = \frac{PS}{4}; \quad Q_{\max} = \frac{P}{2}. \quad (5.28)$$

Piemērs 5.9. Jānosaka paliktņa stiprība zem stata, kurš slogots ar koncentrētu spēku $P = 20$ kN. Paliktņis ir 2 m garš dēlis ar šķērsgriezuma izmēriem 6 x 20 cm (att. 5.42). Padevīguma koeficients $C = 5$ MPa/m (mitrs māls). Dēļa elastības modulis $E = 10$ GPa.

Atrisinājums. Nosakām parametrus:

$$I = \frac{6^3 \cdot 20}{12} = 360 \text{ cm}^4 = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4; \quad \alpha = \sqrt{\frac{5 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 3,6 \cdot 10^{-6}}} = 3,59 \frac{1}{\text{m}};$$



att. 5.42

$$S = \frac{1}{\alpha} = 0,279m.$$

Paliktņa laiduma puse (1 m) vairāk kā trīs reizes pārsniedz sijas elastīgo konstanti S . Tātad abas paliktņa puses var uzskatīt par bezgala garām. No sakarībām (5.28) nosakām, ka

$$y_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot (0,279)^3}{8 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 3,6 \cdot 10^{-6}} = 0,15 \cdot 10^{-2} m = 0,15 cm;$$

$$M_{\max} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,279}{4} = 1,395 kN \cdot m.$$

Maksimālais spriegums paliktņī ir

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{1,395 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 11,2 MPa.$$

Šāds spriegums ir pieļaujams koka sijai.

No izlieču izteiksmes

$$y = \frac{PS^3}{8EI} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)$$

izriet, ka gadījumā, ja $-\sin \alpha x = \cos \alpha x$, kas atbilst nosacījumam $\tan \alpha x = -1$, izliece ir nulle. Šis nosacījums atbilst argumenta vērtībai $\alpha x = 3\pi/4$. Tas nozīmē, ka sākot ar attālumu $x = \frac{3\pi}{4} \cdot S = 2,36 \cdot S$ no paliktņa vidus pārvietojumi maina zīmi, kļūst ne-

gatīvi. Varam izdarīt slēdzienu, ka paliktņa daļas aiz attāluma $2,36S$ no spēka pielikšanas punkta, faktiski nestrādā un tātad varam rekomendēt paliktņi saīsināt līdz garumam

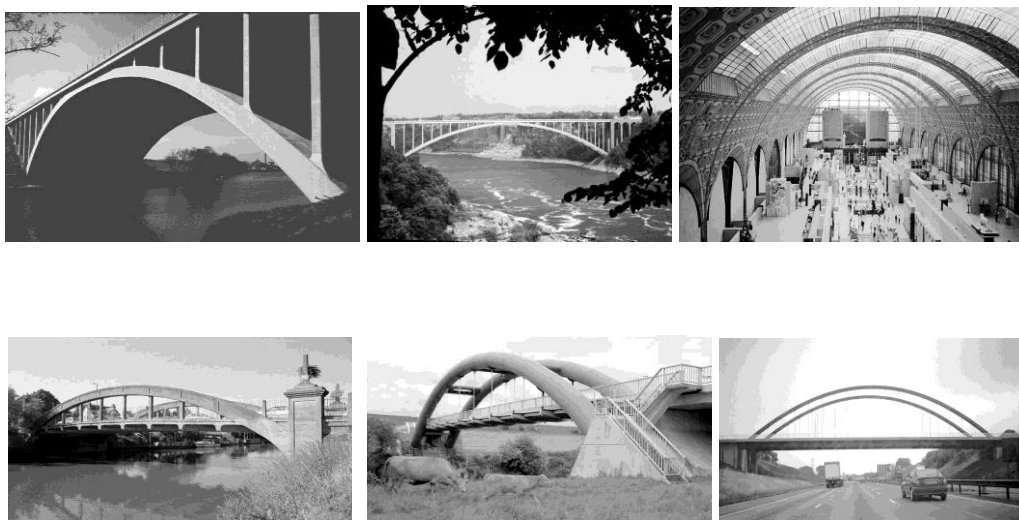
$$2 \cdot 2,36 \cdot S = 2 \cdot 2,36 \cdot 0,279 = 1,32 m.$$

Tā rezultātā nepasliktināsies paliktņa darbība un tiks ietaupīts materiāls.

6. STATISKI NENOTEICAMU LOKU APRĒĶINS

Statiski nenoteicamu loki var būt: divlocīklu ar locīklām balstos, bezlocīklu ar iespīlētiem balstiem un retos gadījumos vienlocīklu.

Att. 6.1 redzami simetrisku lokveida konstrukciju piemēri.



att. 6.1

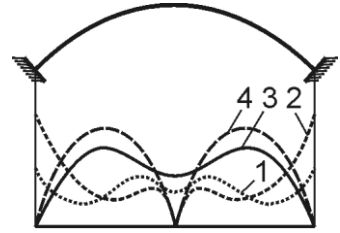
Loki var būt arī nesimetriski, piem., att. 6.2 parādīta lokveida kopne. Liektā stieņa izliekums un tā šķērsgrīzums nosaka loka formu, kura tiek noteikta uz dažādu apsvērumu pamata.

Galvenā prasība ir, lai loka forma būtu racionāla. Teorētiski par racionālu uzskata to formu, kura pie dotās slodzes, laiduma un loka augstuma, nodrošina nepieciešamo loka stiprību un noturību pie minimāla tilpuma. Materiāla izvietojums loka ass garumā atkarīgs no piepūļu sadalījuma pa loku.



att. 6.2

Par lieces momentu maksimālo vērtību sadalījumu pa dažāda tipa loku garumu no kustīgās slodzes var spriest no att. 6.3. Līkne 1 attiecas uz bezlocīklu lokiem, līkne 2 – uz vienlocīklu lokiem, līkne 3 – uz divlocīklu lokiem, bet līkne 4 – uz trīslocīklu lokiem.



att. 6.3

Loku šķērsgrīzumu laukumus un statiskos momentus cenšas izvēlēties tā, lai aprēķinu rezultātus varētu iegūt pēc iespējas vienkāršākā formā. Praksē simetrisku loku gadījumā tiek lietotas sakarības:

1. bezlocīklu lokiem

$$I = \frac{I_0}{\cos \alpha \left(1 - (1-n) \frac{2x}{l} \right)}; \quad I = \frac{I_0}{\cos \alpha \left(1 - (1-n) \frac{y}{f} \right)};$$

2. divlocīklu lokiem

$$I = \frac{I_0}{\cos \alpha \left(1 - (1-n) \frac{2x}{l} \right)}, \quad I = \frac{I_0}{\cos \alpha \left(1 + (1+n) \frac{y}{f} \right)};$$

$$I = \frac{I_0}{\cos \alpha \left(1 + (1+n) \left(\frac{2x}{l} \right)^5 \right)},$$

kur $n = I_0 / I_p \cos \alpha$, I_0 – inerces moments augstākajā punktā; I_p – inerces moments pēdā (balstā).

Pieņemot dažādas parametra n vērtības var izmainīt šķērsgrīzuma izmēru maiņas likumu pa loka garumu. Gadījumos, kad tiek pieņemts $n = 1$, loka inerces momenta izmaiņu nosaka formula

$$I_x = \frac{I_0}{\cos \varphi_x}.$$

Ja loka šķērsgrīzumam ir taisnstūra forma ar konstantu platumu b , tad šķērsgrīzuma

augstums d mainās pēc sakarības

$$d_x = \frac{d_0}{\sqrt[3]{\cos \varphi}} \left(\frac{bd_z^3}{12} = \frac{bd_0^3 \cos \varphi}{12} \right).$$

Analogā sakarība ir spēkā arī loka šķērsriezuma laukuma izmaiņai pa garumu

$$F_x = \frac{F_0}{\sqrt[3]{\cos \varphi_x}}.$$

Bieži vien praktiskos aprēķinos šo sakarību nomaina ar vienkāršāku

$$F_x = \frac{F_0}{\cos \varphi_x}.$$

Aprēķinu rezultātu salīdzinājums ļauj secināt, ka loka šķērsriezuma laukuma izmaiņas likuma vienkāršojums izmaina loka balstbēdi un lieces momentu ne vairāk kā par 1 %.

Aprēķinot lēzenus lokus ($f < 1/8$) visos to šķēlumos $\cos \varphi_x$ maz atšķiras no vieninieka.

Tādēļ praktiski var tikt lietota sakarība $F_p = F_0 = \text{const}$. Šajos gadījumos loka bezgala mazu nogriezni d_0 pielīdzina tā projekcijai uz x ass.

Loka forma var tikt mainīta un arī šauri arhitektonisku apsvērumu dēļ. Sevišķi tas attiecas uz tiltu konstrukcijām pilsētās vai citās reprezentablās teritorijās.

Būvniecībā lietojamus lokus lielā mērā var uzskatīt par stieņiem ar mazu liekumu (liekumu rādiuss daudzkārt lielāks par loka augstumu). Līdz ar to visai pamatots ir pieņēmums loku pārvietojumu aprēķinos neņemt vērā liekumus, bet izmantot nosacījumu par stieņiem ar mazu liekumu (pārvietojumu formulā neņem vērā saskaitāmos ar jauktu piepūļu reizinājumiem).

Piepūļu N un Q iespaids uz pārvietojumiem lokos salīdzinot ar lieces momentu iespaidu, būtiski lielāks kā rāmjos. Šis iespaids atkarīgs no slodzes un var tikt novērtēts tikai aprēķinu ceļā. Nemainīgu pārējo nosacījumu gadījumā, bezlocīklu lokos N un Q iespaids lielāks kā divlocīklu lokos. Ja lieces momenti M lokā ir lieli, tad piepūļu N un Q iespaids salīdzinot ar M iespaidu ir mazāks un otrādi. Šiem vispārīgiem spriedumiem ir kvalitatīvs raksturs. Veicot loku projektēšanu, kuri parasti ir svarīgu konstrukciju neso-

šie pamatelementi, nepieciešams veikt rūpīgu loka pārvietojumu aprēķina analīzi un pamatojumu. Loku aprēķinu principiālo jautājumu risinājumā var tikt izmantotas arī vienkāršotas pārvietojumu aprēķinu formulas. Turpmākajos izklāstos aprobežosimies tikai ar simetriskiem lokiem, jo tiem ir vislielākā praktiskā pielietojamība.

6.1. Statiski slogotu divlocīklu loku aprēķins

Parasti statiski nenoteicamu loku aprēķinu veic ar spēku metodi. Pirmā kārtā jāizvēlas racionālākā pamatsistēma. Divlocīklu lokiem tādas var būt, piem., liektas ass sija (att. 6.4b), vai trīslocīklu loks (att. 6.4c). Pirmajā gadījumā par nezināmo tiek izvēlēta nekustīgā locīklas balsta reakcijas horizontālā komponente, tātad balstbīde, bet otrajā gadījumā – lieces momenta vērtība kādā no loka šķēlumiem C.



att. 6.4

Turpmāk izmantosim pirmā veida pamatsistēmu. Šai gadījumā kanoniskā vienādojuma

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (6.1)$$

koeficienti ir δ_{11} – balsta B horizontālais pārvietojums spēka $\bar{X}_1 = 1$ iedarbības rezultātā, Δ_{1P} – lokam pieliktās ārējās slodzes izraisītais balsta B horizontālais pārvietojums pamatsistēmā.

No kanoniskā vienādojuma (6.1) nosakām balstbīdi divlocīklu lokā:

$$H = X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

Pārvietojumu δ_{11} un Δ_{1P} noteikšanai izmantojam Mora formulu, kurā saglabāti lieces momentus un ass spēkus saturošie saskaitāmie

$$\delta_{11} = \int_S \bar{M}_1^2 ds / EI + \int_S \bar{N}_1^2 ds / EF ; \quad (6.2)$$

$$\Delta_{1p} = \int_S \bar{M}_1 M_p ds / EI + \int_S \bar{N}_1 N_p ds / EF .$$

Vertikālās slodzes gadījumā ass spēks patvaļīgā loka pamatsistēmas šķēlumā nosakāms ar sakarību

$$N_p = Q_0 \sin \varphi ,$$

kur Q_0 šķērsspēks loka laidumam atbilstošā divbalstu sijā.

Lēzenu loku gadījumā $\sin \varphi$ ir mazs lielums un tādēļ pārvietojumu Δ_{1p} noteikšanai ar praksei pietiekamu precizitāti varam lietot sakarību

$$\Delta_{1p} = \int_S \bar{M}_1 M_p ds / EI .$$

Vienības slodzes $\bar{X}_1 = 1$ izraisītos lieces momentus un ass spēkus nosaka sakarības:

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot y, \quad \bar{N}_1 = 1 \cdot \cos \varphi .$$

Tātad ņemot vērā, ka

$$\delta_{11} = \int_0^S y^2 ds / EI + \int_0^S \cos^2 \varphi ds / EF ; \quad \Delta_{1p} = - \int_0^S y M_p ds / EI ,$$

divlocīklu loka balstbīdi nosaka sakarība

$$H = X_1 = \frac{\int_0^S y M_p ds}{\int_0^S y^2 ds + \frac{I}{F} \int_0^S \cos^2 \varphi ds} \quad (6.3)$$

Parametrs s ir loka ass garums.

Lokiem ar lielu laidumu un masīvu šķērsgrīzumu deformāciju daļu no asspēkiem var neņemt vērā. Tas vienkāršo izteiksmes (6.3) saucēju.

Ņemot vērā, ka $ds = dx / \cos \varphi$, balstbīdi nosaka sakarība

$$H = \int_0^l y M_p dx / \int_0^l y^2 dx \quad (6.4)$$

Zinot balstbīdi, piepūles lokā nosakāmas ar vienkāršām sakarībām:

$$M = M_p - Hy; \quad Q = Q_p \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

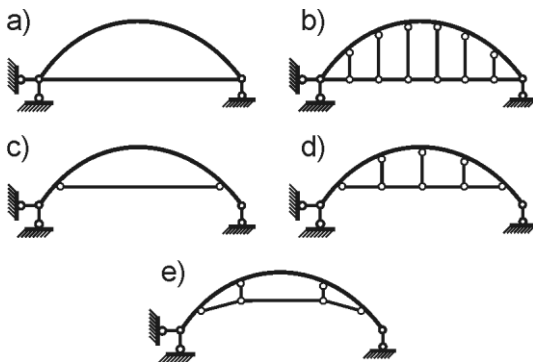
$$N = -(Q_p \sin \varphi + H \cos \varphi).$$

6.2. Divbalstu loks ar savilci

Rūpniecības ēku un citu augstsienu darinājumu pārsegumos divbalstu loki ir bīstami balstbīdes dēļ. To novērš izveidojot savilci, kura uzņem balstbīdi. Arī citās lokveida konstrukcijās bieži tiek izmantotas savilces (att. 6.5). Savilce var būt izvietota balstu līmenī vai arī augstāk.



att. 6.5



att. 6.6

Dažādu divlocīklu loku ar savilci aprēķinu shēmas parādītas att. 6.6. Lokiem ar savilci vertikālas slodzes gadījumā ir tikai vertikālas balstu reakcijas un tātad šādus lokus jāuzskata par bezbalstbīdes konstrukcijām.

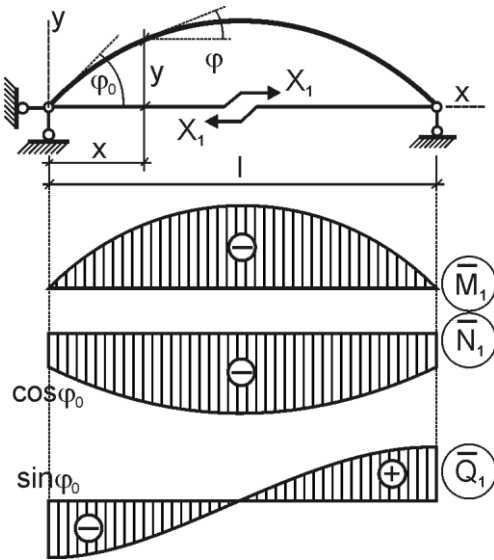
Tāds darinājuma veidojums ļauj vienlaikus samazināt lieces momentus, kas ir lokveida sistēmu īpatnība un veidot atvieglotus un ekonomiskus balstus, kas raksturīgs sijveida sistēmām. Savilci var veidot no tā paša materiāla kā loks vai arī no atšķirīga materiāla. Dzelzsbetona un koka lokiem var būt metāla savilce.

Veicot aprēķinus divlocīklu lokam ar savilci balstu līmenī, par pamatsistēmu izvēlamies loku ar pārgrieztu savilci (att. 6.7). Ass spēka $\bar{X}_1$ darbības rezultātā lokā rodas lieces momenti $\bar{M}_1$, ass spēki $\bar{N}_1$ un

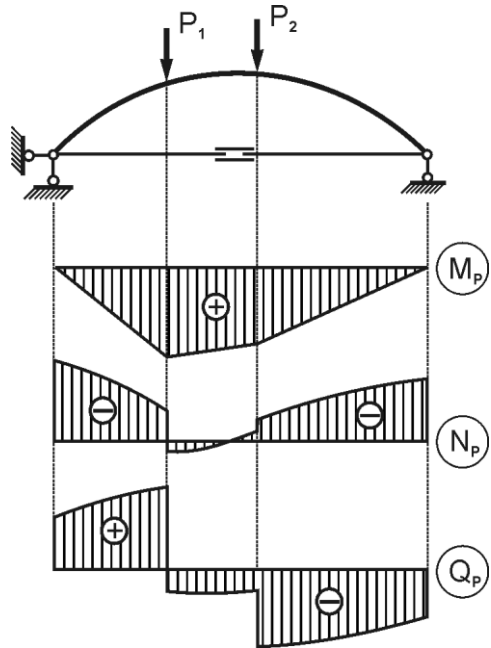
šķērsspēki $\bar{Q}_1$, kurus nosaka sakarības

$$\bar{M}_1 = -y; \quad \bar{N}_1 = -\cos \varphi; \quad \bar{Q}_1 = -\sin \varphi,$$

bet savilcē rodas tikai ass spēks $\bar{N}_s=1$.



att. 6.7

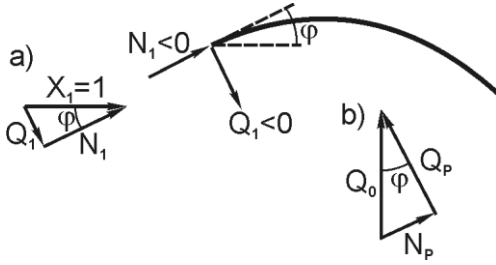


att. 6.8

Lieces momenti cenšas loka liekumu palielināt (izliekums virspusē), asspēki saspiež loku veidojošo stieni, bet šķērsspēki loka kreisajā vai labajā pusē ir pretēji vērsti. Ārējās slodzes iedarbībā lokā rodas lieces momenti, kuri vienādi ar lieces momentiem sijā ar taisnu asi M_0 . Tiem atbilstošie šķērsspēki Q_0 nosakāmi izmantojot diferenciālo sakarību starp lieces momentiem un šķērsspēkiem (Žuravska formula). Ņemot vērā, ka šī šķērsspēka vērtība katrā loka šķēlumā sadalāma divās komponentēs – normāles un pieskares virzienos, iegūstam sakarību piepūļu noteikšanai divlocīklu loka pamatsistēmā no ārējās slodzes (att. 6.8):

$$M_p = M_0; \quad N_p = -Q_0 \sin \varphi; \quad Q_p = Q_0 \cos \varphi.$$

Spēka $\bar{X}_1 = 1$ un Q_0 sadalījums komponentēs loka asspēka N un šķērsspēka Q virzienos redzams att. 6.9.



att. 6.9

Atrisinot kanonisko vienādojumu (6.1), attiecībā pret lieko nezināmo X_1 , kas ir piepūle savilcē, iegūstam

$$X_1 = H = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, \quad (6.5)$$

kur

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= -\sum \int y M_0 ds / EI + \sum \int Q_0 \sin 2\varphi \cdot ds / 2FE - \sum \int Q_0 \sin 2\varphi \cdot ds / 2GF ; \\ \delta_{11} &= \int y^2 ds / EI + \int \cos^2 \varphi \cdot ds / EF + \mu \int \sin^2 \varphi \cdot ds / GF + l_s / E_s F_s . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Šajās sakarībās pieņemts, ka savilces šķērsgriezums ir nemainīgs visā garumā, pie kam tās šķērsgriezuma laukums apzīmēts ar F_s , bet elastības modulis ar E_s . Veicot integrēšanu parasti izmanto sakarību $ds = dx / \cos \varphi$.

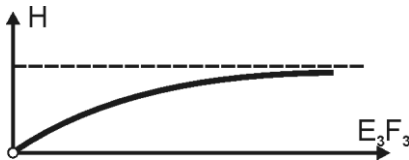
Pēc sakarībām (6.2) noteiktās pārvietojumu vērtības ir precīzas, bet jau iepriekš lokiem bez savilces tika iegūti šo izteiksmju vienkāršojumi, atmetot šķērsspēku un dažreiz arī asspēku iespaidu. Tā iegūstamos rezultātus var uzskatīt par tuvinātiem un to pielietojamības robežas un pamatotību novērtē projektētājs.

Būtisku iespaidu uz piepūli savilcē H un līdz ar to arī uz visām piepūlēm lokā atstāj savilces padevīgums, ko raksturo izteiksme $1/E_s F_s$.

Izteiksmi (6.5) var pārrakstīt formā

$$H = \frac{A}{B + \frac{EI}{E_s F_s}},$$

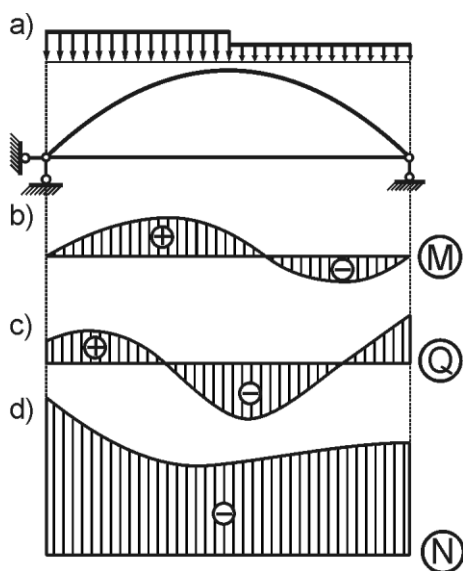
kur A un B nav atkarīgi no savilces stingrības.



att. 6.10

Gadījumā, ja samazinās lielums $E_s F_s$, ko visvienkāršāk panākt, samazinot savilces šķērsgriezuma laukumu, tad izteiksmes $EI/E_s F_s$ vērtība pieaug, bet piepūle H samazinās. Jo tievāka, jo padevī-

gāka savilce, jo mazāka piepūle, ko tā uzņem.



att. 6.11

att. 6.10.

Pēc tam, kad ir noteikta piepūle savilcē H , var tikt noteiktas piepūles jebkurā loka šķēlumā:

$$M = M_0 - Hy;$$

$$N = -(Q_0 \sin \varphi + H \cos \varphi); \quad (6.7)$$

$$Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

Att. 6.11 parādīts M , Q un N epīru raksturs ar izklaidētu slodzi slogotā divlocīklu lokā.

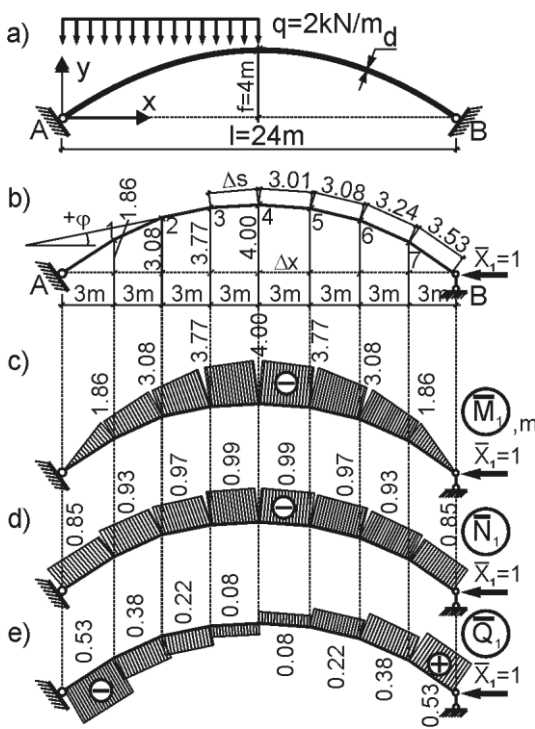
Piemērs 6.1. Veikt metāla divlocīklu loka (att. 6.12 a) ar nemainīgu tainstūra šķērs-griezumu ar augstumu $d = 0,3$ m aprēķinu. Loka ass forma atbilst riņķa līnijai.

Atrisinājums.

1. Sadalām loka laidumu astoņos vienādos nogriežņos $\Delta x = 3$ m. Liekto loka asi aizvieto-jam ar lauztu līniju, nosakot mezglu punktu ordinātas atbilstoši riņķa līnijas vienādojumam

Robežgadījumā, kad savilce ir ļoti tieva, loks tikai formāli skaitās statiski nenoteicams, faktiski tas ir kļuvis par divbalstu siju ar liektu asi. Pretējā gadījumā, kad savilces šķērsriezuma laukumu palielinām, piepūle savilcē arī palielinās (bet ne proporcionāli). Vērtībai $E_s F_s$ tiecoties uz bezgalību (bezglā stingra savilce), piepūle H tiecas uz asimpto-tisku vērtību A / B . Bezgalīgi stingras savil-ces gadījumā tā nedeformējas un tātad loka balsti paliek nekustīgi. Līdz ar to loks ar sa-vilci kļūst par parastu divbalstu loku.

Piepūles izmaiņas raksturs savilcē parādīts



att. 6.12

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - z\right)^2} - R - l,$$

kur

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}.$$

Izvēlamies pamatsistēmu atmetot labā balsta horizontālo saitī (att. 6.12b). Lauzītā stieņa ģeometriskie raksturotāji sakopoti tabulā 6.1.

2. Konstruējam vienības piepūļu epīras lauztās formas stieņiem no slodzes $\bar{X}_1$. Vienības epīru ordinātas nosakām atbilstoši sakarībām

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= -y; & \bar{N}_1 &= -\cos \varphi; \\ \bar{Q}_1 &= -\sin \varphi.\end{aligned}$$

Atbilstoši tabulā 6.2 dotajām vērtībām konstruētās vienības epīras parādītas att. 6.12 c,d,e.

3. Konstruējam slodzes epīras M_p , Q_p , N_p pamatsistēmā atbilstoši tabulā 6.2 sakopotajām vērtībām (att. 6.13).

4. Lai noteiktu pārvietojumus δ_{11} un Δ_{1p} , uzskatīsim, ka dotais loks ir visai lēzens ($f = l/6$) un tādēļ jāizmanto sakarības

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EF} + \mu \int_0^s \frac{\bar{Q}_1^2 ds}{GF}; \\ \Delta_{p1} &= \int_0^s \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EI} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1 N_p ds}{EF} + \mu \int_0^s \frac{\bar{Q}_1 Q_p ds}{GF}.\end{aligned}$$

Ja nosakot pārvietojumus tiek ievērtēti ass un šķērsspēki, lietderīgi spiedes un bīdes stingrības EF un GF izteikt caur lieces stingrību EI . Šai nolūkā izmantojam Puasona

koeficientu (metālam $\nu = 0,25$) un bīdes spriegumu sadalījuma nevienmērības koeficientu (taisnstūra šķērsgriezumam $\mu = 1,2$).

Tabula 6.1

Lauzta stieņa ģeometriskie raksturotāji

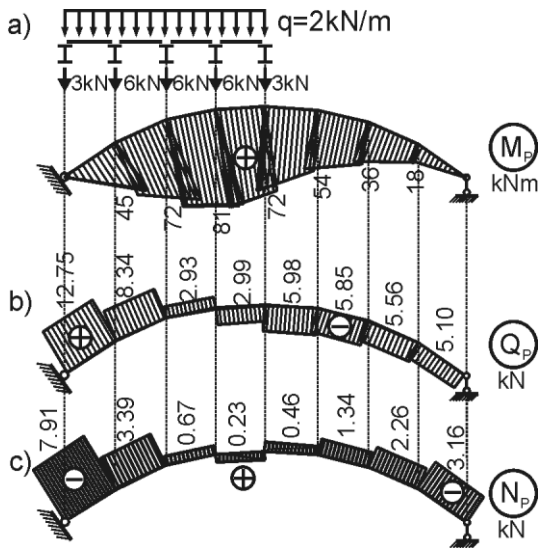
Šķēlums	x	$l/2 - x$	$(l/2 - x)^2 = C$	$\sqrt{R^2 - C}$	y	$tg \varphi = (y_n - y_{n-1})/\Delta x$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
A	0	12	144	16	0			
1	3	9	81	17,86	1,86	0,620	0,527	0,850
2	6	6	36	19,08	3,08	0,407	0,377	0,927
3	9	3	9	19,77	3,77	0,230	0,223	0,975
4	12	0	0	20	4,00	0,077	0,077	0,997
5	15	-3	9	19,77	3,77	-0,077	-0,077	0,997
6	18	-6	36	19,08	3,08	-0,230	-0,223	0,975
7	21	-9	81	17,86	1,86	-0,407	-0,377	0,927
B	24	-12	144	16	0	-0,620	-0,527	0,850

Tabula 6.2

Vienības un slodzes epīru ordinātas

Šķēlums	$\Delta s = \frac{\Delta z}{\cos \varphi}$	$\bar{M}_1$	$\bar{N}_1$	$\bar{Q}_1$	$M_p = M_n$	$Q_p = \frac{M_n - M_{n-1}}{\Delta s}$	$N_p = -Q^0 \sin \varphi$
A		0			0		
1	3,529	-1,86	-0,85	-0,53	45	12,75	-7,91
2	3,236	-3,08	-0,93	-0,38	72	8,34	-3,39
3	3,077	-3,77	-0,97	-0,22	81	2,93	-0,67
4	3,009	4,00	-1,00	-0,08	72	-2,99	0,23
5	3,009	-3,77	-1,00	0,08	54	-5,98	-0,46
6	3,077	-3,08	-0,97	0,22	36	-5,85	-1,34
7	3,236	-1,86	-0,93	0,38	18	-5,56	-2,26
B	3,529	0	-0,85	0,53	0	-5,10	-3,16

Iegūstam



att. 6.13

$$EF = 133EI;$$

$$GF / \mu = 44EI;$$

$$\left[G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \right].$$

Aizvietojot integrēšanu ar summēšanu pa atsevišķiem lauktās līnijas posmiem, nosakām pārvietojumus

$$EI\delta_{11} = 211,872 + 0,169 +$$

$$+ 0,073 = 212,114m^3$$

$$EI\Delta_{1P} = 3755,24 - 0,87 =$$

$$= -3756,11knm^3$$

5. Nosakām balstbīdi

$$H = -\Delta_{1P} / \delta_{11} = 37,11 / 212,114 = 17,71kN$$

Risināmajā piemērā, bez ass un šķērsspēku iespaida ievērošanas, iegūstam

$$H = 3755,24 / 211,872 = 17,72kN$$

Atšķirība balstbīdes noteikšanā sastāda tikai 0,06%. Tātad dotajā gadījumā ass un šķērsspēku iespaidu var neievērot.

Tabula 6.3.
Momentu epīras izskaitļojums

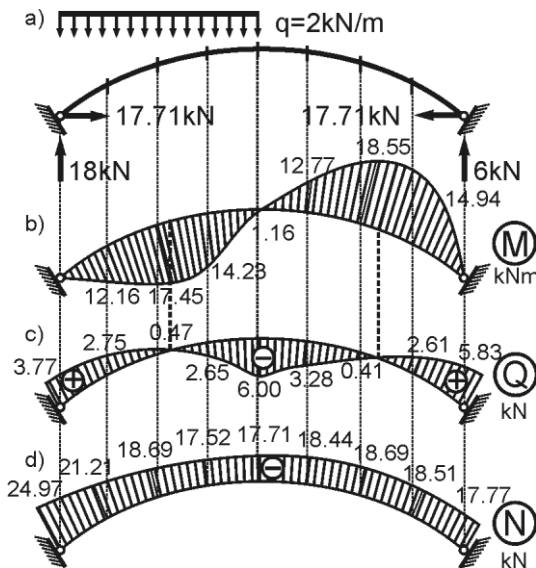
Šķēlums	M_p	H_y	M	x	$l-2x$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$
A	0	0	0	0	23	0,60	0,800
1	45	32,94	12,06	3	18	0,45	0,893
2	72	54,55	17,45	6	12	0,30	0,954
3	81	66,77	14,23	9	6	0,15	0,989
4	72	70,84	1,16	12	0	0	1
5	54	66,77	-12,77	15	-6	-0,15	0,989
6	36	54,55	-18,55	18	-12	-0,30	0,954
7	18	32,94	-14,94	21	-18	-0,45	0,893
B	0	0	0	24	-24	-0,60	0,800

Tabula 6.4.

Šķērsspēku un asspēku izskaitļojums

Šķēlums	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N
A	18	14,400	10,626	3,77	10,8	14,168	-24,97
1	12	10,716	7,969	2,75	5,4	15,815	-21,21
2	6	5,724	5,313	0,41	1,8	16,895	-18,69
3	0	0	2,656	-2,65	0,0	17,515	-17,52
4	-6	-6,00	0	-6,0	0,0	17,710	-17,71
5	-6	-5,934	-2,656	-3,28	0,9	17,515	-18,41
6	-6	-5,724	-5,313	-0,41	1,8	16,895	-18,69
7	-6	-5,358	-7,969	2,61	2,7	15,815	-18,51
B	-6	-4,80	-10,626	5,83	3,6	14,168	-17,77

6. Loka iekšējo piepūļu epīras iegūstam izmantojot iegūtās vērtības loka (lauzītā stieņa) šķēlumos, t.i. daudzstūra virsotnēs (att. 6.14) atbilstoši sakarībām



att. 6.14

$$M = M_p - Hy;$$

$$Q = Q_0 \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$N = -(Q_0 \sin \varphi + H \cos \varphi),$$

kur Q_0 šķērsspēks divbalstu sijā; φ - leņķis starp pieskari konkrētā šķēlumā un horizontāli. Riņķa līnijas gadījumā

$$\sin \varphi = \frac{l - z}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}.$$

Aprēķini sakopoti tabulās 6.3. un 6.4., bet epīras attēlotas att. 6.14.

6.3. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles lokos

Kanoniskais vienādojums temperatūras slogojuma gadījumā ir līdzīgs ārējās slodzes gadījumam

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

Atšķirība ir brīvajā locekļī, tas ir pārvietojumā, ko pamatsistēmā liekā nezināmā virzienā izraisa temperatūras izmaiņa.

Pārvietojumu Δ_{1t} nosaka sakarība

$$\Delta_{1t} = \int \bar{N}_1 \alpha t ds + \int \frac{\bar{M}_1 \alpha t'}{d} ds,$$

kurā loka elementiem $\bar{N}_1 = -\cos \varphi$, $\bar{M}_1 = -y$, bet savilcei $\bar{N}_1 = 1$, $\bar{M}_1 = 0$ un t ir temperatūras izmaiņa uz loka šķērsriezuma neitrālās ass, bet t' temperatūru izmaiņas starpība uz loka ārējās un iekšējās šķiedras.

Pieņemot, ka temperatūras izmaiņa visa loka garumā ir nemainīga, iegūstam:

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot t \int_A^B \cos \varphi ds + \alpha_s \cdot t \cdot l - \alpha t' \int y ds / d \quad (6.8)$$

Pirmais integrālis raksturo loka temperatūras vienmērīgās izmaiņas iespaidu. Mīnus zīme liecina par to, ka sasilšanas gadījumā sprauga savilcē (pamatsistēmai) veidojas pretējā virzienā spēka X_1 pozitīvajam virzienam. Tā kā $\cos \varphi ds = dx$, tad iegūstam

$$-\alpha t \int_0^l dx = -\alpha \cdot t \cdot l$$

Izteiksmes (6.8) otrais saskaitāmais raksturo savilces termisko deformēšanos atbilstoši savilces lineārās termiskās izplešanās koeficientam α_s . Divlocīklu lokiem bez savilces izteiksme (6.8) ir spēkā pie nosacījuma $\alpha_s = 0$. Trešajā saskaitāmajā malējo šķiedru temperatūru starpību t' uzskatām par pozitīvu, ja tā izliec loka asi ar izliekumu uz to pašu pusi kā pozitīvais spēks X_1 , tātad uz augšu. Loku specifikas dēļ tie parasti tiek aprēķināti tikai uz vienmērīgu temperatūras izmaiņu, t.i., tiek pieņemts $t'=0$. Tādā ga-

dījumā lokā ar savilci

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot t \cdot l + \alpha_s \cdot t \cdot l = (\alpha_s - \alpha) \cdot t \cdot l,$$

$$H = (\alpha - \alpha_s) \cdot t \cdot l / \delta_{11},$$

bet lokos bez savilces

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot t \cdot l; \quad H = \alpha \cdot t \cdot l / \delta_{11}.$$

Gadījumos, kad $t > 0$, loku balstbīde vērsta uz laiduma vidu, bet lokos ar savilci balstbīdes virziens atkarīgs no attiecības starp α un α_s . Gadījumos, kad $\alpha > \alpha_s$, savilce tiek stiepta; gadījumos, ja $\alpha = \alpha_s$, savilcē nav piepūļu, bet gadījumā $\alpha < \alpha_s$ savilce tiek spiesta. Gadījumos, ja $t < 0$, piepūļu zīmes salīdzinot ar iepriekš teikto mainās uz pretējo. Svarīgi ņemt vērā, ka spiede savilcē nav vēlama, jo tā lokanības dēļ var zaudēt noturību.

Summārā piepūle savilcē veidojas no diviem faktoriem – temperatūras izmaiņas un slodzes, pie kam vertikālā slodze (tāda ir arī pašsvars) izraisa savilcē stiepi. Tātad savilcē spiede iespējama tikai tajā gadījumā, kad temperatūras izmaiņas izraisītā spiede savilcē ir lielāka par slodzes izraisīto stiepi.

Temperatūras izmaiņa t lokā izraisa sekojošas piepūles

$$M = H \cdot \overline{M}_1 = -Hy; \quad N = H \cdot \overline{N}_1 = -H \cos \varphi;$$

$$Q = H \cdot \overline{Q}_1 = -H \sin \varphi.$$

6.4. Piepūles divlocīklu lokos no balstu pārvietojuma

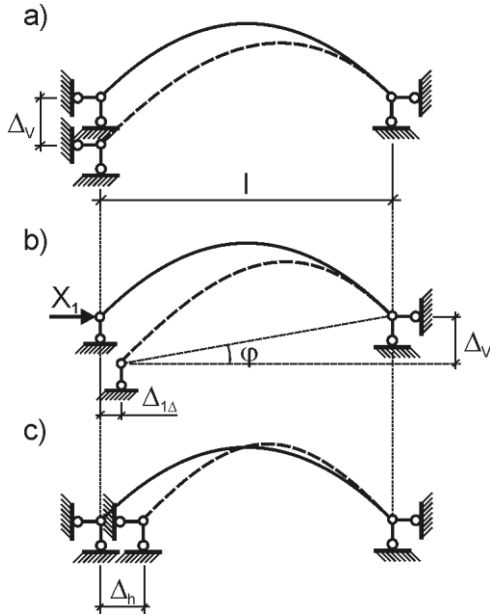
Balstu pārvietojumu iespaida analīzi uz piepūlēm divlocīklu lokā var sadalīt divās daļās – piepūles, kuras izraisa balsta sēšanās vertikālā virzienā (att. 6.15a) un balsta pārvietojums horizontālā virzienā (att. 6.15c) uz loka centru. Kanoniskais vienādojums

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1b} = 0,$$

kur pārvietojums Δ_{1b} raksturo balsta pārvietojumu balstbīdes X_1 virzienā.

Gadījumos, ja vertikālā balsta sēšanās notiek par “mazu” lielumu (att. 6.15a), var uz-

skatīt, ka $\Delta_{1b} \approx 0$ un tātad balstbīde X_1 lokā nerodas. Lielu balstu vertikālo pārvietojumu gadījumā (att. 6.15b), varam izmantot tuvinātu sakarību



att. 6.15

$$\Delta_{1\Delta} = l(1 - \cos \varphi) = l \left[1 - \sqrt{1 - (\Delta_v / l)^2} \right],$$

kur Δ_v ir balsta vertikālais pārvietojums.

Vienības pārvietojuma δ_{11} vērtība nemainās. Balsta horizontālā pārvietojuma gadījumā par lielumu Δ_h , kanoniskā vienādojuma brīvais loceklis Δ_{1b} ir skaitliski vienāds ar šo pārvietojumu un balstbīdes lielumu nosaka sakarība

$$H = X_1 = \Delta_h / \delta_{11}.$$

Salīdzinot balstbīdes, kuras rodas divlocīku loka balstam pārvietojoties par vienu un to pašu lielumu Δ vertikālā vai horizontālā virzienā konstatējam, ka to attiecība ir vienāda ar pārvietojumu balstbīdes virzienā attiecību. Tātad

$$\frac{H_v}{H_h} = \frac{l \left[1 - \sqrt{1 - (\Delta / l)^2} \right]}{\Delta} = \frac{l}{\Delta} \left[1 - \sqrt{1 - (\Delta / l)^2} \right]$$

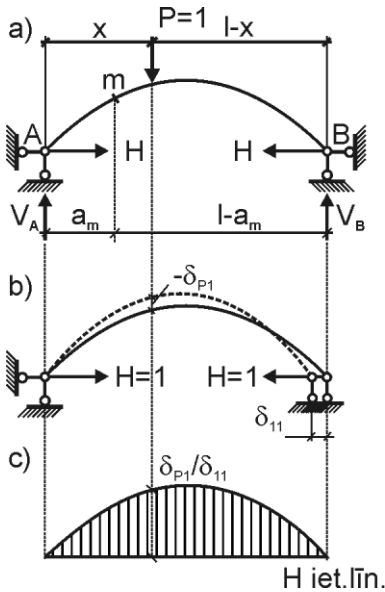
un šī attiecība raksturojas ar loka laiduma un balsta pārvietojuma attiecību.

6.5. Divlocīku loka piepūļu ietekmes līnijas

Kustīgo slodžu gadījumā par piepūļu izmaiņu raksturu konkrētā loka šķēlumā ļauj spriest attiecīgās ietekmes līnijas. Lieces momentu, asspēku un šķērsspēku ietekmes līniju konstruēšana iespējama, ja ir zināma *balstbīdes ietekmes līnija*. Atrisinot divlocīku loka kanonisko vienādojumu, iegūstam sakarības

$$H = X_1 = -\Delta_{1P} / \delta_{11},$$

kur Δ_{1P} ir pārvietojums no kustīgās vienības slodzes $\bar{P}=1$.



att. 6.16

Tātad var uzrakstīt, ka $\Delta_{1P} = \delta_{1P}$.

Saskaņā ar Maksvela jeb pārvietojumu savstarpīguma teorēmu (*pirmā vienības spēka pielikšanas punkta pārvietojums šī spēka darbības virzienā, kuru ierosina otrais vienības spēks, ir vienāds ar otrā vienības spēka pielikšanas punkta pārvietojumu šī spēka virzienā, kuru ierosina pirmais vienības spēks*) ir spēkā sakarība $\delta_{1P} = \delta_{P1}$ un tātad balstbīde nosakāma ar izteiksmi $X_1 = \delta_{P1} / \delta_{11}$. Pēdējā sakarība pēc satura būtiski atšķiras no iepriekšējās. Lielums Δ_{1P} raksturo pārvietojumu kāds rodas no vienības slodzes nezināmā X_1 darbības virzienā, bet δ_{P1} ir pārvietojums no vienības

slodzes $\bar{X}_1 = 1$ ārējās slodzes $\bar{P} = 1$ darbības virzienā. Tā kā $\bar{P}$ pārvietojas, tad ir jānosaka visu loka punktu pārvietojumi vertikālā virzienā, t.i. jāuzkonstruē loka vertikālo izlieču līkne (att. 6.16b), kuras ordinātas dalot ar konstantu lielumu δ_{11} , arī iegūstam balstbīdes X_1 ietekmes līniju (att. 6.16c).

Izlieču līkni varam konstruēt izmantojot Mora integrāli. Vispārīgā gadījumā lokam ir spēkā sakarība:

$$\Delta_{1P} = \int \frac{(-y)M_P}{EI} \frac{dz}{\cos \varphi} - \int \cos \varphi \frac{N_P}{EF} \frac{dz}{\cos \varphi} - \mu \int \sin \varphi \frac{Q_P}{GF} \frac{dz}{\cos \varphi} \quad (6.9)$$

Lai vienkāršotu izteiksmi, atmetīsim šķērsspēku un asspēku iespaidu.

Pieņemot, ka vienības spēks P atrodas attālumā a no loka kreisā balsta (att. 6.16a), nosakām, ka lieces momentu intervālā $0 \leq x \leq a$ nosaka sakarība $M_P = P(1 - a/l)x$, bet intervālā $a \leq x \leq l$ lieces moments mainās atbilstoši sakarībai $M_P = P \cdot a(1 - x/l)$.

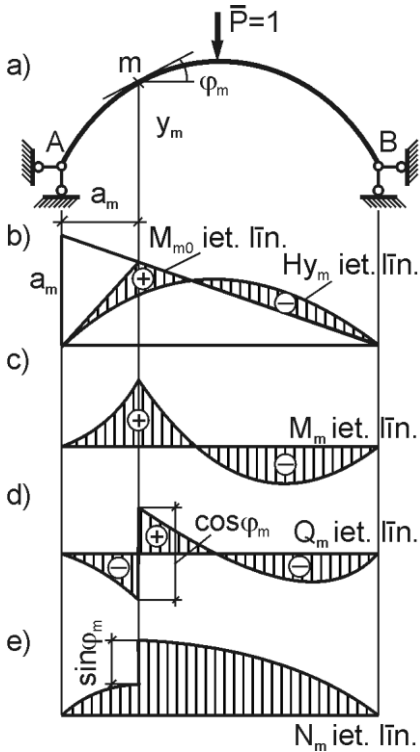
Tātad atbilstoši sakarībai (6.9) pie nosacījuma $P=1$, iegūstam

$$\Delta_{1P} = -\int_0^a y(1-a/l) \cdot x \frac{dx}{EI \cos \varphi} - \int_a^l y \cdot a(1-x/l) \cdot \frac{dx}{EI \cos \varphi} = f(a). \quad (6.10)$$

Izpildot integrēšanu, iegūstam pārvietojumu Δ_{1P} kā funkciju no parametra a (kustīgās slodzes tekošās koordinātas). Šī funkcija $f(a)$ dalīta ar parametru δ_{11} , kuru nosaka sakarība (6.2), apraksta loka izlieču līkni (att. 6.16c).

Nomainot parametru a ar tekošo koordināti x balstbīdes ietekmes līniju nosaka sakarība

$$H_{iet. līn.} = \frac{f(x)}{\delta_{11}}. \quad (6.11)$$



att. 6.17

Lieces momenta M_m ietekmes līnija

Konstruējot ietekmes līniju patvaļīgā loka šķēlumā m atbilstoši sakarībai $M_m = M_{m0} - Hy_m$ (M_{m0} lieces moments atbilstošās divbalstu sijas šķēlumā m) loka lieces momenta ietekmes līnija ir M_{m0} ietekmes līnijas (att. 6.17b), kurai ir trīsstūrveida forma (analogi sijai) ar ordinātas vērtību virsotnē $a_m(1-a_m/l)$, un balstbīdes H ietekmes līnijas (att. 6.16c) reizinājumam ar loka ordināti y_m starpība (att. 6.17c).

Asspēka N_m ietekmes līnija

Asspēka N_m ietekmes līniju šķēlumam m konstruē kā divu zināmu ietekmes līniju (Q_{m0} , H) summu atbilstoši sakarībai (Q_{m0} – šķērsspēks atbilstošās divbalstu sijas šķēlumā m):

$$N_m = -(Q_{m0} \sin \varphi_m + H \cos \varphi_m)$$

Ietekmes līnija (N_m) parādīta att. 6.17e.

Šķērsspēka Q_m ietekmes līnija

Šķērsspēka Q_m ietekmes līniju šķēlumam m konstruē līdzīgi kā asspēka gadījumā un to

veido divas zināmas ietekmes līnijas atbilstoši sakarībai

$$Q_m = Q_{m0} \cos \varphi_m - H \sin \varphi_m$$

Attiecīgās ietekmes līnijas raksturs attēlots att. 6.17d.

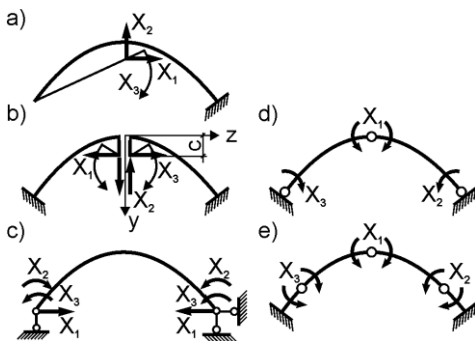
6.6. Bezlocīklu (iespīlētu) loku aprēķins statiskas slodzes gadījumā



att. 6.18

Bezlocīklu lokveida konstrukcijas parasti ir nesoši, simetriski ar mainīgu vai nemainīgu šķērsriezumu (att. 6.18) visbiežāk dzelzsbetona veidojumi lielu laidumu pārsegšanai. Kā pozitīvs bezlocīklu loku rādītājs ir jāuzskata visai vienmērīgais lieces momentu sadalījums pa loka laidumu, bet kā negatīvs, vērā ņemamie lieces momenti balstos, kas izvirza stingras konstruktīvās prasības balstu izgatavošanai.

Bezlocīklu loki ir trīs reizes statiski nenoteicamas sistēmas un tādēļ veicot to piepūļu aprēķinu ar spēku metodi jāatrisina trīs kanoniskie vienādojumi, kuri vispārīgā gadījumā katrs satur trīs nezināmos. Lai vienkāršotu šos vienādojumus var izmantot dažādas



att. 6.19

pamatsistēmas. Att. 6.19 parādītas vairākas iespējamās pamatsistēmas, kuras ļauj reducēt kanoniskos vienādojumus sekojošā formā:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Sijveida pamatsistēmās (att. 6.19a, b, c) tas tiek sasniegts pārnēsot piepūles uz elastīgo centru vai tā līmenī grupējot nezināmos, lokveida sistēmās (att. 6.19 d,e) grupējot nezināmos. Pamatsistēma **a** ir nesimetriska un tādēļ neizdevīga. Sistēma **b** ir simetriska un

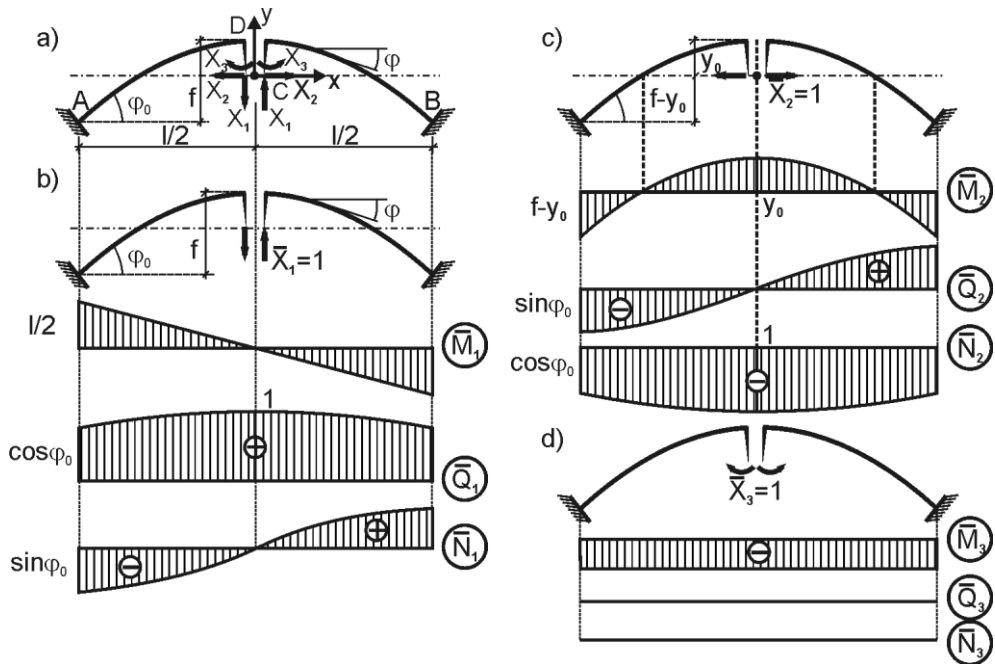
tātad ērta. Šai gadījumā piepūles pamatsistēmas daļās nosakāmas visai vienkārši un daudzos gadījumos ir vienādas ar nulli. Arī sistēma c ir simetriska, bet patvaļīgas slozdes gadījumā piepūles pa loka garumu nav nulle.

Lokveida sistēmas ir simetriskas, tomēr iekšējo piepūļu noteikšana ir sarežģītāka kā sijveida sistēmās un šīs piepūles nekad nav vienādas ar nulli. Piepūles sijveida pamatsistēmās būtiski atšķiras no attiecīgajām piepūlēm bezlociklu lokā, turpretī lokveida pamatsistēmās, piem., asspēki ir tuvi analizējamā loka asspēkiem.

Turpmāk izmantosim pamatsistēmu, kura dota att. 6.19.b, kā visvienkāršāko.

Izmantosim divas koordinātu sistēmas: palīgsistēmu x_1, y_1 , kuras sākumpunkts ir loka šķēlumā k un pamatsistēmu x, y , kuras asis ir paralēlas palīgsistēmai, bet virsotne ir patvaļīgā punktā C ar koordinātēm $(l/2, y_c)$ (att. 6.20a). Asu pozitīvie virzieni orientēti pa labi un uz augšu.

Par pozitīvām piepūlēm uzskatām - **lieces momentus**, kuri izraisa stiepi loka apakšējā kārtā, **šķērsspēkus**, kuri cenšas šķēluma plaknē pagriezt loku pulksteņrādītāja darbības virzienā, **asspēkus**, kuri izstiepj loka asi.



att. 6.20

Pieņūmū $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ un $\bar{X}_3 = 1$ izraisītās M, Q un N epīras nosaka sakarības:

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= 1 \cdot z; & \bar{M}_2 &= y; & \bar{M}_3 &= -1; \\ \bar{Q}_1 &= 1 \cdot \cos \varphi; & \bar{Q}_2 &= -1 \cdot \sin \varphi; & \bar{Q}_3 &= 0; \\ \bar{N}_1 &= 1 \cdot \sin \varphi; & \bar{N}_2 &= \cos \varphi; & \bar{N}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Konstruējot vienības epīras izmantots nosacījums, ka loka daļai labajā pusē $\sin \varphi$ ir negatīvs, bet kreisajā pusē - pozitīvs. Funkcija $\cos \varphi$ ir pozitīva visā loka garumā (pāra funkcijas īpašība).

Sakarībām (6.13) atbilstošās epīras parādītas att. 6.20. Visas epīras sadalāmas divās grupās: simetriskās ($\bar{Q}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{N}_2$, $\bar{M}_3$) un apgriezti simetriskās ($\bar{M}_1$, $\bar{N}_1$, $\bar{Q}_2$). Ņemot vērā šo apstākli varam secināt, ka ir pamatots apgalvojums $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$. Attiecībā uz pārvietojumu δ_{23} jāsecina, ka vispārīgā gadījumā tas nav nulle. Tomēr var panākt, ka arī šis pārvietojums kļūst vienāds ar nulli. To var panākt pareizi izvēloties bezgala stingro konsoļu garumu y_0 . Mainot parametra y_c lielumu, mainās epīras $\bar{M}_2$ pozitīvās un negatīvās daļas attiecība. Optimālo konsoļu garumu y_0 izvēlamies no nosacījuma

$$\delta_{23} = -\int_0^s 1 \cdot y \frac{ds}{EI} = 0.$$

Izmantojot substitūciju $y = y_1 - y_0$, no iepriekšējās izteiksmes iegūstam

$$\int_0^s y_1 \frac{ds}{EI} - y_c \int_0^s \frac{ds}{EI} = 0.$$

Tātad nepieciešamais konsoles garums ir ($E = \text{const}$)

$$y_c = \int_0^s \frac{y_1 ds}{I} \bigg/ \int_0^s \frac{ds}{I}.\tag{6.14}$$

Sastādot kanoniskos vienādojumus asīs, kuru sākumpunkts ir punkts C, pamatsistēmas nezināmie nosakāmi ar sakarībām

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}}. \quad (6.15)$$

Punktu C (konsoļu galapunktu) bieži vien sauc par **elastīgo centru**.

Pārvietojumu δ_{ij} noteikšanai parasti izmanto vienkāršotas izteiksmes, kurās nav ņemti vērā asspēki un šķērsspēki. Tā iegūstam

$$\delta_{11} = \int_0^s x^2 ds / EI; \quad \delta_{22} = \int_0^s y^2 ds / EI; \quad \delta_{33} = \int_0^s ds / EI. \quad (6.16)$$

Kanonisko vienādojumu brīvie locekļi Δ_{iP} vispārīgā gadījumā nav vienādi ar nulli, tos nosaka sakarības

$$\Delta_{1P} = \int_0^s x M_P ds / EI; \quad \Delta_{2P} = \int_0^s y M_P ds / EI; \quad \Delta_{3P} = \int_0^s M_P ds / EI. \quad (6.17)$$

Visas zemintegrāļu izteiksmes jāizsaka caur argumentu x . Šai nolūkā jāizmanto sakarības $ds = dx / \cos \varphi$ un $\cos \varphi = 1 / \sqrt{1 + (dy / dx)^2}$.

Izteiksmēs (6.16) un (6.17) noteiktos integrāļus izskaitļot analītiskā veidā izdodas reti, parasti tas jāveic ar skaitliskās integrēšanas metodēm.

Izmantojot teorēmu - ja uz simetrisku darinājumu darbojas simetriska slodze, tad apgriezti simetrisko nezināmo vērtības ir nulle; un otrādi, kad darbojas apgriezti simetriska slodze, simetriskiem nezināmiem ir vērtība nulle - var apgalvot, ka simetrisku slodžu gadījumos pārvietojums Δ_{1P} ir vienāds ar nulli, bet apgriezti simetrisku slodžu gadījumos $\Delta_{2P} = \Delta_{3P} = 0$.

Tātad racionāli ir jebkuru simetriskam lokam pielikto sloojumu sadalīt simetriskā un antisimetriskā un nezināmā X_1 noteikšanā ignorēt simetrisko ārējās slodzes daļu, bet nezināmo X_2 un X_3 noteikšanā tās apgriezti simetrisko daļu.

Kad noteikti koeficienti δ_{1i} un Δ_{iP} , varam noteikt X_i un līdz ar to piepūles bezlocīklu lokā nosakāmas ar sakarībām:

$$M = M_P + xX_1 + yX_2 - X_3;$$

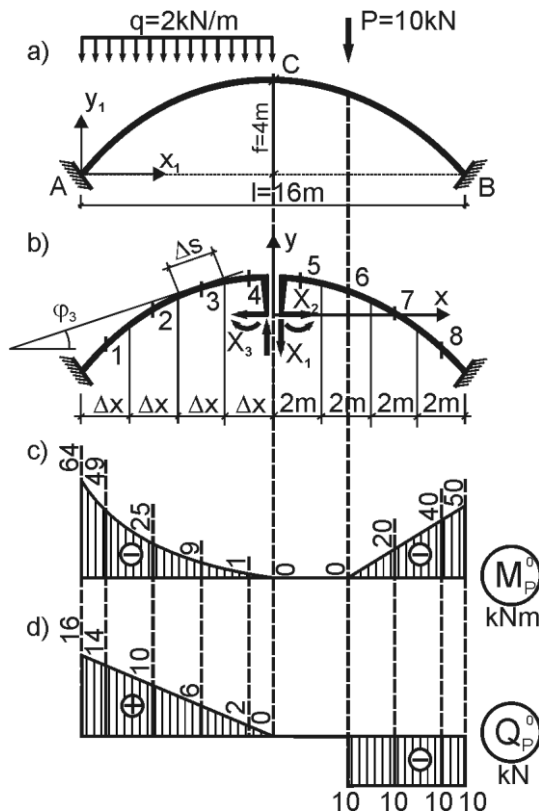
$$Q = Q_p + \cos \varphi \cdot X_1 - \sin \varphi \cdot X_2; \quad (6.18)$$

$$N = -(N_p + \sin \varphi \cdot X_1 + \cos \varphi \cdot X_2).$$

Vertikālas ārējās slodzes gadījumā momenti M_p nosakāmi kā taisnām konsolēm, bet šķērsspēki un asspēki pēc formulām

$$Q_p = Q_0 \sin \varphi, \quad N_p = Q_0 \cos \varphi,$$

kur Q_0 – šķērsspēks horizontālā konsolē. Lietderīgi atcerēties, ka labajam puslokam $\sin \varphi$ ir negatīvs, bet kreisajam pozitīvs. Zinot loka piepūļu epīras, varam noteikt attiecīgās piepūles M_A, M_B, Q_A, Q_B, N_A un N_B loka balstos A un B.



att. 6.21

Piemērs 6.2. Izmantojot elastīgā centra metodi uzkonstruēt piepūļu M , Q un N epīras parabolveida bezlocīklu lokam, kurš dots att. 6.21. Loka šķēlumu inerces momenti no vidus uz balstiem pieaug atbilstoši sakarībai $I = I_0 / \cos \varphi$.

Atrisinājums. Loka formu nosaka parabolas vienādojums

$$y = \frac{4fx(l-x)}{l^2}.$$

1. Veiksim tuvinātu aprēķinu sadalot loka laidumu 8 vienādos nogriežņos $\Delta x = 2 \text{ m}$. Loka asi aizvietojam ar lauztu līniju, kuras elementi ir Δs (att. 6.21b). Katra elementa Δs cen-

tra koordinātes dotas tab. 6.5. Tā kā līknes (parabola) pieskares leņķi nosaka sakarība $\tan \varphi = y' = 4f(l-2x)/l^2$, tad katra elementa Δs slīpumu pret x asi nosaka līknes

vienādojuma atvasinājums punktā, kurš atbilst elementa centram. Loka elementu slīpuma leņķi sakopoti tab. 6.5. Atbilstoši šiem leņķiem noteiktas attiecīgās $\sin\varphi_x$ un $\cos\varphi_x$ vērtības.

2. Loka elastīgo centru nosakām izmantojot sakarību (6.14). Tā iegūstam

$$y_c = \frac{\sum y_1 \Delta x}{\sum \Delta x} = \frac{\sum y_1}{n} = \frac{21,52}{8} = 2,60m$$

(n – nogriežņu Δs skaits).

3. Turpmākos aprēķinus veicam koordinātu sistēmā x, y, kuras sākumpunkts ir elastīgais centrs. Konsolsiju epīras M_{p0} un Q_{p0} no ārējās slodzes parādītas att. 6.21 c,d.

4. Nosakot kanonisko vienādojumu koeficientus un brīvos locekļus, ņemam vērā, ka loka forma ir pietiekami stāva ($f = 4 > (l/6)$). Tātad pamatots ir pieņēmums, ka asspēku un šķērsspēku iespaids uz pārvietojumiem ir nebūtisks.

Tabula 6.5

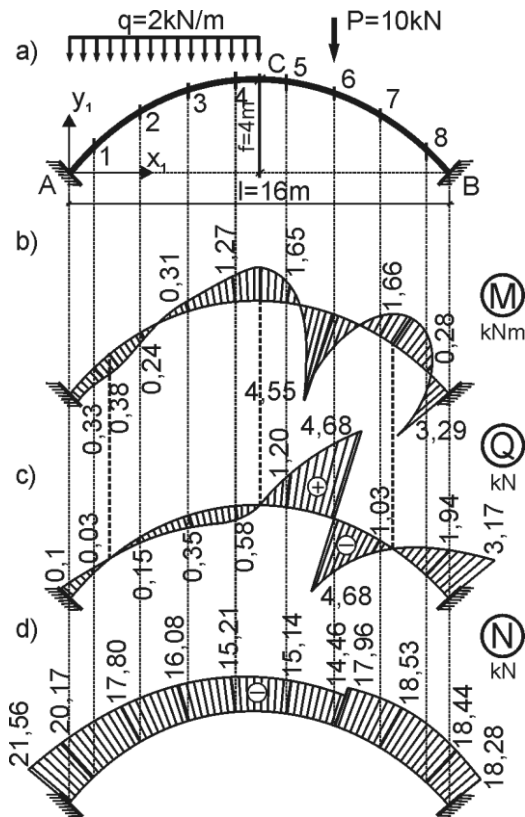
Aprēķina izejas lielumi

Šķēlums	x_1	$l - x_1$	$x_1(l - x_1)$	$y_1 = \frac{x_1}{16}(l - x_1)$	$l - 2x_1$	$tg \varphi = \frac{l - 2x_1}{16}$	φ_x	$\sin\varphi_x$	$\cos\varphi_x$
A	0	16	0	0	16	1			
1	1	15	15	0,94	14	0,875	45°00'	0,707	0,707
2	3	13	39	2,44	10	0,625	41°12'	0,658	0,752
3	5	11	55	3,44	6	0,375	32°00'	0,530	0,848
4	7	9	63	3,94	2	0,125	20°33'	0,351	0,937
5	9	7	63	3,94	-2	-0,125m	7°6'	0,124	0,992
6	11	5	55	3,44	-6	-0,375m	-7°6'	-0,124	0,992
7	13	3	39	2,44	-10	-0,625	-20°33'	-0,351	0,937
8	15	1	15	0,94	-14	-0,875	-32°00'	-0,530	0,848
B	16	0	0	0	-16	-1	-41°12'	-0,658	0,752
Σ				21,52			-45°00'	-0,707	0,707

Tabula 6.6

Izejas dati transformētajā koordinātu sistēmā

Šķēlums	$x = x_1 - \frac{l}{2}$	$y = y_1 - y_c$	x^2	y^2	M_p	xM_p	yM_p
1	-7	-1,75	49	3,06	-49	343	85,75
2	-5	-0,25	25	0,06	-25	125	6,25
3	-3	0,75	9	0,56	-9	27	-6,75
4	-1	1,25	1	1,56	0	0	0
5	1	1,25	1	1,56	0	0	0
6	3	0,75	9	0,56	0	0	0
7	5	-0,25	25	0,06	-20	-100	5
8	7	-1,75	49	3,06	-40	-280	70
Σ		0	168	10,48	-144	116	159



att. 6.22

Tādā gadījumā

$$\frac{EI}{\Delta x} \delta_{11} = \sum \bar{M}_1^2 = \sum z^2 = 168m^2;$$

$$\frac{EI}{\Delta x} \delta_{22} = \sum \bar{M}_2^2 = \sum y^2 = 10,48m^2;$$

$$\frac{EI}{\Delta x} \delta_{33} = \sum \bar{M}_3^2 = \sum 1 = n = 8;$$

$$\begin{aligned} \frac{EI}{\Delta x} \Delta_{1P} &= \sum \bar{M}_1 M_P = \\ &= \sum z M_P = 16kN \cdot m^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{EI}{\Delta x} \Delta_{2P} &= \sum \bar{M}_2 M_P = \\ &= \sum (-y) M_P = -159kN \cdot m^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{EI}{\Delta x} \Delta_{3P} &= \sum \bar{M}_3 M_P = \\ &= \sum (-1) M_P = 114kN \cdot m. \end{aligned}$$

5. Atrisinot kanoniskos vienādojumus, iegūstam nezināmo X_1 , X_2 , X_3 vērtības.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{116}{168} = -0,69kN; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = \frac{159}{10,48} = 15,17kN;$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} = -\frac{144}{8} = -18kNm$$

6. Piepūļu epīras tiek noteiktas atbilstoši sakarībām

$$M = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3;$$

$$Q = Q_P + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3;$$

$$N = N_P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3.$$

Epīru ordinātu aprēķinu secība tipiskajos šķēlumos dota tab. 6.7 un 6.8, bet iegūtās epīras redzamas att. 6.22.

7. Veicam iegūtās lieces momentu epīras pareizības kinemātisko pārbaudi. Ir jāizpildās nosacījumiem, ka pārvietojumi atmesto saišu virzienos pamatsistēmā ir vienādi ar nulli, t.i.:

$$\int \frac{\bar{M}_1 M ds}{EI} = 0; \quad \int \frac{\bar{M}_2 M ds}{EI} = 0; \quad \int \frac{\bar{M}_3 M ds}{EI} = 0.$$

Ņemot vērā veiktos vienkāršojumus, šo integrāļu noteikšana reducējas uz vienkāršu summu noteikšanu $\sum xM = 0 \quad \sum yM = 0 \quad \sum M = 0$.

Šo summu aprēķins veikts tab. 6.7, 6.8. Kļūda nav būtiska.

Tabula 6.7

M, Q un N epīru ordinātu aprēķini

Šķēlums	x	y	M_P	xX_1	$-yX_2$	$-X_3$	M	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$
A	-8	-2,69	-64	5,52	40,81	18	0,33	16	11,312
1	-7	-1,75	-49	4,83	26,55	18	0,38	14	10,528
2	-5	-0,25	-25	3,45	3,79	18	0,24	10	8,480
3	-3	0,75	-9	2,07	-11,38	18	-0,31	6	5,622
4	-1	1,25	-1	0,69	-18,96	18	-1,27	2	1,984

Šķē- lums	x	y	M_p	xX_1	$-yX_2$	$-X_2$	M	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$
5	1	1,25	0	-0,69	-11,38	18	4,55	0	0
6	3	0,75	0	-2,07	-11,38	18	4,55	0 -10	0 -9,370
7	5	-0,25	-20	-3,45	3,79	18	-1,66	-10	-8,480
8	7	-1,75	-40	-4,83	26,55	18	-0,28	-10	-7,520
B	8	-2,69	-50	-5,52	40,81	18	3,29	-10	-7,070
Σ							0		

Tabula 6.8

M, Q un N epīru ordinātu aprēķini

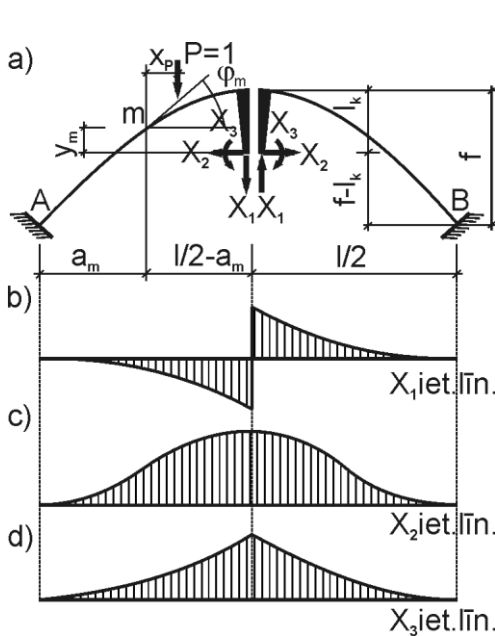
Šķē- lums	$\cos \varphi X_1$	$-\sin \varphi X_1$	Q	$-Q^0 \sin \varphi$	$-\sin \varphi X_1$	$-\cos \varphi X_2$	N	yM	xM
A	-0,488	-10,725	0,10	-11,312	0,488	-10,725	-21,56	-	-
1	-0,519	-9,982	0,03	-9,212	0,454	-11,408	-20,17	-0,665	-2,66
2	-0,585	-8,040	-0,15	-5,300	0,366	-12,864	-17,80	-0,060	-1,20
3	-0,647	-5,325	-0,35	-2,106	0,242	-14,214	-16,08	-0,233	0,93
4	-6,84	-1,881	-0,58	-0,248	0,086	-15,049	-15,21	-1,588	1,27
5	-0,684	1,881	1,20 4,68	0 0	-0,086	-15,049	-15,14 -14,46	-2,063	-1,65
6	-0,647	5,325	-4,69	-3,510	-0,242	-14,214	-17,93	3,413	13,65
7	-0,585	8,040	-1,03	-5,300	-0,366	-12,864	-18,53	0,415	-8,30
8	-0,519	9,982	1,94	-6,580	-0,454	-11,408	-18,44	0,490	-1,96
B	-0,488	10,725	3,17	-7,070	-0,488	-10,725	-18,28	-	-
Σ								-0,29	0,10

6.7. Bezlociklu loka ietekmes līnijas

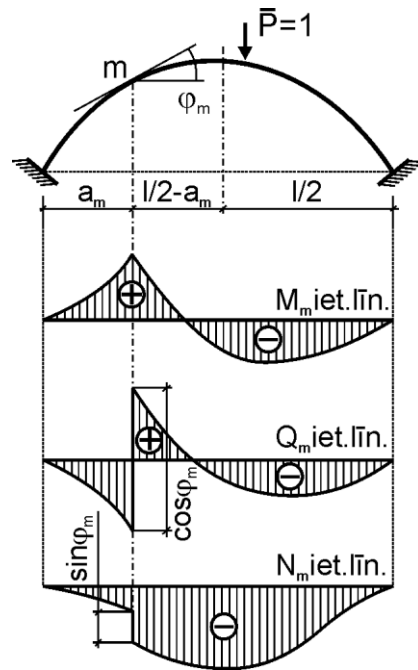
Nezināmo X_i ietekmes līnijas ir proporcionālas pārvietojumu Δ_{ip} ietekmes līnijām, jo pārvietojumi δ_{ii} nav atkarīgi no kustīgās slodzes $\bar{P} = 1$ stāvokļa. Izmantojot sakarības (6.15) iegūstam

$$\begin{aligned}
 iet.l.(X_1) &= \frac{iet.l.(\Delta_{1P})}{\delta_{11}}; \\
 iet.l.(X_2) &= \frac{iet.l.(\Delta_{2P})}{\delta_{22}}; \\
 iet.l.(X_3) &= \frac{iet.l.(\Delta_{3P})}{\delta_{33}}.
 \end{aligned}$$

Pamatojoties uz pārvietojumu savstarpīguma principu, pārvietojums Δ_{ip} ir aizvietojams ar pārvietojumu δ_{pi} un tātad ir nepieciešams noteikt loka ass vertikālās izlieces, kuras

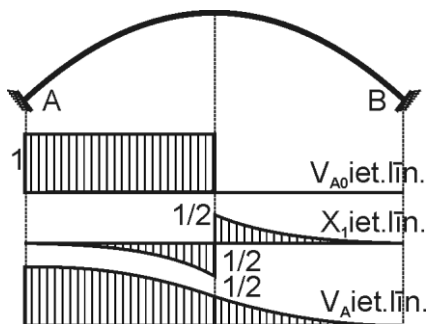


att. 6.23



att. 6.24

rodas attiecīgi piepūļu $\bar{X}_1=1$, $\bar{X}_2=1$, $\bar{X}_3=1$ darbības rezultātā. Simetrisko nezināmo gadījumos (X_2 , X_3) ietekmes līnijas ir simetriskas, bet apgriezti simetriskajam nezināmajam X_1 apgriezti simetriska. Nezināmo X_i ietekmes līniju raksturs parādīts att. 6.23.



att. 6.25

Pieņemot, ka nezināmo X_i ietekmes līnijas jau noteiktas, piepūļu M , Q , N ietekmes līnijas izvēlētā šķēlumā m tiek konstruētas izmantojot sakarības (6.18). Ietekmes līnijas sastāv no diviem atšķirīgiem zariem, kuri atbilst diviem vienības slodzes $\bar{P} = 1$ stāvokļiem attiecībā pret izvēlēto šķēlumu – pa labi vai pa kreisi no tā.

Lieces momenta M_m ietekmes līniju nosaka sakarības:

$$M_m = \left(\frac{l}{2} - a_m \right) X_1 + y_m X_2 - X_3 - x_p \quad \text{slodze P pa labi no šķēluma;}$$

$$M_m = \left(\frac{l}{2} - a_m \right) X_1 + y_m X_2 - X_3 \quad \text{P pa kreisi no šķēluma.}$$

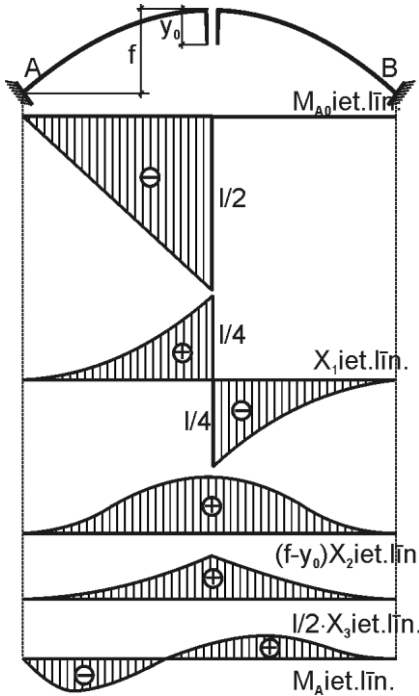
Analogas sakarības šķērsspēku un asspēku ietekmes līniju noteikšanai ir

$$Q_m = X_1 \cos \varphi_m - X_2 \sin \varphi_m + 1 \cdot \cos \varphi_m \quad \text{P pa labi no šķēluma;}$$

$$Q_m = X_1 \cos \varphi_m - X_2 \sin \varphi_m \quad \text{P pa kreisi no šķēluma;}$$

$$N_m = -(X_1 \sin \varphi_m + X_2 \cos \varphi_m + 1 \cdot \sin \varphi_m) \quad \text{P pa labi no šķēluma;}$$

$$N_m = -(X_1 \sin \varphi_m + X_2 \cos \varphi_m) \quad \text{P pa kreisi no šķēluma.}$$



att. 6.26

Par M , Q un N ietekmes līniju raksturu var spriest no att. 6.24.

Loka kreisā balsta A vertikālās reakcijas ietekmes līniju veido balsta A pamatsistēmā ietekmes līnijas un nezināmā X_1 ietekmes līnijas summa:

$$iet.l.(V_A) = iet.l.(V_{A0}) + iet.l.(X_1)$$

Grafisks balsta reakcijas V_A ietekmes līnijas veidošanas princips redzams att. 6.25.

Horizontālās balsta reakcijas H_A ietekmes līnija sakrīt ar nezināmā X_2 ietekmes līniju (att. 6.23.c).

Balstmomenta M_A ietekmes līniju veido četru ietekmes līniju summa atbilstoši sakarībai

$$iet.l.(M_A) = iet.l.(M_{A0}) - iet.l.(X_1) \frac{l}{2} + iet.l.(X_2)(f - y_c) - iet.l.(X_3)$$

Kaut arī M_{A0} , X_1 , X_3 ietekmes līnijām (att. 6.26.a,b,d) ir izteikti lūzuma un lēciena punkti, balstmomenta M_A ietekmes līnija ir gluda līkne.

6.8. Temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles bezlocīklu lokos

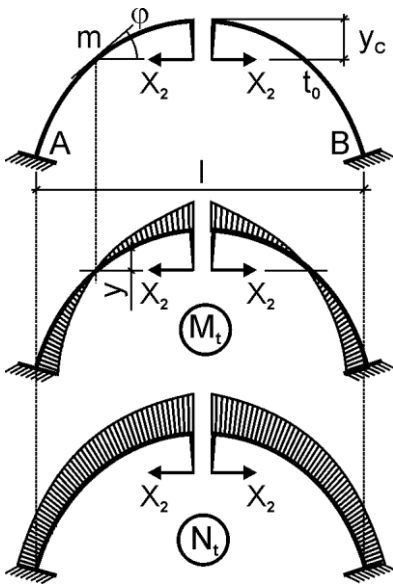
Veicot loka aprēķinu uz temperatūras iedarbību, varam izmantot jau iegūtās pamatsistēmas nezināmo X_1 izteiksmes, nomainot slodzes izraisītos pārvietojumus Δ_{p_i} ar atbilstošajiem pārvietojumiem, kurus izraisa temperatūras izmaiņa. Vienmērīgas uzsilšanas gadījumā par t_0 grādiem, pamatsistēmas pārvietojumu nezināmā X_2 virzienā vispārīgā gadījumā nosaka sakarību

$$\Delta_{2t} = \alpha \int_0^S \bar{M}_2 \frac{\Delta t}{h} ds + \alpha \int_0^S \bar{N}_2 t_0 ds. \quad (6.19)$$

Parasti lokveida konstrukcijas uzsilst (vai atdziest) vienmērīgi, t.i. temperatūra abās loka pusēs izmainās vienādi. Tādā gadījumā temperatūru differences $\Delta t = 0$ un sakarības (6.19) pirmais saskaitāmais atkrīt. Ņemot vērā, ka $\bar{N}_2 = -\cos \varphi$, bet $ds = dx / \cos \varphi$, no sakarības (6.19) iegūstam

$$\Delta_{2t} = \alpha \int_0^l t_0 dx = \alpha t_0 l.$$

Tādā gadījumā horizontālā nezināmā vērtību X_2 nosaka izteiksme



att. 6.27

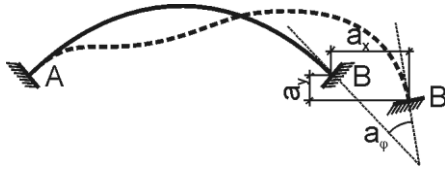
$$X_2 = \frac{\alpha t_0 l}{\int_0^S \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^S \frac{\cos^2 \varphi ds}{EF}}.$$

Piepūles pārējo nezināmo (X_1 , X_3) virzienos vienmērīgas temperatūras izmaiņas dēļ nerodas. Tātad šie nezināmie ir vienādi ar nulli un temperatūras izmaiņas izraisītās piepūles lokā neiespaido.

Vienmērīgas temperatūras izmaiņas dēļ bezlocīklu lokā rodas lieces moments $M_t = -X_2 y$ un asspēks $N_t = X_2 \cos \varphi$. Par to izmaiņas raksturu lokā var spriest no att. 6.27.

Dzelzsbetona lokos iespējama piepūļu rašanās rukuma dēļ. Rukums bezlocīklu lokā izraisa piepūles analogas tām, kādas rastos pie loka vienmērīgas atdzišanas. Nepieciešams vienīgi piemeklēt tādu temperatūru, kura izraisa pamatsistēmas relatīvo saīsinājumu vienādu ar saīsinājumu no betona rukuma.

6.9. Bezlocīklu loka aprēķins balstu sēšanās gadījumā



att. 6.28

Balstu sēšanās iespaido loka spriegumu – deformāciju stāvokli, radot papildus piepūles. Vispārīgā gadījumā viens vai arī abi balsti var iegūt trīs veida pārvietojumus plaknē – vertikālos, horizontālos kā arī leņķiskos.

Apskatīsim gadījumu, kad loka labais balsts pārvietojas horizontāli par lielumu a_x , vertikāli – lielumu a_y , bet pagriežas par leņķi a_φ . Šāds stāvoklis redzams att. 6.28. No šiem trim pārvietojumiem pamatsistēmā nezināmo X_i virzienos rodas pārvietojumi Δ_{ib} , kurus nosakot no vienkāršām kinemātiskām sakarībām, iegūstam

$$\Delta_{1b} = a_y + \frac{a_\varphi \cdot l}{2}; \quad \Delta_{2b} = a_x + (f - y_c)a_\varphi; \quad \Delta_{3b} = a_\varphi.$$

Šie pārvietojumi nosaka nezināmo X_i vērtības:

$$X_i = \frac{\Delta_{ib}}{\delta_{ii}}$$

un līdz ar to piepūļu epīras bezlocīklu lokā iespējams konstruēt izmantojot sakarības

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3;$$

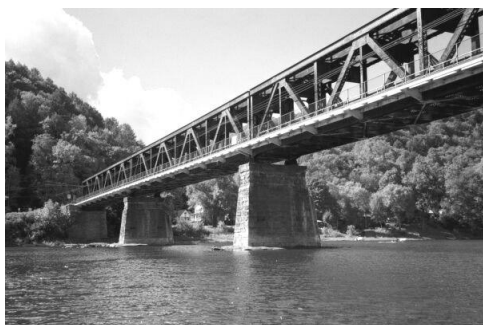
$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3;$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3.$$

Pārvietojumi Δ_{ip} nav atkarīgi no loka stinguma, toties pārvietojumi δ_{ii} samazinās loka stingumam pieaugot. Tātad varam izdarīt secinājumu, ka uzdotu balsta pārvietojuma gadījumā lielākas piepūles radīsies bezlocīklu lokos ar lielāku stingumu.

7. STATISKI NENOTEICAMU KOPŅU APRĒĶINS

Kopnes, kuras tiek izmantotas reālajā būvniecībā, praktiski nekad nav statiski noteicamas, jo nosacījums par ideālām locīklām stieņu savstarpējos savienojumos patiesībā ir stipri nosacīts. Taču turpmākajā izklāstā pievērsīsimies cita veida statistiskajai nenoteicamībai, tas ir tāдай, kad kopnei no struktūras analīzes viedokļa ir lieki balsti vai stieņi. Vairāku laidumu dzelzceļa tiltu gadījumā nepārtraukta rakstura sijveida kopnes (att. 7.1) ir racionālākas par atsevišķu laidumu statiski noteicamajām kopnēm (att. 7.2). Tās vienmērīgāk uzņem kustīgo slodzi tai pārejot no viena laiduma uz otru.



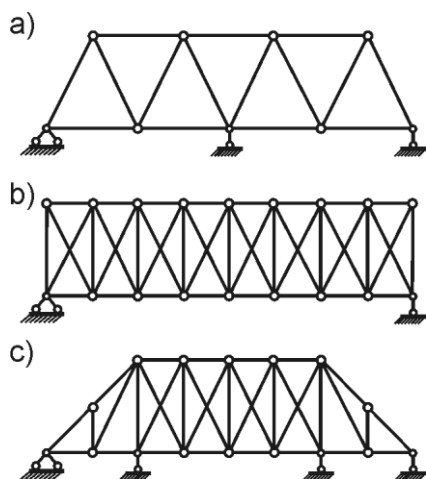
att. 7.1



att. 7.2

Šī iemesla dēļ, divlocīklu lokveida kopnes ir racionālāka par trīslocīklu kopnēm. Arī ekonomiskie aprēķini rāda, ka nepārtrauktas kopnes ir izdevīgākas par vairākām atsevišķām vienkaldumu kopnēm, to svars ir mazāks.

Pie kam statiski nenoteicamas kopnes ir drošākas par statiski noteicamajām, jo atsevišķu stieņu avārija ne vienmēr rada bīstamu situāciju kā tas ir statiski noteicamu kopņu gadījumā. Izvēloties kopņveida konstrukciju shēmu, tiek kompleksi risināts jautājums par darinājuma stiprību, drošumu un ekonomiskumu. Praksē sastopamām kopnēm parasti statistiskās nenoteicamības pakāpe nav liela. Statiskā nenoteicamība var būt divejāda veida – **ārējā** (att. 7.3a), kad balstu reakcijas ir vairāk kā trīs un **iekšējā** (att. 7.3b), kad režģojuma stieņu skaits ir lielāks par to, kuram iespējams noteikt piepūles stieņos no statikas līdzsvara vienādojumiem. Praksē var tikt izveidotas kopnes ar pirmā, otrā vai arī jauktā veida statisko nenoteicamību. (att. 7.3c). Statiskās nenoteicamības pakāpi



att. 7.3

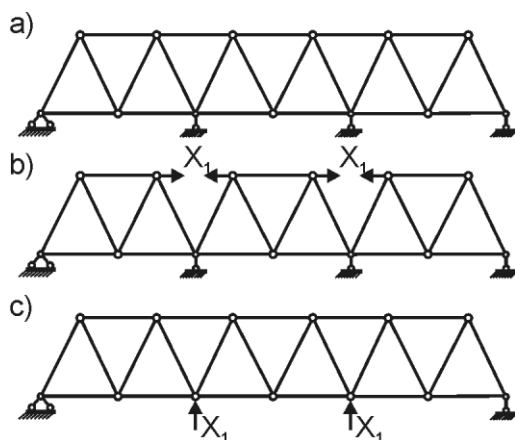
kopnei nosaka sakarība

$$n = S + S_b - 2m$$

(S – stieņu skaits, S_b – balststieņu skaits, m – mezglu skaits).

Spēku metodes pamatsistēmu izvēlas pārgriežot (ne atmetot) liekos stieņus vai atmetot liekos balstus. Svarīgi ņemt vērā, ka statiski nenoteicamās kopnēs stieņi un balsti iedalāmi nepieciešamajos (obligātajos), kurus atmetot izveidojas ģeometriski mainīga sistēma, un liekajos (neobligātajos), t.i. visos pārējos.

Izvēloties pamatsistēmas parasti vadās no apsvēruma, ka ērtākas ir tās sistēmas, kuras veidotas pārgriežot liekos stieņus nevis atmetot balstus.



att. 7.4

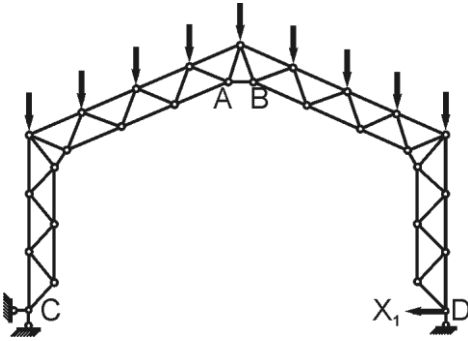
Tā att. 7.4b veidotā pamatsistēma izdevīgāka par citu pamatsistēmu (att. 7.4c), jo pirmajā gadījumā vairākos stieņos no ārējās slodzes un $\bar{X}_1 = 1$ piepūles ir nulle. Statiski nenoteicamu kopņu aprēķina būtība, tāpat kā visu citu stieņu sistēmu gadījumos ir noteikt piepūles atsevišķos stieņos ar mērķi uz šo rezultātu pamata izvēlēties racionālākos stieņu šķērsgriezuma laukumus. Diemžēl vispārīgā gadījumā stieņu piepūļu

aprēķins veicams tikai tad, ja ir zināmi visu stieņu šķērsgriezumi, bet pareizi izvēlēties stieņu šķērsgriezumus var tikai zinot piepūles šais stieņos.

Tātad sākotnēji piepūles kopnes stieņos jāizvēlas ar kādu tuvinātu paņēmieni. Viens no tādiem ir pieņemt, ka visu stieņu šķērsgriezumi ir vienādi. Nepārtrauktām kopnēm var izmantot analogiju ar nepārtrauktām sijām un noteikt lieces momentus un šķērsspēkus

ar statiski nenoteicamu siju aprēķinu metodēm. Kopnes joslas stieņiem piepūles nosaka izmantojot lieces momentus, bet piepūles kopnes režģojumā izmantojot šķērsspēkus.

7.1. Kopne ar vienu lieku saiti



att. 7.5

Aprēķinot kopni pieņemam, ka visu stieņu šķērssgriezumi ir uzdoti un nepieciešams noteikt tikai katra stieņa piepūli. Att. 7.5 dota spēku metodes pamatsistēma vienreiz statiski nenoteicamai lokveida kopnei ar mezglveida ārējo slodzes slogojumu. Par šīs kopnes lieko nezināmo pieņemta balstbīde X_1 . Lai noteiktu kanoniskā vienādojuma

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

koefficientus, vispirms ir jānosaka piepūles N_p no ārējās slodzes un piepūles $\bar{N}$ no slodzes $\bar{X}_1 = 1$ visos pamatsistēmas stieņos. Šo piepūļu noteikšanai ir izmantojama jebkura statiski noteicamu kopņu aprēķinu metode. Kanoniskā vienādojuma koeficientu vērtības nosaka izteiksmes

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{EF_i}; \quad \Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i N_{pi} l_i}{EF_i}, \quad (7.1)$$

bet liekā nezināmā vērtība ir

$$X = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i N_{pi} l_i}{F_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_i^2 l_i}{F_i}} \quad (7.2)$$

Sakarībās (7.1) un (7.2) izmantotie apzīmējumi ar indeksu i attiecas uz vienu konkrētu stieni. Tātad l_i ir i -tā stieņa garums, bet F_i ir šī stieņa šķērssgriezuma laukums. Elastības modulis visiem kopnes stieņiem pieņemts konstants. Liela kopnes stieņu skaita gadījumā aprēķini ir visai darbietilpīgi, kaut arī vienveidīgi. Tos izdevīgi apkopot tabulas veidā.

Piepūles statiski nenoteicamās kopnes stieņos nosakāmas atbilstoši sakarībām

$$N_i = N_{pi} + \bar{N}_i X_1. \quad (7.3)$$

Temperatūras iedarbības (izmaiņas) rezultātā statiski nenoteicamo sistēmu elementos rodas piepūles, kuras iespējams noteikt līdzīgi kā ārējās slodzes gadījumā atrisinot kanonisko vienādojumu, kurā brīvais loceklis ir temperatūras izraisītais pārvietojums nezīnāmā X_1 virzienā un to nosaka sakarība

$$\Delta_{1t} = \alpha \sum_{i=1}^n \bar{N}_i l_i \Delta t_i,$$

kur α - materiāla lineārās izplešanās koeficients, Δt_i – stieņa temperatūras izmaiņa (parasti $\Delta t_i = \Delta t = \text{const}$).

Tātad temperatūras izmaiņas dēļ kopnes balstā rodas balstbīde

$$X_t = - \frac{\alpha \sum_{i=1}^n \bar{N}_i l_i \Delta t_i}{\sum_{i=1}^n \bar{N}_i^2 l_i / F_i}, \quad (7.4)$$

bet jebkurā stienī piepūle

$$N_i = \bar{N}_i X_t. \quad (7.5)$$

Kopņu montāžas gaitā gadās, ka kāds no stieņiem ir garāks nekā to prasa kopnes konfigurācija. Pieņemsim, ka att. 7.5 tāds ir stienis AB, kurš ir par lielumu a garāks nekā nepieciešams. Šādā gadījumā piepūļu aprēķinu kopnes stieņos var reducēt uz temperatūras iedarbību: pieņemam, ka stienis AB ir ieguvis temperatūras izraisītu pagarinājumu $\alpha \Delta t l_{AB} = a$, bet pārējo stieņu pagarinājumi $\alpha \Delta t l_i = 0$. Tādā gadījumā $\Delta_{1t} = a \bar{N}_{AB}$, kur $\bar{N}_{AB}$ - spēka $\bar{X} = 1$ izraisītā piepūle stienī AB.

Var sastādīt kanonisko vienādojumu

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1a} = 0,$$

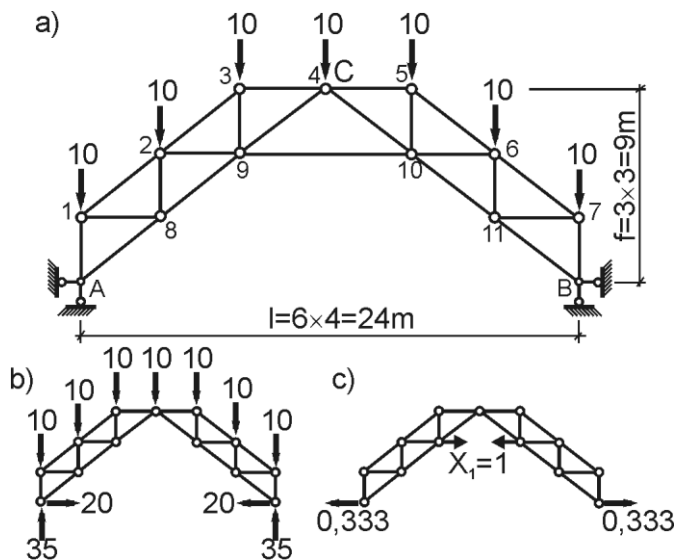
kur Δ_{1a} - pārvietojums spēka X_1 virzienā ko pamatsistēmā izraisījis pagarinājums a .
Gadījumā, ja montāžas neprecizitātes dēļ balstu C un D attālums atšķiras no nepieciešamā par lielumu a , pārvietojums nezināmā X_1 virzienā ir $\Delta_{1a} = -a$.

Tādā gadījumā balstbīde ir

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1a}}{\delta_{11}} = \frac{a}{\delta_{11}}.$$

Piemērs 7.1. Noteikt balstbīdi simetriskai kopnei (att. 7.6a) simetriska slodījuma gadījumā.

Atrisinājums. Izvēlamies pamatsistēmu (att. 7.6b), kurā pārgriezts stienis 9–10. Ar ārējo slodzi un lieko nezināmo $\bar{X}_1 = 1$ slogatā pamatsistēma parādīta att. 7.6b, c. Tā kā slodze ir simetriska, tad pietiek risināt tikai pusi no kopnes. Att. 7.7a, b dotas stieņu piepūles kreisajā kopnes pusē no ārējās slodzes un no piepūles $\bar{X}_1 = 1$.



att. 7.6

Pārvietojumu δ_{11} un Δ_{1P} izskaitļojums atspoguļots tabulā 7.1.

Tabula 7.1

Pārvietojumu δ_{11} un Δ_{1P} izskaitļojums

Stienis	l	$\bar{N}_1$	N_p^0	$\bar{N}_1 \cdot 2 \cdot l$	$\bar{N}_1 N_p \cdot l$
1-2	500	-0,417	-16,67P	86,94	3476P
2-3	500	-0,833	-16,67P	346,94	6943P
A-4	500	0,417	-25,00P	86,94	-5213P
4-5	500	0,833	-8,33P	346,94	-3,469P
5-6	500	0	-8,33P	0	0
A-1	300	-0,250	-20,00P	18,75	1500P
2-4	300	-0,250	-10,00P	18,75	750P
3-5	300	0,500	0	75,00	0
1-4	400	0,333	13,33P	44,36	1776P
2-5	400	0,333	0	44,36	0
3-C	400	-0,667	-13,33P	177,96	3556P
				$\Sigma = 1247$	$\Sigma = 9319P$
5-51	800	1,000	0	800	0

Uz šo rezultātu pamata

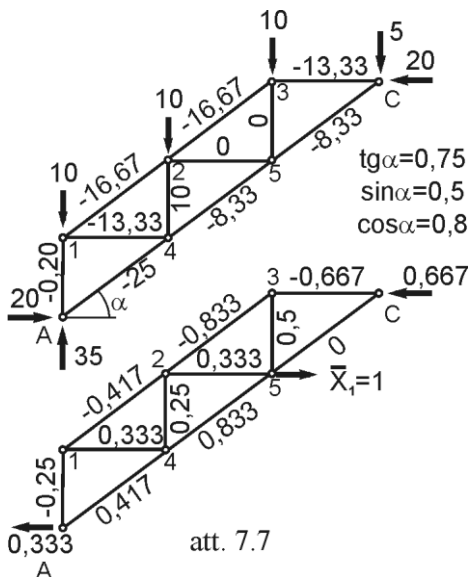
$$E\delta_{11} = 2 \cdot 1247 + 800 = 3294,$$

$$E\Delta_{1P} = 2 \cdot 9319 = 18638.$$

Liekā nezināmā vērtība ir

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{18638}{3294} = -5,658P$$

Piepūļu aprēķins dotās kopnes stieņos sākots tabulā 7.2.

Aprēķinu pareizību pārbauda novērtējot pārvietojumu Δ_{1P} nezināmā X_1 virzienā. Šo

pārvietojumu nosaka sakarība

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^n N_i \bar{N}_i (l_i / EF)$$

un tam jābūt vienādam ar nulli.

Izmantojot tabulās 7.1 un 7.2 dotās $\bar{N}_i$ un N_i vērtības, iegūstam

$$\sum N_i \bar{N}_i l = 140,778 - 140,747 = -0,031.$$

Pozitīvo un negatīvo saskaitāmo summas atšķiras mazāk kā par 0,03% un tas liecina par aprēķinu augstu precizitāti.

Tabula 7.2

Piepūļu aprēķins

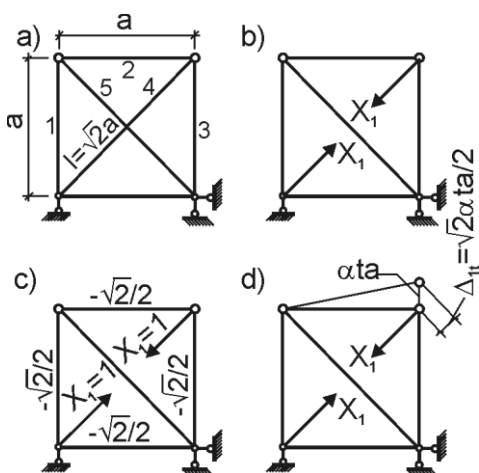
Stienis	$\bar{N}_1$	$\bar{N}_1 X_1$	N_p^0	$N_p = N_p^0 + \bar{N}_1 X_1$
1-2	- 0,417	2,36P	- 16,67 P	- 14,31P
2-3	- 0,833	4,71P	- 16,61 P	- 11,96P
A-4	0,417	- 2,36P	- 25P	- 27,36P
4-5	0,833	- 4,71 P	- 8,33P	- 13,04P
5-6	0	0	- 8,33P	- 8,33P
A-1	- 0,250	1,42P	- 20,75P	- 18,58P
2-4	- 0,250	1,42P	- 10P	- 8,58P
3-5	0,500	- 2,83P	0	- 2,83P
1-4	0,333	- 1,88P	13,33P	11,45P
2-5	0,333	- 1,88P	0	- 1,83P
3-C	- 0,667	3,77P	- 13,33P	- 9,56P
5-5	1,000	- 5,66P	0	- 5,66P

Piemērs 7.2. Noteikt piepūles att. 7.8 parādītās kopnes stieņos, kuras rodas stieņa N⁰ 3 sasīšanas rezultātā par t^0 C. Visu stieņu stingrība EF vienāda, bet lineārās izplešanās koeficients ir α .

Atrisinājums. Pamatsistēma dota att. 7.8b.

Pārvietojumu no $\bar{X}_1 = 1$ nosakām ar Mora formulu

$$\delta_{11} = \frac{1}{EF} \left[2 \cdot 1^2 (a\sqrt{2}) + 4 \left(- \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 a \right) \right] = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{EF}.$$



att. 7.8

Pārvietojumu nezināmā X_1 virzienā no stieņa N⁰ 3 pagarinājuma atrodam kā projekciju uz diagonāli (att. 7.8d):

$$\Delta_{1t} = -\alpha t a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Mīnus zīme norāda, ka pārvietojums vērsts pretējā virzienā piepūlei X_1 .

Ievietojot pārvietojumu vērtības izteiksmē

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} \quad \text{iegūstam}$$

$$X_1 = - \frac{\alpha t a \sqrt{2}}{4(1 + \sqrt{2})} EF.$$

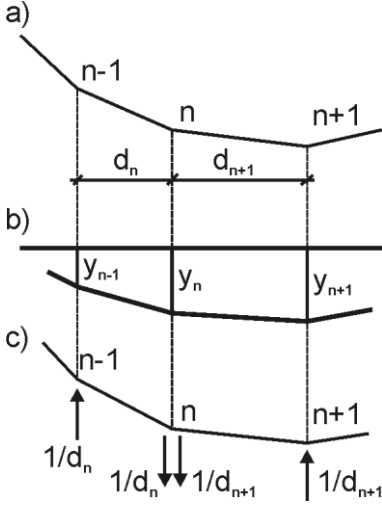
Piepūles kopnes stieņos nosaka sakarība

$$N_i = \bar{N}_i X_1 = \frac{\alpha t a \sqrt{2} EF}{4(1 + \sqrt{2})} \cdot \bar{N}_i = K \cdot \bar{N}_i.$$

Tātad piepūles no temperatūras izmaiņas stienī Nr.3 par t^0 C ir K reizes lielākas par piepūlēm, kuras rada piepūle $\bar{X}_1 = 1$ (att. 7.8c).

7.2. Izlieču līnijas konstruēšana ar elastīgo slodžu metodi

Gadījumos, ja ir nepieciešams noteikt kopnes augšējās vai apakšējās joslas mezglu pārvietojumu vertikālās projekcijas, var izmantot elastīgo slodžu metodi.



att. 7.9

Izvēlamies no kopnes mūs interesējošo joslu kā patstāvīgu locīklu ķēdi. Ķēdes posmi var būt orientēti visai patvaļīgi ar vienu izņēmumu - neviena ķēdes stieņa virziens nedrīkst sakrist ar meklējamo pārvietojumu virzienu (mūsu gadījumā vertikālo). Izvēlamies laužas formas stieņa daļu ar mezgliem $n-1, n, n+1$ (att. 7.9a). Mezglu pārvietojumu y epīra (att. 7.9b) pēc sava rakstura atgādina kādas fiktīvas sistēmas, kura slogota ar koncentrētu spēku W sistēmu lieces momentu epīru M_f . Šo spēku sistēmu W_i turpmāk sauksim par "elastīgo slodzi".

Spēku W lielumu var noteikt no M_f epīras. Vis-

pirms tiek noteiktas divas šķērsspēku vērtības (pa kreisi un pa labi no nosakāmās slodzes). Tā, piem., mezglā n

$$W_n = Q_{nf}^{kr} - Q_{nf}^{lab} = \varphi_{kr} - \varphi_{lab} = \Delta\varphi$$

(φ - pagrieziens leņķi stieņiem attiecībā pret kādu fiksētu virzienu, piem. horizontālo).

Saskaņā ar sakarību $dM/dx = Q$, iegūstam

$$W_n = \frac{1}{d_n} (M_{nf} - M_{(n-1)f}) - \frac{1}{d_{n+1}} (M_{(n+1)f} - M_{nf}),$$

bet tā kā $M_f = y$, tad

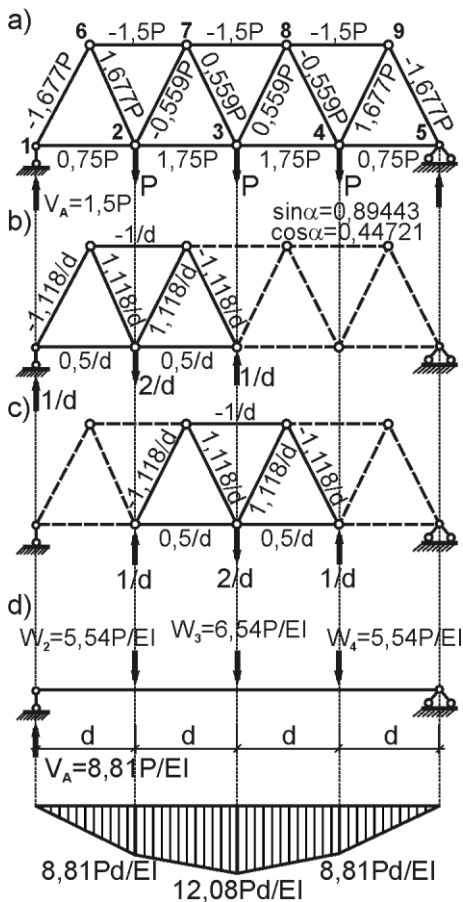
$$W_n = \frac{1}{d_n} (y_n - y_{n-1}) - \frac{1}{d_{n+1}} (y_{n+1} - y_n) = -\frac{y_{n-1}}{d_n} + y_n \left(\frac{1}{d_n} + \frac{1}{d_{n+1}} \right) - \frac{y_{n+1}}{d_{n+1}}. \quad (7.6)$$

Tātad fiktīvā slodze W_n ir vienāda ar mezglam n piegulošo stieņu virzienu leņķu izmaiņu $\Delta\varphi$ un, saskaņā ar formulu (7.6), tā ir vienāda ar pārvietojumu, kuru nosaka trīs izlieces

y_{n-1} , y_n un y_{n+1} un mēroga koeficienti $1/d_{n-1}$, $1/d_n$ un $1/d_{n+1}$.

Pieliekot laužas formas stieņa daļai att. 7.9c parādīto spēku sistēmu, veidojas divi spēku pāri, kuri veido pretējos virzienos vērstus vienības momentus. Apzīmējot šādas iedarbības izraisītās piepūles ar $\bar{M}_n$, $\bar{Q}_n$ un $\bar{N}_n$ leņķa izmaiņu starp punktā saejošiem elementiem nosaka sakarība

$$W_n = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_n}{EI} ds + \sum \int \frac{N_p \bar{N}_n}{EF} ds + \sum \mu \int \frac{Q_p \bar{Q}_n}{GF} ds. \quad (7.7)$$



att. 7.10

Piepūļu $\bar{M}_n$, $\bar{Q}_n$ un $\bar{N}_n$ epīras attiecas tikai uz diviem blakus esošiem elementiem, jo att. 7.9c dotā spēku sistēma ir savstarpēji līdzsvarota. Sakarība (7.7) ļauj noteikt fiktīvās slodzes jebkurai stieņu sistēmai (sijām, lokiem, kopnēm u.c.).

Piemērs 7.3. Uzkonstruēt att. 7.10a dotās kopnes apakšējās joslas mezglu izlieču līniju. Visu stieņu stingrības ir konstantas un vienādas ar EF .

Atrisinājums. Piepūļu vērtības kopnes stieņos no pastāvīgās slodzes P uzdotas att. 7.10a. Tās iegūstamas ar kādu no kopņu stieņu piepūļu aprēķinu metodēm. Lai noteiktu fiktīvo slodzi W_2 (mezglā 2) kopnei tiek pielikta slodžu sistēma (att. 7.10b) divu spēkpāru veidā (to moments vienāds ar vienu). No šīs līdzsvarotās spēku sistēmas kop-

nes stieņos rodas piepūles $\bar{N}_2$. Tās uzdotas att. 7.10b. No šiem rezultātiem varam secināt, ka noslogoti ir tikai divu pirmo paneļu stieņi, bet pārējos stieņos (raustītās līniji-

jas) piepūļu nav. Analogi rezultāti iegūstami fiktīvās slodzes W_3 noteikšanai. Att. 7.10c uzdotas piepūļu $\bar{N}_3$ vērtības. Fiktīvā slodze $W_4 = W_2$ (kopnes simetrijas dēļ). Kopnes gadījumā tās stieņos rodas tikai ass spēki un tātad sakarība (7.7) vienkāršojas. Pie tam stieņu robežās piepūles ir konstantas, līdz ar to jebkuram i-tajam stienim ir spēkā sakarība

$$\int \frac{N_p \bar{N}_i}{EF} ds = \frac{N_p \bar{N}_i}{EF} d_i.$$

Atbilstošās fiktīvās slodzes ir

$$W_n = \sum_{i=1}^n \frac{N_{ip} \bar{N}_{in}}{EF} d_i.$$

Slodžu W aprēķinus ērti veikt tabulu veidā. Slodžu W_2 un W_3 aprēķini sakopoti tab. 7.3 un tab. 7.4. Iegūtās fiktīvās slodzes W_2 , W_3 un W_4 tiek pieliktas att. 7.10d fiktīvai sistēmai (sijai) un konstruēta atbilstošā momentu epīra (att. 7.10d). Tā arī būs kopnes apakšējās joslas mezglu izlieču līnija.

Tabula 7.3

W_2 noteikšana

Stieņa Nr.	S	N_p	$\bar{N}_2$	$\frac{N_p \bar{N}_2}{EF} S$ (reizinātājs P/EF)
1-2	d	0,75P	0,5/d	0,3750
2-3	d	1,75P	0,5/d	0,8750
6-7	d	-1,5P	-1/d	1,5
1-6	d	-1,677P	-1,118/d	2,0961
6-2	1,118	1,677P	1,118/d	2,0961
2-7	1,118	-0,559P	1,118/d	-0,6987
7-3	1,118	0,559P	-1,118/d	-0,6987

$$W_2 = W_4 = 5,5448$$

Tabula 7.4

W₃ noteikšana

Stieņa Nr.	S	N _p	$\bar{N}_3$	$\frac{N_p N_3}{EF} S$ (reizinātājs P/EF)
2-3	d	1,75P	0,5/d	0,875
3-4	d	1,75P	0,5/d	0,875
7-8	d	-2P	-1/d	2
2-7	1,118d	-0,559P	-1,118/d	0,6987
7-3	1,118d	0,559P	1,118/d	0,6987
3-8	1,118d	0,559P	1,118/d	0,6987
8-4	1,118d	0,559P	-1,118/d	0,6987

$$W_3 = 6,5448$$

Gadījumā, ja nepieciešams konstruēt kopnes augšējās joslas mezglu izlieču līniju, nepieciešams noteikt fiktīvās slodzes W_6 , W_7 , W_8 un W_9 izmantojot iepriekšējo metodiku.

7.3. Liekā nezināmā un kopnes stieņu piepūļu ietekmes līnijas

Pieņemsim, ka divlaidumu kopne balstīta ar trim balstiem (att. 7.11a). Tātad tā ir vienreiz statiski nenoteicama un tai ir viena lieka saite. Atmetam vidējo balstu un tā vietā pielikam nezināmo reakciju X_1 . Šīs nezināmās reakcijas ietekmes līniju nosaka sakarība

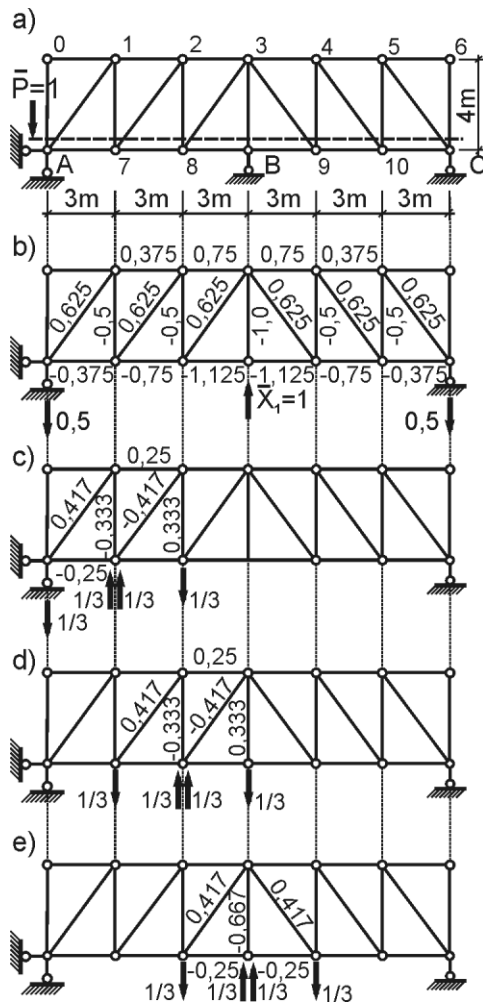
$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{\text{izlieču līnijas ordinātas}}{\text{mērogs}},$$

kur δ_{p1} - slogotās joslas (mūsu gadījumā apakšējās) mezglu vertikālie pārvietojumi no

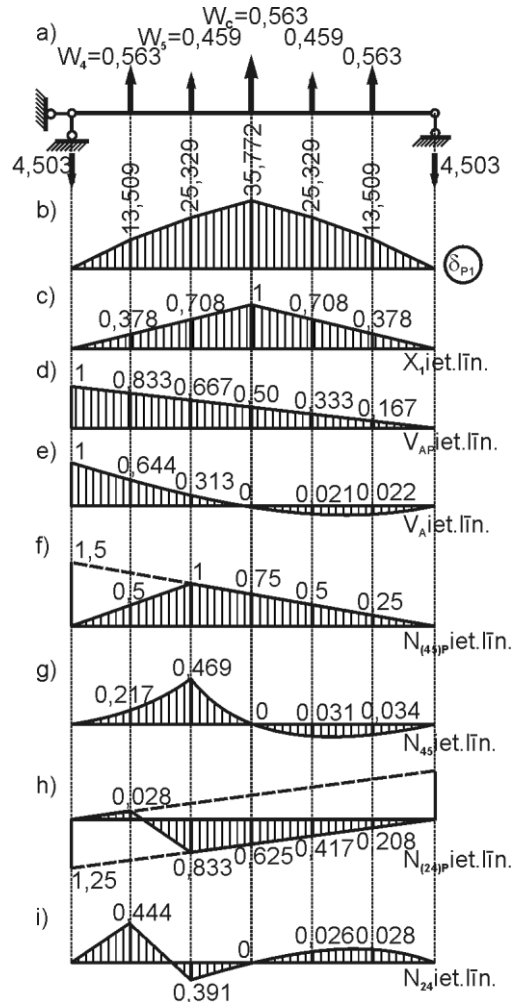
spēka $\bar{X}_1 = 1$ iedarbības, bet $\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i^2 l_i / EF_i$.

Nezināmā X_1 ietekmes līnijas konstruēšanai izsekosim ar skaitliska piemēra palīdzību (att. 7.11).

Pamatsistēmas stieņu piepūles N_{pi} no vienības slodzes $\bar{P}=1$ dotas att. 7.11b.



att. 7.11



att. 7.12

Pārvietojumu δ_{P1} epīru konstruējam izmantojot fiktīvo slodžu principu. Lai noteiktu elastīgo slodžu lielumu mezglos 4, 5 un B jāpieliek vienības spēku pāri. Piepūles $\bar{N}_1$, kuras rodas no vienības spēku pāriem dotas att. 7.11 c, d, e.

Saskaņā ar formulu $W_n = \sum \bar{N} N_p l / EF$, ievietojot $E=1$ un $F=1$, nosakām fiktīvās slodzes

$$W_4 = 2 \cdot 0,375 \cdot 0,25 \cdot 3 = 0,563$$

(režģa stieņu piepūles savstarpēji saīsinās un tādēļ nav uzrādītas),

$$\begin{aligned} W_5 &= 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 3 + 0,333 \cdot 0,5 \cdot 4 + 0,333 \cdot 1 \cdot 4 = 0,459, \\ W_B &= 2 \cdot 1,125 \cdot 0,25 \cdot 3 + 2 \cdot 0,417 \cdot 0,625 \cdot 5 + 1 \cdot 0,667 \cdot 4 = \\ &= 1,688 + 2,606 + 2,668 = 6,962. \end{aligned}$$

Pieliekot fiktīvās slodzes fiktīvai sijai (att.7.12a), iegūstam fiktīvus momentus, kas ir vienādi ar izliecēm δ_{p1} . Nezināmā X_1 ietekmes līnijas ordinātes nosakām izdalot izlieču līnijas ordinātes ar kopnes pamatsistēmas viduspunkta B pārvietojumu vienības slodzes virzienā, t.i. ar δ_{11} .

Balsta A reakcijas V_A ietekmes līnijas ordinātes iegūstam atbilstoši izteiksmei

$$V_A = V_{AP} + V_{AX} X_1,$$

kur V_{AX} – balsta A reakcija no vienības spēka $\bar{X}_1 = 1$ pamatsistēmā ($V_{AX} = -0,5$).

V_{AP} – balsta A reakcija pamatsistēmā no slodzes P (att. 7.12d). Balsta reakcijas V_A ietekmes līnija parādīta att. 7.12e. Stieņu 4-5 un 2-4 piepūļu ietekmes līnijas iegūtas atbilstoši sakarībām

$$N_{45} = N_{(45)P} - 0,75X_1;$$

$$N_{24} = N_{(24)P} - 0,625X_1.$$

Atbilstoši šīm sakarībām noteiktās ietekmes līniju ordinātes parādītas att. 7.12g, i. Koeficienti -0,75 un 0,625 iegūti no att. 7.11b.

7.4. Daudzkārt statiski nenoteicamu kopņu aprēķins

Praksē izmantojamām kopnēm raksturīgs liels stieņu skaits un augsta statistiskās nenoteicamības pakāpe.

Pielietojot spēku metodi aprēķini reducējas uz n kanonisko vienādojumu atrisināšanu, lai noteiktu n lieko saišu piepūles. Šādiem aprēķiniem kaut arī ir visai vienvēidīgs raksturs, tomēr ir liels apjoms. Statiski nenoteicamām kopnēm analītiskie aprēķini jāuzskata par neracionāliem kā lielā apjoma, tā iespējamo kļūdu dēļ.

Tādēļ praksē plašu pielietojumu gūst skaitliskās metodes (galvenokārt galīgo elementu metode) un to realizāciju nodrošinošās praktiskās skaitļojamās programmas. Praksē

sastopama liela šādu programmu daudzveidība. To būtiska īpašība ir šādu programmu universālums dažādu mehānikas uzdevumu risināšanā. Iespējamo uzdevumu daudzveidība nosaka šo programmu potenciālās iespējas. Pastāv tendence aizvien pilnveidot un papildināt esošās programmas, tādā veidā palielinot to iespējas dažādu uzdevumu atrisināšanā.

Bieži vien praksē izmantojamo risinājumu klāsts ir daudz šaurāks par to, ko var nodrošināt konkrētā programma. Ar to arī izskaidrojama otra tendence pielietojamo programmu izstrādē - radīt programmas konkrētu mehānikas uzdevumu atrisināšanai. Šīm programmām raksturīgākās īpašības ir vienkāršība un ērtums ekspluatācijā, augsta precizitāte konkrētas uzdevumu grupas atrisinājumam. Šādas īpašības piemīt rekomendējamai statistiski slogotu stieņu sistēmu pārvietojumu un piepūļu aprēķina programmai Analysis for Windows 1.9. Izmantojot skaitļošanas programmu ērti veikt aprēķinus un pētījumus par kopņu racionālām struktūrām uzdotam pārseguma laidumam un ekspluatācijas slodzēm. Par kopņu īpašību variēšanas parametriem var tikt izmantoti – kopnes paneļu skaits, to ģeometrija, lieko stieņu skaits, kopni veidojošo stieņu sortiments, u.c.

Literatūra

1. F. Bulavs, I. Radiņš. Būvmehānikas ievadkurss, RTU izdevniecība, Rīga, 2006, 205 lpp.
2. F. Bulavs, I. Radiņš. Būvmehānika, statistiski noteicamas sistēmas, RTU izdevniecība, Rīga, 2004, 167 lpp.
3. F. Bulavs, I. Radiņš. Būvmehānika, statistiski nenoteicamas sistēmas, RTU izdevniecība, Rīga, 2003, 171 lpp.
4. I. Melderis, G. Teters. Būvmehānika. Zvaigzne, Rīga, 1977, 560 lpp.
5. I. Melderis, V. Juriksons. Būvmehānikas uzdevumi ar atrisinājumiem. Zvaigzne, Rīga, 1970, 368 lpp.
6. А. В. Дарков, Н.Н. Шапошников. Стойтельная механика. Высшая школа, Москва, 1986, 606 стр.
7. В. А. Киселев. Стойтельная механика. Стройздат, Москва, 1986, 520 стр.
8. Н. В. Мухин. Статика сооружений в примерах. Высшая школа, Москва, 1979, 303 стр.
9. Rolands Rikards, Andris Čate. Galīgo elementu metode. RTU Izdevniecība, 2002.